



Institut de Recherche en Informatique et
Systèmes Aléatoires

Programmation par ensembles-réponses, application à l'étude de systèmes biologiques à grande- échelle

Anne SIEGEL, CNRS, IRISA (Rennes)



PRESENTATION

Scientific background

- Math: discrete dynamical systems & fractals
- Modelling : systems biology
- Computer science: Knowledge representation

IRISA Laboratory

- Computer science lab of Rennes
- 800 employees, > 35 teams
- Seven departments, among which « data and knowledge management »

Bioinformatics & systems biology group

- **2 teams and 1 platform (45 in total)**
- **Dyliss team:** symbolic methods for integrating and reasoning over large-scale heterogeneous data



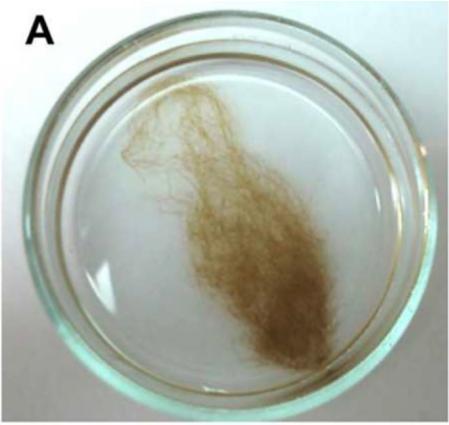
A SIMPLE QUESTION FROM BIOLOGY: WHY ALGAE NEED BACTERIA ?



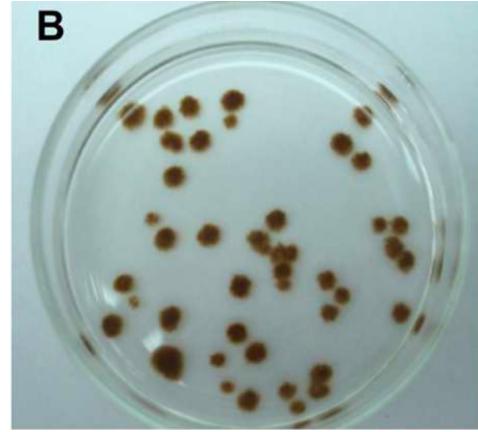
CNRS • SORBONNE UNIVERSITÉ
Station Biologique
de Roscoff



S. Dittami

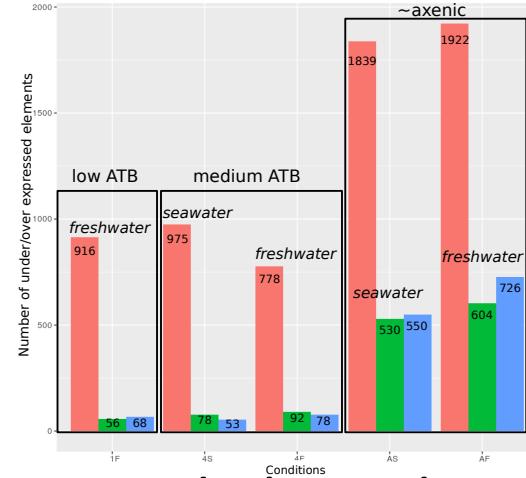


E. siliculosus



In axenic condition...

[Dittami2014, Tapia2016]



Metabolic scale

Fremy, Frioux, unpublished

Question: which bacteria (and how) allow algae to grow ?

OUTLINE

Underlying life science question: elucidate functions at the microbiological scale

Methodological question: How computer science can be useful ?

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

1. From observations to discoveries in life sciences

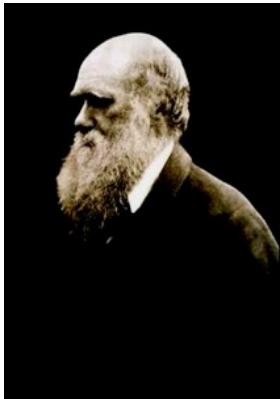
1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

DEALING SCIENTIFICALLY WITH NATURE

- Experimental science viewpoint (Starting with Plato, astronomy): the aim of science is to **propose hypotheses intended to save the appearances.**
 - The task of **hypothesis building** is provided by **abduction**.
- Demonstrative science viewpoint (Aristotle): the aim of science is to **discover the principles which would serve as explanations for the observed phenomena (Aristotle)**.
 - The task of **discovery** is provided by **induction**.

OBSERVING (19TH CENTURY)

Use observations (and comparisons) to exhibit biological theories (=dogma)



Charles Darwin,
Theory of evolution



Jeanne Villepreux-Power,
Founder of Marine Biology



L'Abécédaire du petit
naturaliste

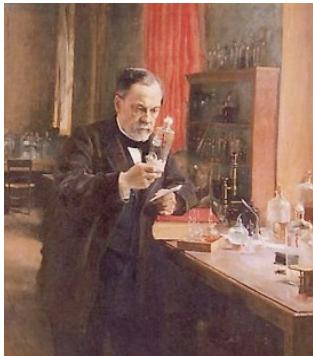
Anonyme



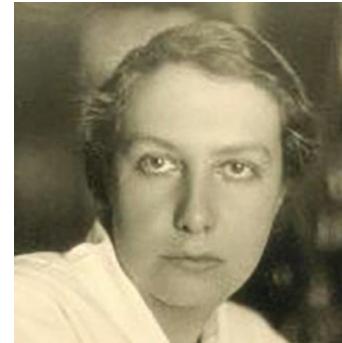
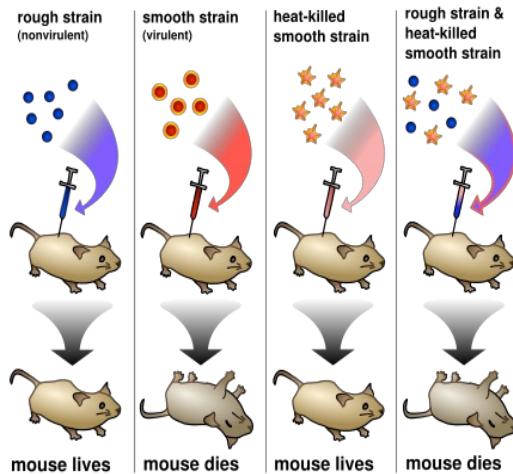
Abduction is the process of inferring certain (...) laws and hypotheses (...) that explain or discover some (...) phenomenon or observation; it is the process of reasoning in which explanatory hypotheses are formed and evaluated. (Magnani, 2001)

EXPERIMENTING (20TH CENTURY)

Use experiments to prove hypotheses and generate discoveries



Louis Pasteur,
microbiology

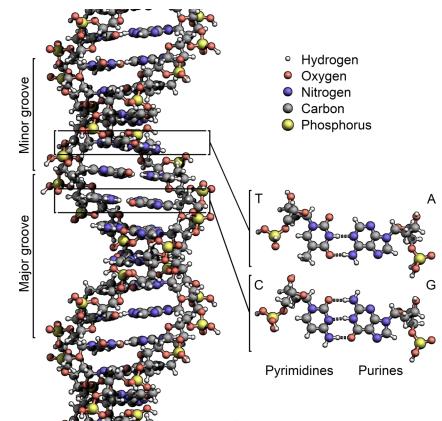
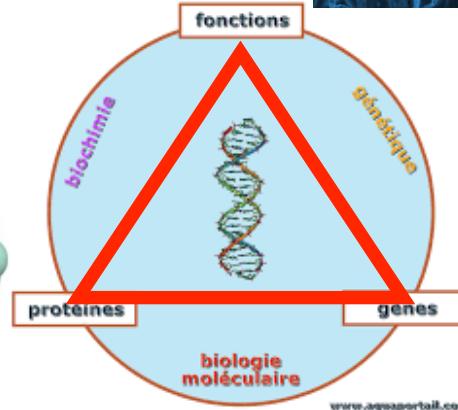
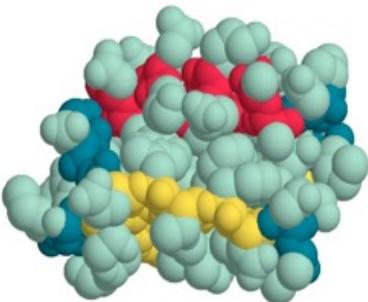


Germaine Benoit,
Infectious diseases
(therapeutic molecules)

Deduction is used to take advantages of existing theories
→ New theories emerge from incompleteness between former
theories and experimental observations

INCREASE OBSERVATIONS : MOLECULAR BIOLOGY (2ND HALF OF 20TH CENTURY)

Develop new technological devices to observe and experimental at smaller scales



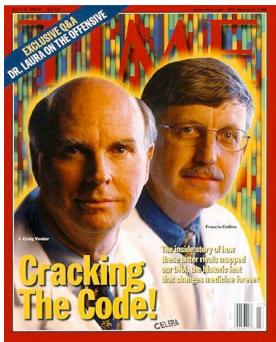
→ Acquiring data towards induction processes

GENOMES

We now have the capability to sequence the genome of organisms and samples in a few time.



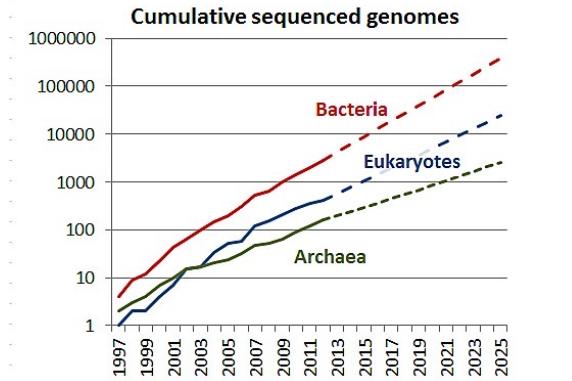
ADN (Watson, Creek, Franklin)



Genome Sequencing
(Venter, Collins)



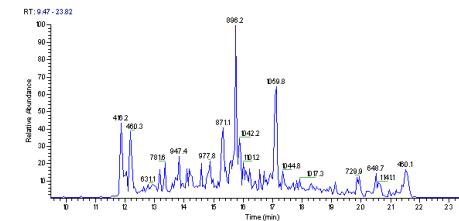
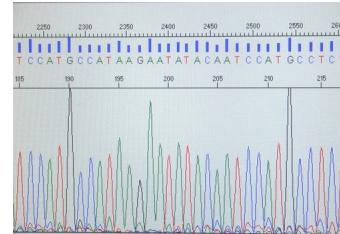
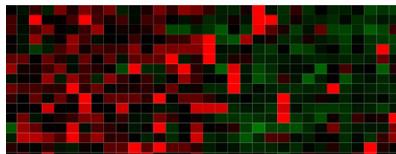
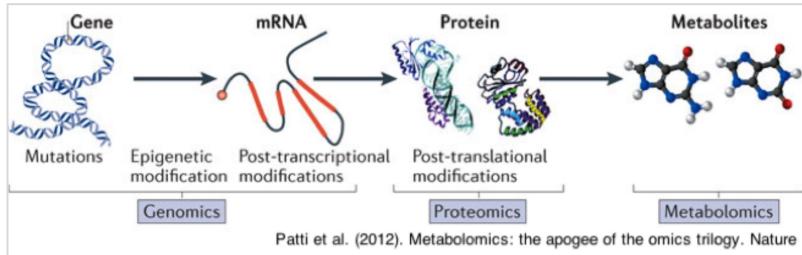
→ Massive data to explore



<https://doi.org/10.6084/m9.figshare.723384.v1>

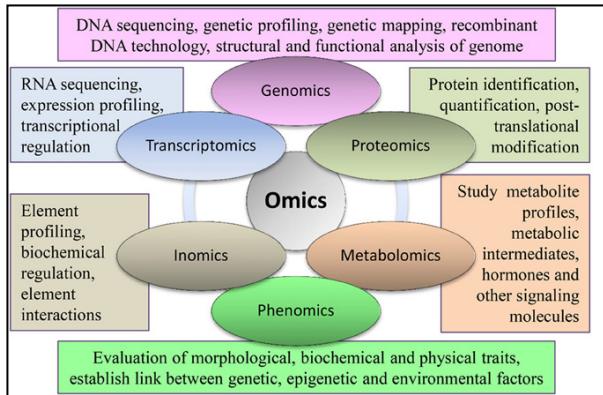
TRANSCRIPTOMICS – PROTEOMICS – (...)

Measure the consequences of the presence of genes in species genomes

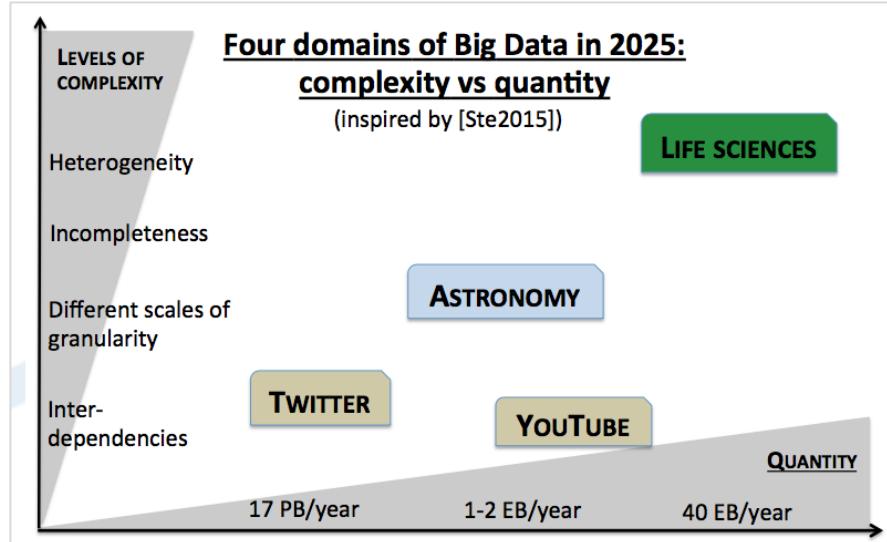


Confront genomes with their observed consequences (phenotypes)

LIFE-SCIENCES DATA NIGHTMARE



Data deluge



Worst data that may exist (size and quality) (stephens, 2015)

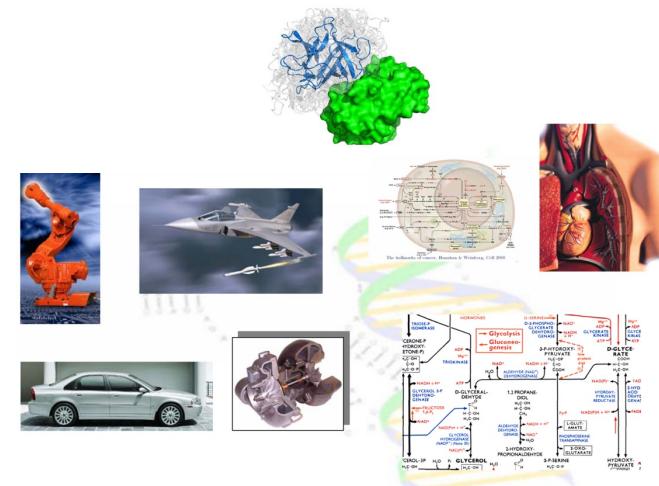
Data-based induction: characterize diseases (imaging), diagnosis.

MASSIVE GENOMES ANALYSES

Strong deception: life-science complexity (species, diseases) cannot be explained by the genome diversity

Limits of the reductionist approach

« Biology requires to examine the structure and dynamics of a cellular function rather than the characteristics of isolated parts of a cell » (Kitano, 2002)



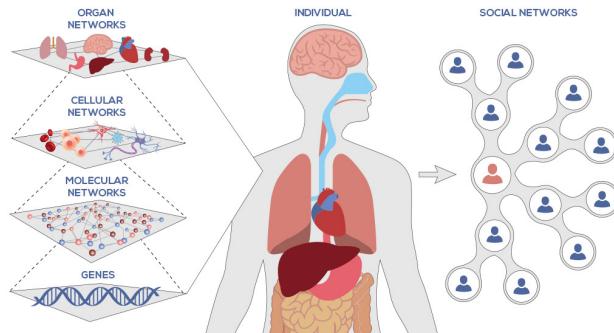
IN OTHER WORDS: BIOLOGY IS A COMPLEX SYSTEM

... data-based induction discovery is far from possible

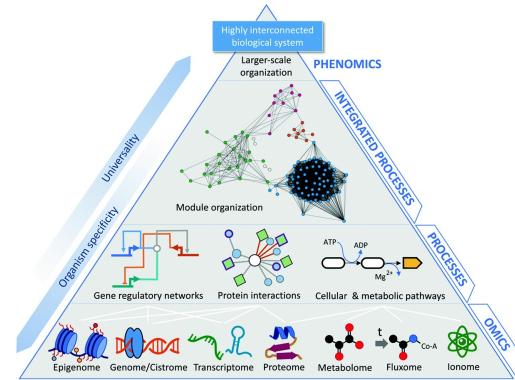
2. (Identification of) dynamical systems

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
- 2. (Identification of) dynamical systems**
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

SYSTEMS BIOLOGY



<https://isbscience.org/about/what-is-systems-biology/>

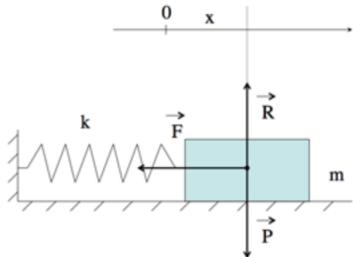


https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-18601-2_8

Systems biology. Biological observations results from the superposition and the chaining of multi-layer mechanisms.

- Biology is a complex (dynamical) system
- Produce predictive statements that can be experimentally validated (deduction) ?

MODELLING A COMPLEX SYSTEM



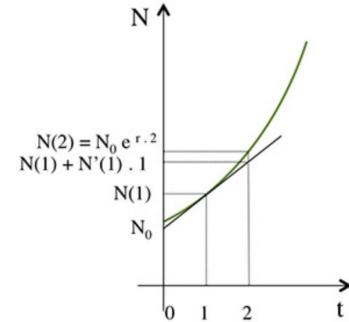
Système masselotte-ressort.
La masselotte de masse m est supposée glisser sans frottement. \vec{R} est la réaction du support, égale au poids \vec{P} . La masselotte n'est donc soumise qu'à la seule force de rappel \vec{F} , proportionnelle à la distance x à sa position à l'équilibre (où \vec{F} est nulle).

$$m x''(t) = -k x(t)$$
$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \mathbf{S} \mathbf{v}(\mathbf{M}(t))$$

Write differential equations

Describe mechanisms



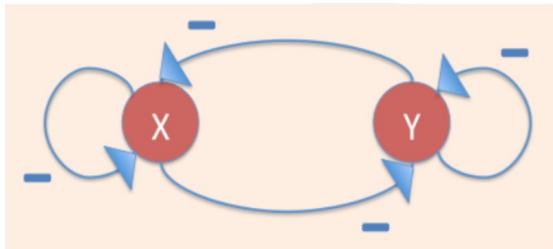
Si, à partir du temps $t_1 = 1$, la croissance de N se poursuivait à une vitesse constante égale à la dérivée en ce point, c'est-à-dire avec la valeur $N'(t_1) = N'(1)$. N croîtrait linéairement pour atteindre, au temps $t_2 = 2$, la valeur $N(t_1) + N'(t_1) \cdot (t_2 - t_1) = N(1) + N'(1) \cdot 1 \approx 1061,36$. Mais la valeur de la dérivée $N'(t)$ varie à chaque instant, puisqu'elle est égale à $r \cdot N(t)$. De fait, la valeur $N(t_2) = N(2)$ est égale à $N_0 e^{r \cdot 2} \approx 1061,83$.

Solve differential equations or simulate them

DYNAMICAL SYSTEMS

Historical motivation Model the evolution of the set of components in a system according to time.

$$F : \begin{matrix} \mathbb{T} & \times & \mathbb{S} \\ (t, \mathbf{z}) & \mapsto & F(t, \mathbf{z}) \end{matrix} \quad \begin{matrix} \rightarrow \mathbb{S} \\ (\text{time}, \text{state}) \quad \text{new state at time } t \end{matrix}$$



$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \frac{k}{K + Y^n} - aX \\ \frac{dY}{dt} &= \frac{l}{L + X^n} - bY\end{aligned}$$

Parameterized numerical system

$$f(X) \leftarrow 1 - Y$$

$$f(Y) \leftarrow 1 - X$$

Boolean model with asynchronous update scheme

Identification/calibration of a dynamical system Find the best function F which parsimoniously explains and describes the observed responses of a system.

MODEL IDENTIFICATION/CALIBRATION SINCE THE 18TH CENTURY

What has always allowed a model identification

- **A priori knowledge about the (conservation/behavior) laws governing the system**
 - Predetermined shape for the function F
- **Limited number of components**
 - Reduction of the search space
- **Wide panel of sensors and perturbations**
 - Discriminate parameters

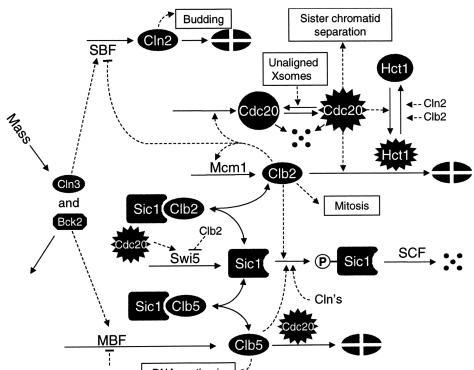
Where is the complexity ?

- The search space grows exponentially with the number of measured compounds

The more compounds we measure, the less calibrated a system can be.

EXAMPLE

Yeast cell cycle (Tyson 1990)



Molecular Biology of the Cell

Equations governing cyclin-dependent kinases

$$\frac{d}{dt} [\text{Cln } 2] = (k'_{\text{a},02} + k\sigma_{\text{a},02}[\text{SBF}]) \cdot \text{mass} - k_{\text{d},02} [\text{Cln } 2]$$

$$\frac{d}{dt} [\text{Clb } 2]_T = (k'_{\text{a},02} + k\sigma_{\text{a},02}[\text{Mem } 1]) \cdot \text{mass} - V_{\text{d},02} [\text{Clb } 2]_T,$$

$$V_{\text{d},02} = k_{\text{d},02}[\text{Hct } 1] + (k\sigma_{\text{a},02}[\text{Hct } 1]) + k\sigma_{\text{a},02}[\text{Hct } 1] \cdot k\sigma_{\text{a},02}[\text{Cdc } 20]$$

$$\frac{d}{dt} [\text{Clb } 5]_T = (k'_{\text{a},05} + k\sigma_{\text{a},05}[\text{MBF}]) \cdot \text{mass} - V_{\text{d},05} \cdot [\text{Clb } 5]_T, V_{\text{d},05} = k_{\text{d},05} + k\sigma_{\text{a},05} [\text{Cdc } 20]$$

$$[\text{Bck } 2] = [\text{Bck } 2]^0 \cdot \text{mass}, [\text{Cln } 3]_S = [\text{Cln } 3]_{\text{max}} \cdot \frac{D_{03} \cdot \text{mass}}{J_{03} + D_{03} \cdot \text{mass}}$$

$$[\text{Clb } 2]_I = [\text{Clb } 2] + [\text{Clb } 2] \cdot [\text{Sic } 1], [\text{Clb } 5]_I = [\text{Clb } 5] + [\text{Clb } 5] \cdot [\text{Sic } 1]$$

$$[\text{Sic } 1]_I = [\text{Sic } 1] + [\text{Clb } 2] \cdot [\text{Sic } 1] + [\text{Clb } 5] \cdot [\text{Sic } 1]$$

Equations governing the inhibitor of Clb-dependent kinases

$$\frac{d}{dt} [\text{Sic } 1]_T = k'_{\text{a},01} + k\sigma_{\text{a},01} [\text{Swi } 5] - (k_{\text{d},01} + \frac{V_{\text{d},01}}{J_{02},01 + [\text{Sic } 1]_T}) \cdot [\text{Sic } 1]_T$$

$$\frac{d}{dt} [\text{Clb } 2 / \text{Sic } 1] = k_{\text{a},02} [\text{Clb } 2] \cdot [\text{Sic } 1] - (k_{\text{d},02} + V_{\text{d},02} + k_{\text{d},01} + \frac{V_{\text{d},01}}{J_{02},01 + [\text{Sic } 1]_T}) \cdot [\text{Clb } 2 / \text{Sic } 1]$$

$$\frac{d}{dt} [\text{Clb } 5 / \text{Sic } 1] = k_{\text{a},05} [\text{Clb } 5] \cdot [\text{Sic } 1] - (k_{\text{d},05} + V_{\text{d},05} + k_{\text{d},01} + \frac{V_{\text{d},01}}{J_{02},01 + [\text{Sic } 1]_T}) \cdot [\text{Clb } 5 / \text{Sic } 1]$$

$$V_{\text{d},01} = k_{\text{d},02} [\text{Cln } 3]_S + k_{\text{d},05} [\text{Clb } 2] + [\text{Cln } 2] + [\text{Cln } 3]_S + [\text{Cln } 5] + [\text{Cln } 2] \cdot [\text{Cln } 5]$$

Equations governing the Clb degradation machinery

$$\frac{d}{dt} [\text{Cdc } 20]_T = (k'_{\text{a},20} + k\sigma_{\text{a},20} [\text{Clb } 2]) - k_{\text{d},20} [\text{Cdc } 20]_T$$

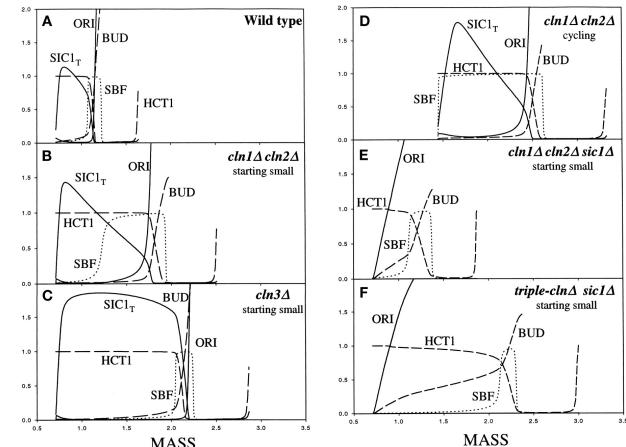
$$\frac{d}{dt} [\text{Cdc } 20] = k_{\text{a},20} ([\text{Cdc } 20]_T - [\text{Cdc } 20]) - (V_{\text{d},20} + k_{\text{d},20}) \cdot [\text{Cdc } 20]$$

$$V_{\text{d},20} = \begin{cases} k_{\text{d},20}, & \text{for END_M + 12min} < t < \text{START_S} \\ k\sigma_{\text{a},20}, & \text{for START_S} < t < \text{END_M} \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} [\text{Hct } 1] = \frac{(k'_{\text{a},01} + k\sigma_{\text{a},01} [\text{Cdc } 20]) ([\text{Hct } 1]_T - [\text{Hct } 1])}{J_{01},01 + [\text{Hct } 1]_T} - \frac{V_{\text{d},01} [\text{Hct } 1]}{J_{01},01 + [\text{Hct } 1]}$$

Graph model of interactions, transformations and controls

Fitting of a numerical model (ODE)

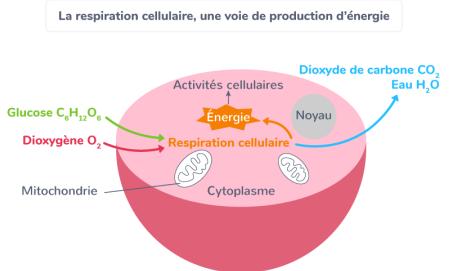


Simulation of the effect of mutations

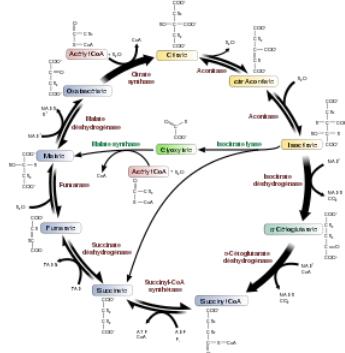
Limitation: to add a molecule, we need to find many new parameters

FROM BIOLOGICAL FUNCTIONS TO METABOLIC MAPS

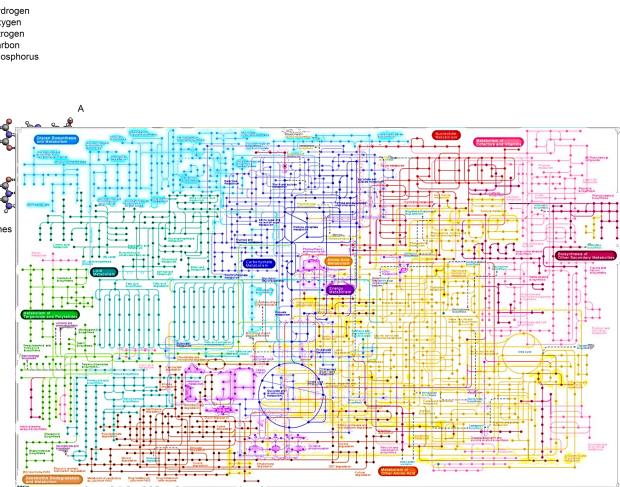
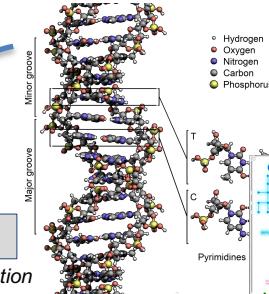
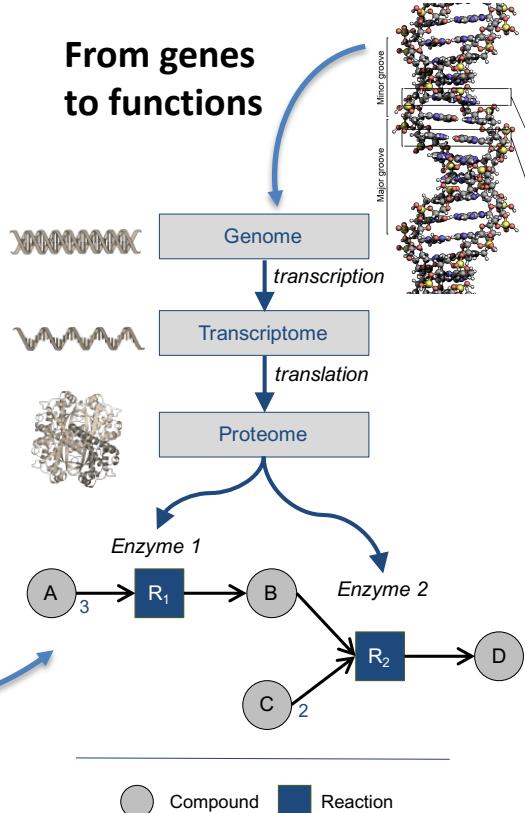
Metabolic function



Molecules involved in the function



From genes to functions



Metabolic map = bipartite directed graph

$$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \mathbf{S} \mathbf{v}(\mathbf{M}(t))$$

Dynamical model
1500 reactions
2 parameters/reaction to fit

Biomolecular dynamical systems cannot be identified !!!

DIFFERENCES BETWEEN SCIENCES

Physics

- **Knowledge**

- Fundamental laws

- **Sensors**

- Numerous

- **Perturbations**

- Controlled reactors

DIFFERENCES BETWEEN SCIENCES

Physics

- **Knowledge**
Fundamental laws
- **Sensors**
Numerous
- **Perturbations**
Controlled reactors

Biology

- **Knowledge**
Empirical laws
- **Sensors**
Qualitative
- **Perturbations**
Few possible perturbations

DIFFERENCES BETWEEN SCIENCES

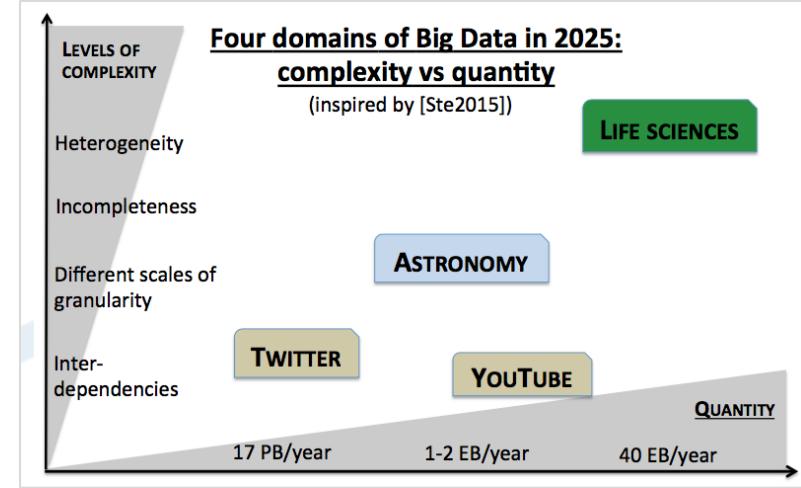
Physics

- **Knowledge**
Fundamental laws
- **Sensors**
Numerous
- **Perturbations**
Controlled reactors



Biology

- **Knowledge**
Empirical laws
- **Sensors**
Qualitative
- **Perturbations**
Few possible perturbations



Molecular biology cannot be studied with usual complex system approaches

STRATEGY: DYNAMICAL SYSTEMS & LOGICAL CONSTRAINTS PROGRAMMING

Describe a system by a family of abstract models

- Avoid quantitative predictions
- Reason over a family of models instead of selecting a single one

Logical knowledge representation

- Search space description

Discrete dynamical systems

- Links between multi-scale observations

Combinatorial optimisation problems

- Replace laws by combinatorial constraints

Forget about deduction or induction...

and come back to abduction to mimic life science discovery reasoning

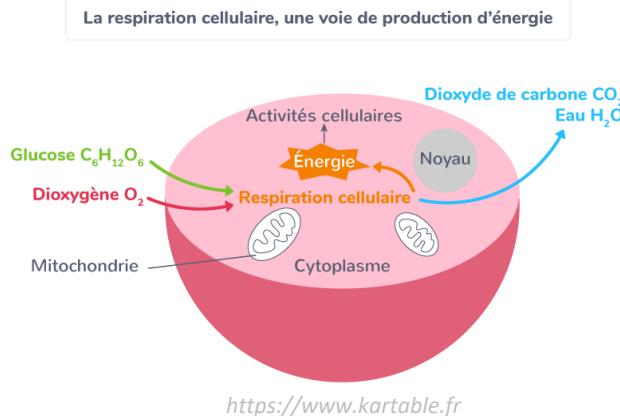
3. Focus on the metabolic scale

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
- 3. Focus on the metabolic scale.**
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

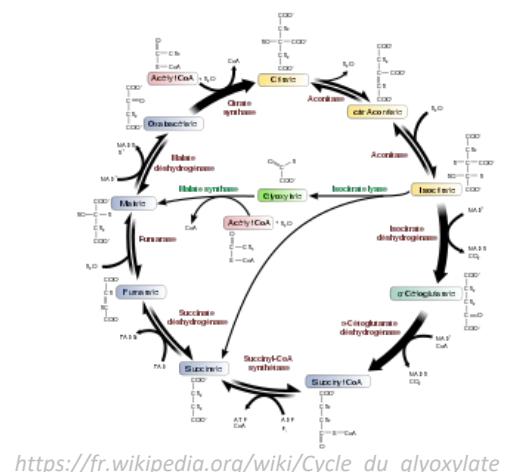
FOCUS SUR L'ECHELLE DU METABOLISME

Voies métaboliques: ensemble de **réactions chimiques** permettant de **convertir un composé chimique en un autre à travers des transformations successives**, catalysées par des enzymes.

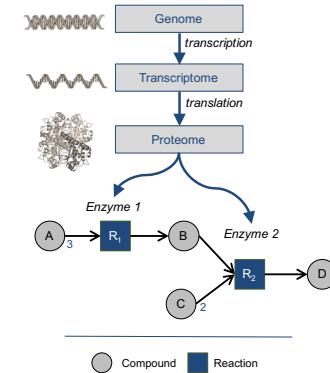
Fonction métabolique



Acteurs de cette fonction

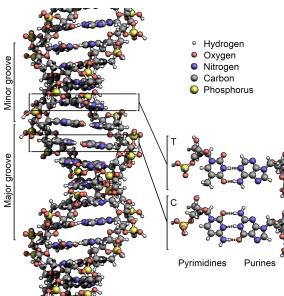


Du gène à la fonction



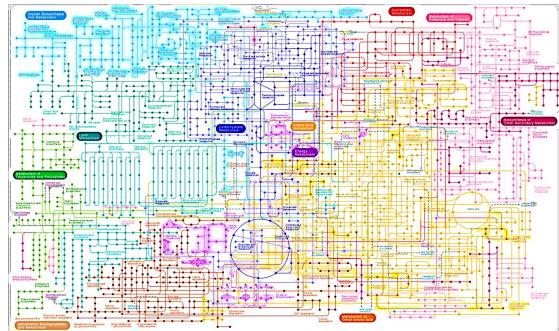
Les fonctions métaboliques sont contrôlées par des gènes

EXPLOITATION DU GENOME A L'ECHELLE DU METABOLISME



<https://fr.wikipedia.org>

Transformation du génome annoté en carte métabolique



Source : KEGG

Analyse des flux: produire un maximum de composés sans provoquer d'embouteillages ?



insuline

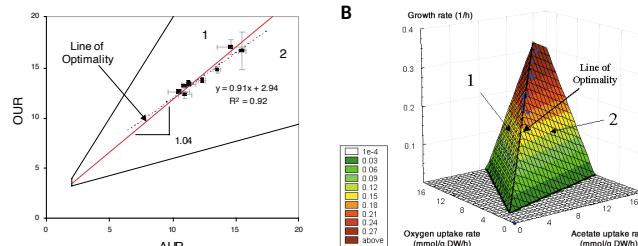
vitamines

cosmétiques

Acides aminés

ethanol

Génie génétique (CRISPR)
pour optimiser la production
de molécules

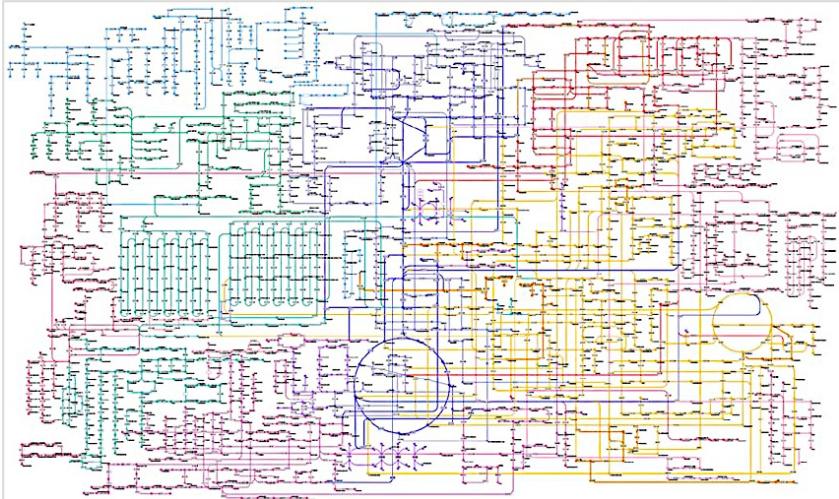


Source : Edwards, Ibarra Palsson, nature biotech. 2001

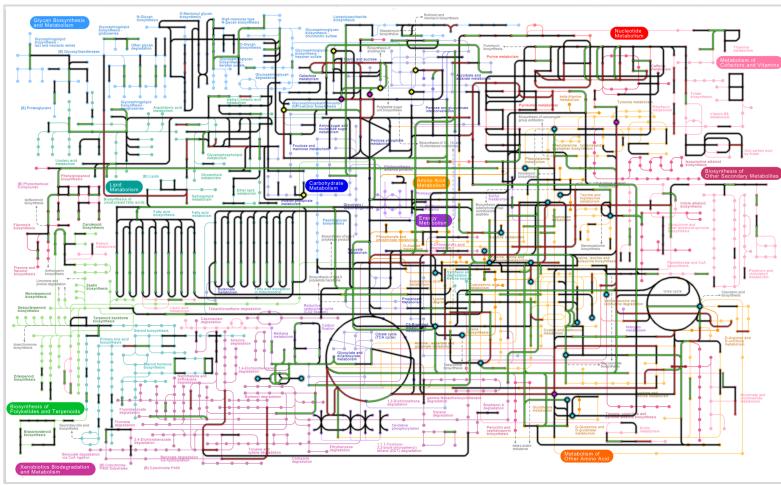
→ Systèmes dynamiques non identifiables
→ Principe thermodynamique & entropique
du métabolisme
→ Recherche opérationnelle, raisonnement

Le schéma est valable pour les bactéries, levures et microalgues (unicellulaires)
qui ont des cartes de bonne qualité

DANS LA VRAIE VIE



Expected metabolic map



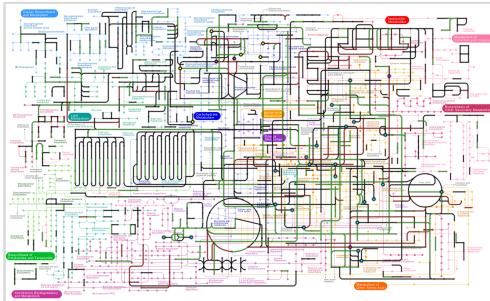
Real metabolic map

Holes → impossible predictions

EUKARYOTES MULTICELLULAIRES : EXEMPLE DES MACRO-ALGUES

Les cartes sont incomplètes

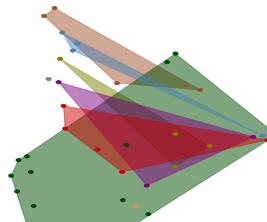
- on ne connaît que très partiellement les fonctions des protéines
- Il manque des voies de synthèse complètes dans les bases de connaissances



(Tapia et al, 2016)

Les cartes dépendent fortement des annotations et des technologies de séquençage

- Diatoms
- Green algae
- Haptophytes
- Nannochloropsis
- Brown algae
- Opistochonts
- Red algae
- Glaucophytes
- Cryptophytes



Les réseaux métaboliques reconstruits pour une famille de 36 macro-algues n'ont aucune cohérence phylogénétique

(Belcour et al, genome research, 2023)

Chaque lacune dans une carte est un potentiel de découverte scientifique

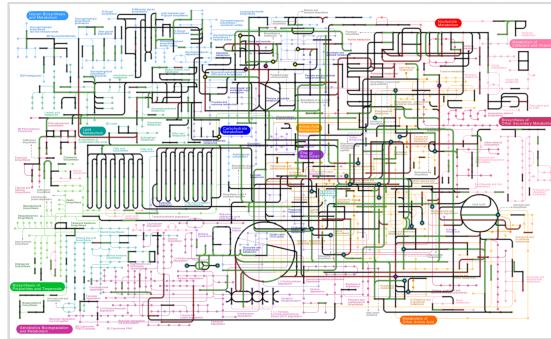


Using their fast ESMFold's language model this provides a structure for almost every cluster representative in the protein database, of which just under half of the proteins currently have an unknown functional annotation. #protein #darkmatter

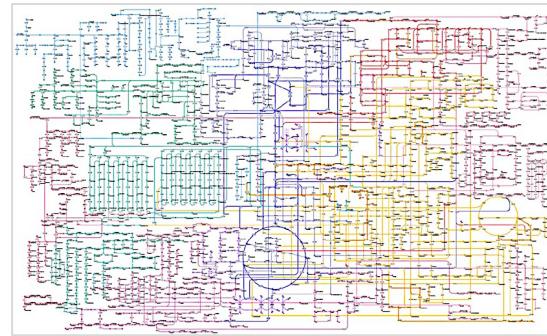
La carte reconstruite à partir du génome d'*E. siliculosus* ne pouvait produire *in silico* aucun des composés mesurés expérimentalement

(PIA IDEALG, Prigent et al, 2015)

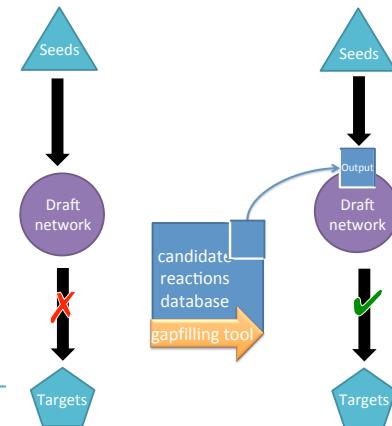
GAP-FILLING A METABOLIC NETWORK : A COMPUTATIONAL PROBLEM



Draft network (holes)



Functional network



Gap-filling problem(s)

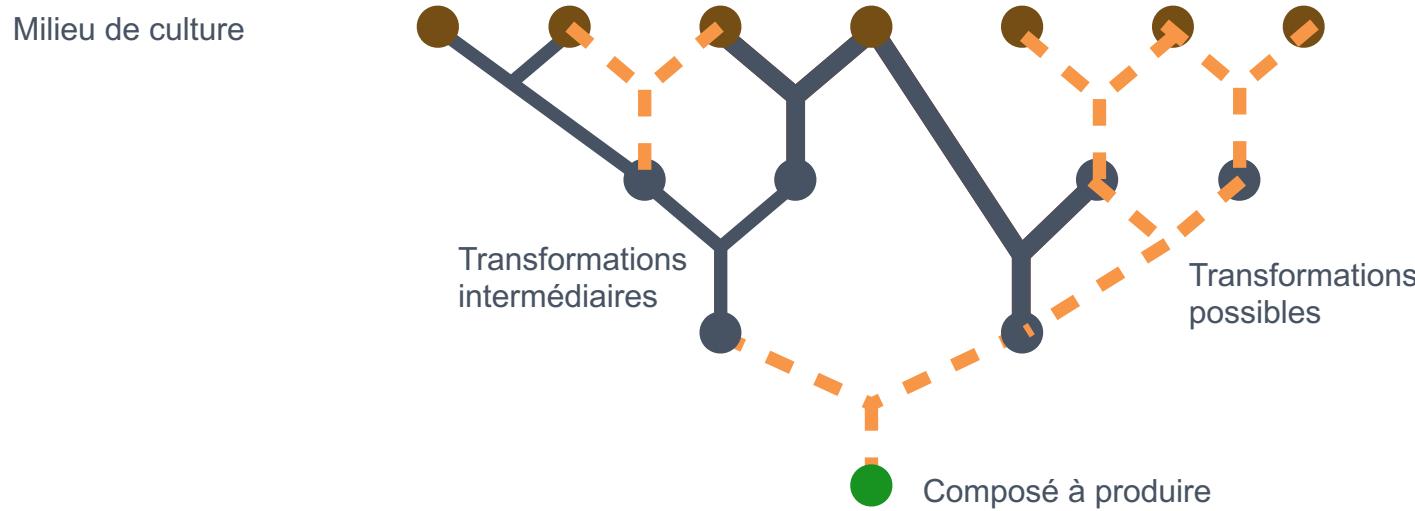
Input:

- network with non-accessible target components
- Knowledge database of possible reactions

Output

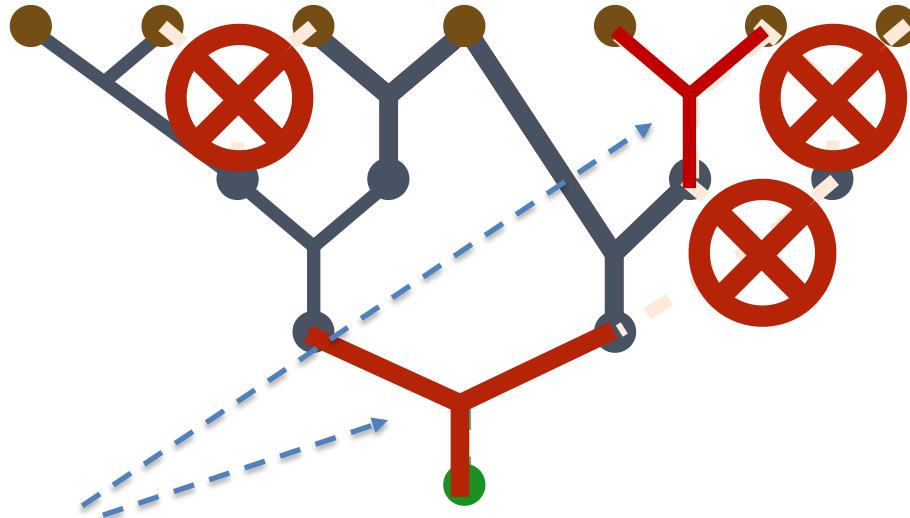
- (minimal) set of reactions restoring target accessibility

GAP-FILLING A METABOLIC NETWORK : NUTSHELL



Which reactions (orange reactions) must be added to produce the green target ?

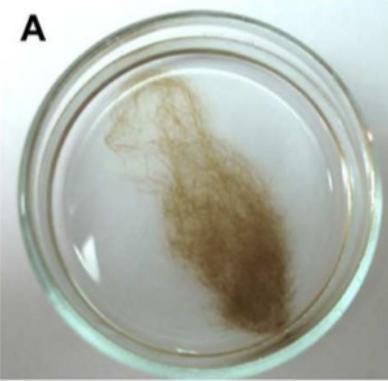
GAP-FILLING A METABOLIC NETWORK : NUTSHELL



Two reactions are sufficient

Warning: less easy if you have to take into account biological features:
cycles, co-factors, accumulations...

GAP-FILLING A METABOLIC NETWORK : NUTSHELL



***E. Siliculosus* [Plant Journal'15]**

- Metabolic network: 1785 reactions, 1981 compounds
- Flux (flow) analysis : no production of the 54 experimentally characterized molecules
- Flow-based gap-filling: add 500 reactions ???
- Unrealistic and intractable

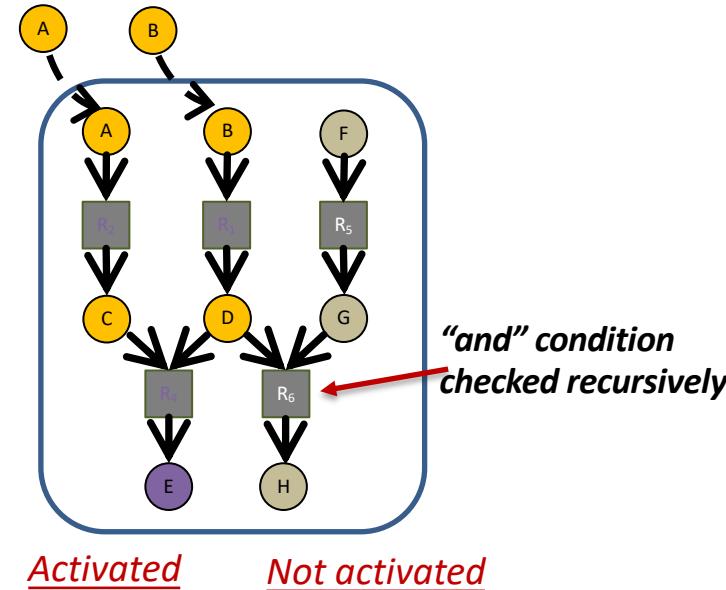
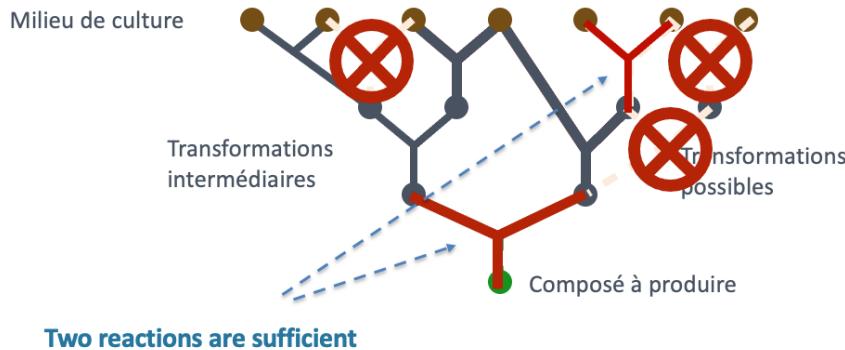
Use genomic data to deduce/predict cellular behaviors → Dead-end ?

- **Bottleneck 1** : not enough data to infer parameterized dynamical models
 - Quasi steady-state approximation – MILP problems
- **Bottleneck 2**: imprecise information about the structure of the dynamical models
 - Solve optimisation problems – Too many models (untractable)

4. Reasoning over discrete dynamical systems

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
- 4. Reasoning over discrete dynamical systems**
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

WHAT ABOUT BEING LESS PRECISE



Graph-based semantics [Handorf, Ebenhoeh, Sagot, Schaub/Thiele]

A reaction can be activated if all its substrates are

- either in the growth medium
- or the product of an activated reaction

Computation of graph-based activated reactions

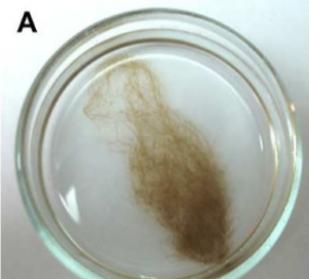
- **Easily modeled in logical programming**
- Not that easy with linear constraints (Thuillier, Roadef) or with algorithmic procedures (sagot team).

UNDERLYING DYNAMICAL SYSTEMS

The graph-based approximation corresponds to a minimal fixed-point computation in a Boolean framework (Frioux, S., 2020)

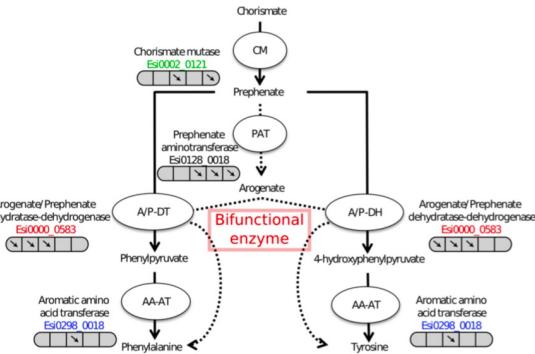
	Continuous framework (ODEs)	Discrete framework (Boolean)
Dynamics	$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = \mathbf{S} \mathbf{v}(\mathbf{M}(t))$	$\phi(\overline{m}) = \bigvee_{r \in R m \in \text{product}(r)} \bigwedge_{s \in \text{substrate}(r)} \overline{s}.$
Steady-state	$\frac{d\mathbf{M}(t)}{dt} = 0$	$\phi(\overline{m}) = \overline{m} \quad \forall m \in M$ $\phi(\overline{m}) = 1 \quad \forall m \in \text{medium}$
Side-constraints	Biomass optimisation Flux upper/lower values	Minimal number of activated nodes
Resolution framework	Linear (MILP) solving	Logical programming with appropriate negation model (ASP)

Gap-filling problem → solve a combinatorial optimisation problem



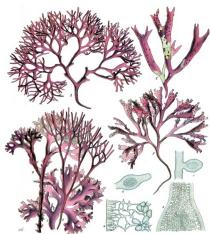
E. Siliculosus [Plant Journal'15]

- Flow-based gap-filling: untractable
- Discrete-based gap-filling solved with ASP :
→ 3500 solutions, 50 reactions to check.



Biological discovery (knowledge confrontation)

One of the holes was badly predicted... since one of the enzymes had acquired a specific function.



Towards new computer science issues: *C. Crispus* [G. Markov]

→ SMT-based approaches [TPLP'18]

A single reaction was missing (false gene-assignment due to genome-assembly)

WHAT DID WE DO ?

Describe a system by a family of abstract models

- Avoid quantitative predictions
- Reason over a family of models instead of selecting a single one

Logical knowledge representation

- Search space description

Discrete dynamical systems

- Links between multi-scale observations

Combinatorial optimisation problems

- Replace laws by combinatorial constraints

Efficiently solve optimisation combinatorial problems

```
{reaction(r)}.  
scope(M) :- seed(M).  
scope(M) :- product(M,R), reaction(R), scope(M') : reactant(M',R).  
:- target(T), not scope(T).  
#minimize{ reaction(r) }.
```

Dynamics

Steady-state

Side-constraints

Resolution framework

Discrete framework (Boolean)

$$\phi(\bar{m}) = \bigvee_{r \in R | m \in \text{product}(r)} \bigwedge_{s \in \text{substrate}(r)} \bar{s}.$$

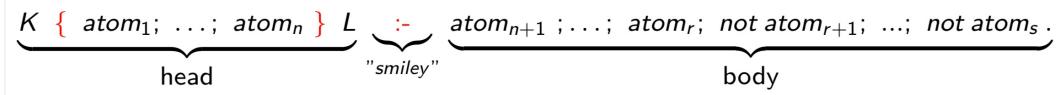
$$\phi(\bar{m}) = \bar{m} \quad \forall m \in M$$

$$\phi(\bar{m}) = 1 \quad \forall m \in \text{medium}$$

Minimal number of activated nodes

Logical programming with appropriate negation model (ASP)

ANSWER SET PROGRAMMING



High-level model language

- Propositional logics
- **Model for negation: everything is false a priori**
- **Reasoning modes:** enumeration, union, intersection of solutions
- Optimisation

Highly performant solving techniques

- SAT-based and deductive-DB technics
- Decidable: no infinite loop

Optimisation rule

#maximize{W,atom(X): condition(X),W}.

Linear constrains atoms

&sum{a1*x1;...;al*xl} <= k

WHY IS IT USEFUL ?

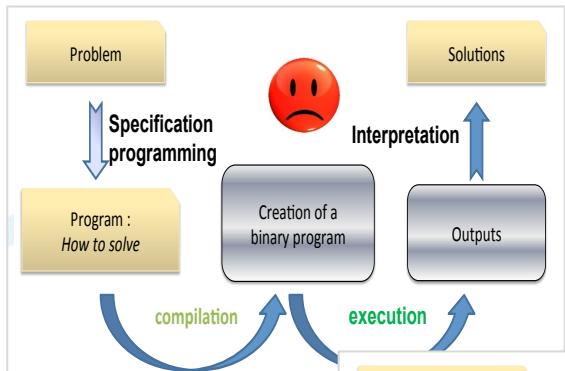
- Relevant semantics of **negation**
- **Optimisation** : parsimony hypothesis
- Enumeration mode : complete solution space
- Union reasoning mode : families of candidates
- Projection reasoning mode : what can be surely deduced from knowledge

Integrative and systems biology is a very relevant field to challenge ASP technologies

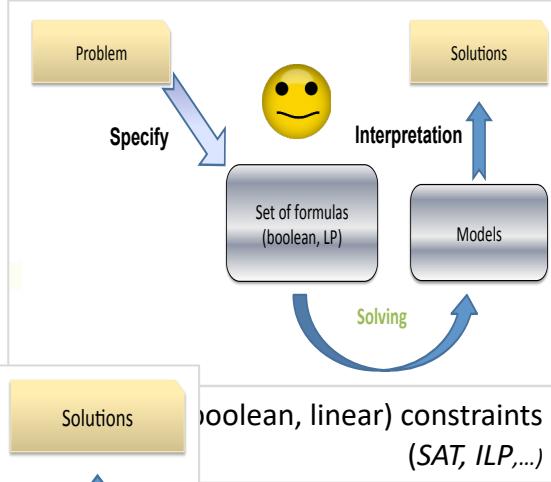
5. Knowledge representation : introduction to answer set programming

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
- 5. Knowledge representation : introduction to ASP**
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

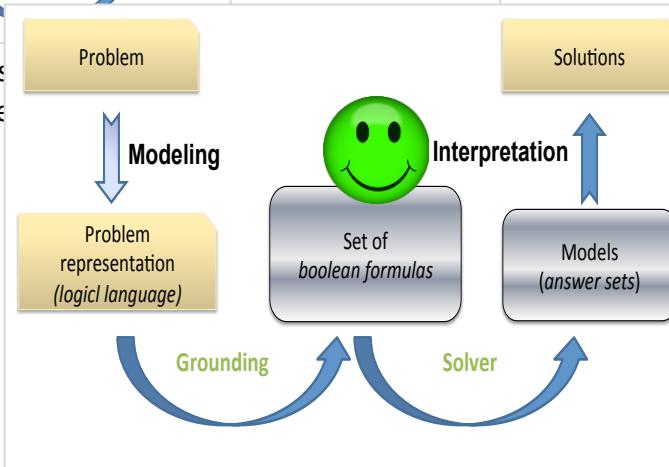
Solving combinatorial problems



Write a program which specifies what the problem should be solved



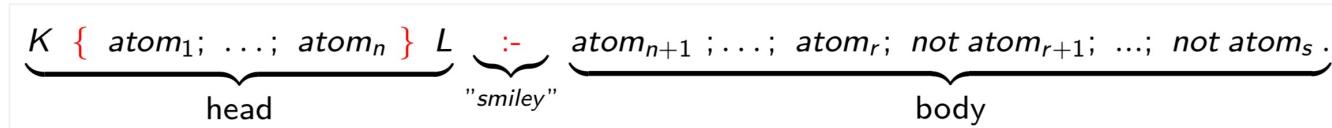
Answer set programming.
Describe what you want to solve



Declarative programming

- Problem = axioms & rules
- No need of algorithm

ASP logical rules : declarative programming



If all terms on the right side are true,
then at least K and at most L terms are true
on the left side.

If nothing on the left side,
then always false.

If nothing on the right side,
then always true.

```
:- K{atom1, .. atomN}L.
```

$K\{atom_1, \dots, atom_N\}L$.

Optimisation rule

#maximize{w,atom(x): condition(x),w}.

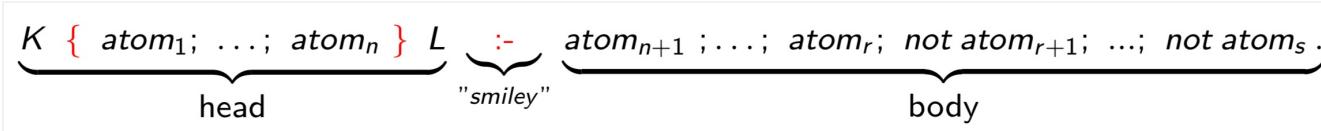
High-level model language

- Propositional logics
 - Model for negation

Highly performant solving techniques

- SAT-based and deductive-DB technics
 - Decidable: no infinite loop

ASP logical rules



```

1{murderer(ms_Scarlet); murderer(colonel_Mustard)}1.
1{weapon_of_crime(revolver); weapon_of_crime(candlestick)}1.
1{place_of_crime(kitchen); place_of_crime(hall);
place_of_crime(dining_room)}1.

crim_record(ms_Scarlet,4). crim_record(colonel_Mustard,7).

weapon_of_crime(candlestick).
:- place_of_crime(kitchen).
place_of_crime(hall) :- murderer(colonel_Mustard), not
weapon_of_crime(revolver).

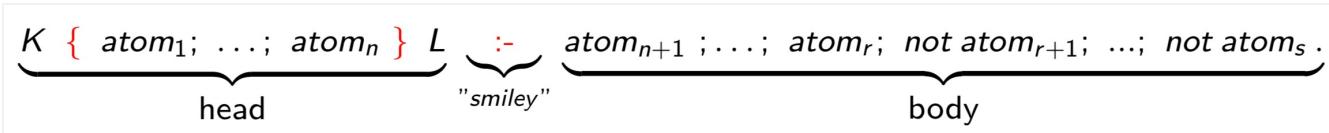
sol(X,Y,Z) :- murderer(X),weapon_of_crime(Y),place_of_crime(Z).

#show sol/3.

```

How many solutions ?

ASP logical rules



```
1{murderer(ms_Scarlet); murderer(colonel_Mustard)}1.  
1{weapon_of_crime(revolver); weapon_of_crime(candlestick)}1.  
1{place_of_crime(kitchen); place_of_crime(hall);  
place_of_crime(dining_room)}1.  
  
crim_record(ms_Scarlet,4). crim_record(colonel_Mustard,7).
```

```
weapon_of_crime(candlestick).  
:- place_of_crime(kitchen).  
place_of_crime(hall) :- murderer(colonel_Mustard), not  
    weapon_of_crime(revolver).
```

```
sol(X,Y,Z) :- murderer(X), weapon_of_crime(Y), place_of_crime(Z).
```

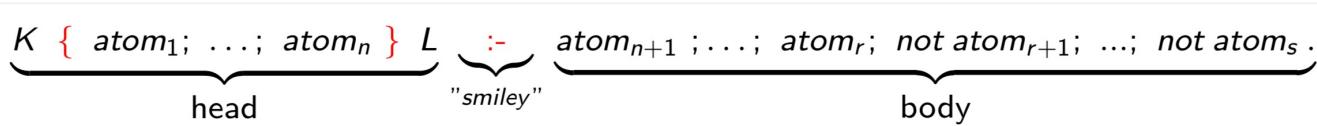
#show sol/3.

Declare what you know

What you have deduced up to now

What you look for

ASP logical rules



```

1{murderer(ms_Scarlet); murderer(colonel_Mustard)}1.
1{weapon_of_crime(revolver); weapon_of_crime(candlestick)}1.
1{place_of_crime(kitchen); place_of_crime(hall);
place_of_crime(dining_room)}1.

crim_record(ms_Scarlet,4). crim_record(colonel_Mustard,7).

weapon_of_crime(candlestick).
:- place_of_crime(kitchen).
place_of_crime(hall) :- murderer(colonel_Mustard), not
weapon_of_crime(revolver).

sol(X,Y,Z) :- murderer(X),weapon_of_crime(Y),place_of_crime(Z).

#minimize{W , sol(X,Y,Z) : sol(X,Y,Z) , crim_record(X,W) , murderer(X)}.
#show sol/3.

```

Introduce optimization rules

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).
vertex(fnr).
vertex(arcA).
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).

1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).
labelV(I,S) :- observedV(I,S).
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).

receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.

:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).
vertex(fnr).
vertex(arcA).
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).
labelV(I,S) :- observedV(I,S).
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).

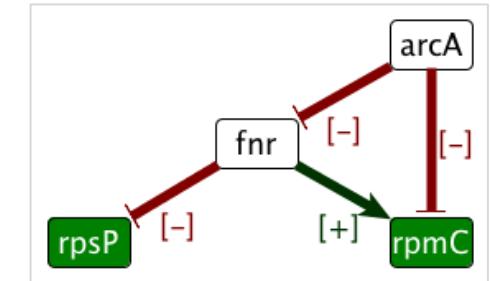
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.

:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes,
edges and signs

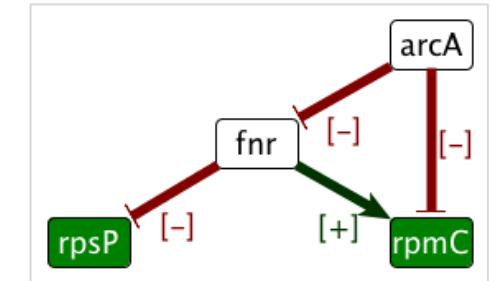


```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).  
  
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.  
  
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes,
edges and signs

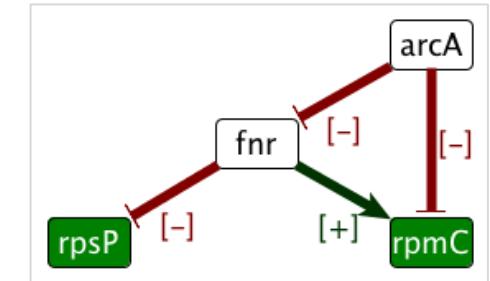


```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).  
  
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.  
  
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes, edges and signs



```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).
```

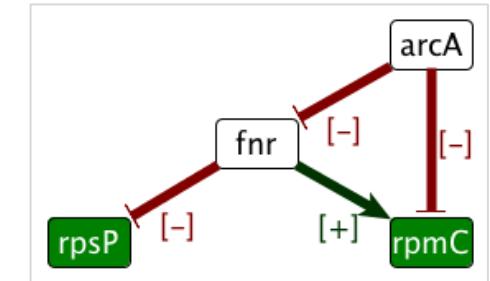
```
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.  
  
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

(2) Associate a predicted sign to each node and edge

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes, edges and signs



```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).
```

```
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.
```

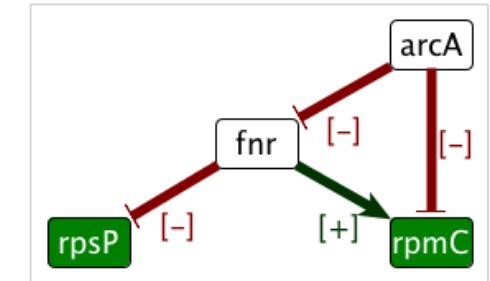
```
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

(2) Associate a predicted sign to each node and edge

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes, edges and signs



```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).
```

```
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.
```

```
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

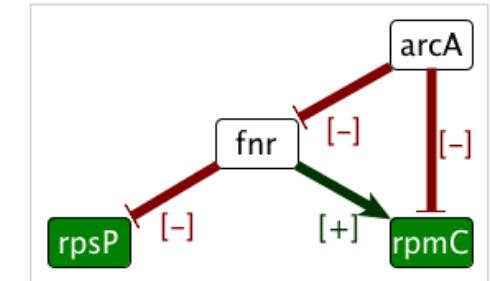
(2) Associate a predicted sign to each node and edge

(3) Dynamical propagation of the signal

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes, edges and signs



```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).
```

```
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.
```

```
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

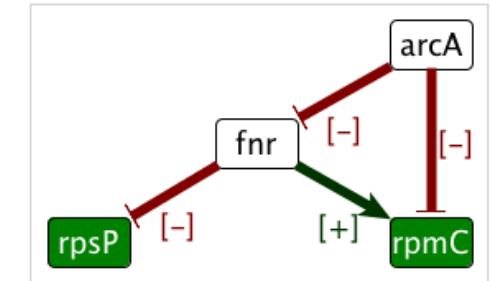
(2) Associate a predicted sign to each node and edge

(3) Dynamical propagation of the signal

Example : which rule is encoded in the following program ?

```
vertex(rpsP). observedV(rpsP,-).  
vertex(rpmC). observedV(rpmC,-).  
vertex(fnr).  
vertex(arcA).  
edge(fnr,rpsP). observedE(fnr,rpsP,-).  
edge(fnr,rpmC). observedE(fnr,rpmC,+).  
edge(arcA,fnr). observedE(arcA,fnr,-).  
edge(arcA,rpmC). observedE(arcA,rpmC,-).
```

(1) Declare nodes, edges and signs



```
1{labelV(I,+); labelV(I,-)}1 :- vertex(I).  
labelV(I,S) :- observedV(I,S).  
1{labelE(J,I,+); labelE(J,I,-)}1 :- edge(J,I).  
labelE(J,I,S) :- observedE(J,I,S).
```

```
receive(I,+):- labelE(J,I,S), labelV(J,S).  
receive(I,-):- labelE(J,I,S), labelV(J,T), S!=T.
```

```
:- labelV(I,S), not receive(I,S).
```

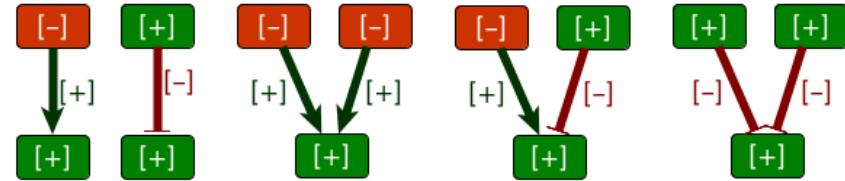
(2) Associate a predicted sign to each node and edge

(3) Dynamical propagation of the signal

(4) Ensure that propagation is consistent with prediction

Implicit dynamical rule ?

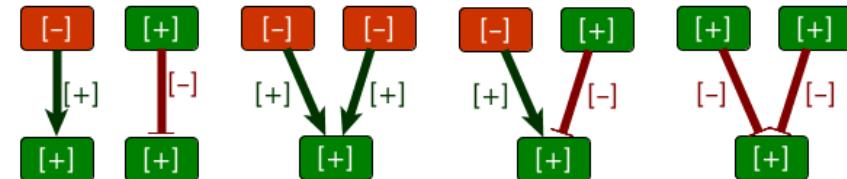
Interpretation. For each gene which does not self-induces itself, the gene expression variation must be explained by a consistent regulation from at least one predecessor.



FORBIDDEN PATTERNS: the target variation is not explained

Implicit dynamical rule ?

Interpretation. For each gene which does not self-induces itself, the gene expression variation must be explained by a consistent regulation from at least one predecessor.



FORBIDDEN PATTERNS: the target variation is not explained

Theorem. Assume that

- Specy i autoregulates itself negatively: $\frac{\partial \mathbf{F}_{X(i)}}{\partial X(i)} < -C$, $C > 0$.
 - There is no direct influence from \mathbf{P} on $X(i)$
 - When i is absent, the system produces it $\mathbf{F}_{X(i)}(\{\mathbf{X}, X(i) = 0\}) > 0$
 - For every predecessor $k \rightarrow i$, the sign of the action $\frac{\partial \mathbf{F}_{X(i)}}{\partial X(k)}$ is constant during the experimentation

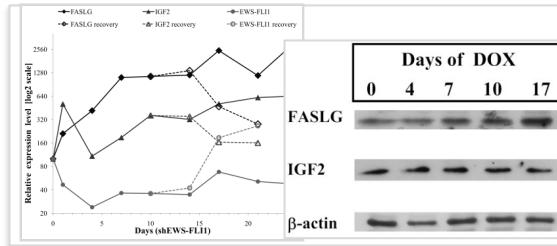
Then the variations of the species between two steady states (for different parameters) satisfy the following relationship:

$$sign(\Delta X(i)) \simeq \sum_{k \neq i, k \rightarrow i} sign\left(\frac{\partial F_{X(i)}}{\partial X(k)}\right) \times sign(\Delta X(k)).$$

Examples of application

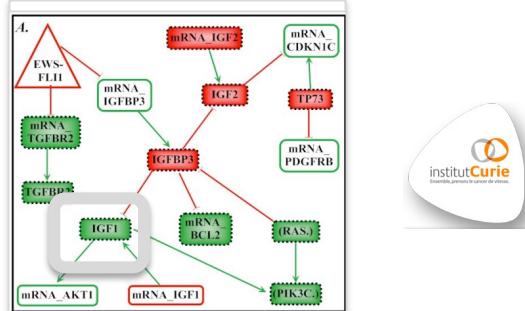
Explain and predict

- Competing effects
- Significant predictions



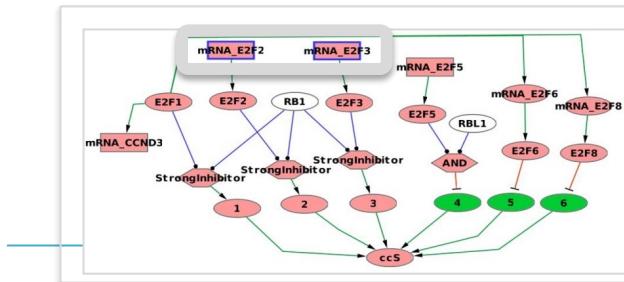
Key processes

- Incomplete IGF1- pathway



Better understanding of regulation

- Prediction of two new potential targets
- Confirmed by si-RNA



Applications

Thiele et al. BMC Bioinformatics (2015) 16:345
DOI 10.1186/s12859-015-0733-7



METHODOLOGY ARTICLE

Open Access

Extended notions of sign consistency to relate experimental data to signaling and regulatory network topologies



OPEN ACCESS Freely available online

Detecting and Removing Inconsistencies between Experimental Data and Signaling Network Topologies Using Integer Linear Programming on Interaction Graphs

Ioannis N. Melas^{1,2}, Regina Samaga^{2,3}, Leonidas G. Alexopoulos¹, Steffen Klamt^{2*}

¹ National Technical University of Athens, Athens, Greece, ² Max Planck Institute for Dynamics of Complex Technical Systems, Magdeburg, Germany

SCIENTIFIC REPORTS

OPEN

Logic programming reveals alteration of key transcription factors in multiple myeloma

Received: 29 November 2016
Accepted: 25 July 2017
Published online: 23 August 2017

Bertrand Miannay^{1,2}, Stéphane Minvielle^{2,3}, Olivier Roux¹, Pierre Drouin¹, Hervé Avet-Louiseau⁴, Catherine Guérin-Charbonnel^{2,5}, Wilfried Gouraud^{2,5}, Michel Attal⁶, Thierry Facon⁷, Nikhil C Munshi^{8,9}, Philippe Moreau^{7,3}, Loïc Campion^{2,5}, Florence Magrangeas^{2,3} & Carito Guziolowski¹

Klamt's group & Guziolowski's group

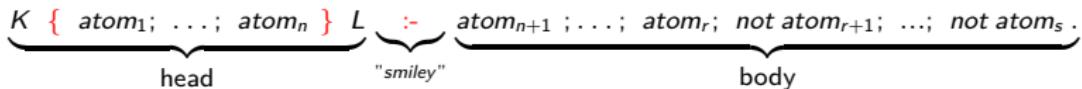
→ Discriminate patient responses from a large-scale interaction graph

6. More insights on ASP

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
- 6. More insights on ASP**
7. Back to biology towards more tricky problems
8. Still new issues

Description rapide

Règles disjonctives



- $fact_1, \dots, fact_n$ sont des atomes
 - Règle de déduction

Si tous les faits apparaissant dans le corps sont vrais, alors la tête contient entre K et L faits qui sont vérifiés.

- **Contrainte d'intégrité.** S'il n'y a pas de tête: le corps est *toujours faux*
$$\quad \quad \quad :- fact_0.$$
 - **Faits vrais.** S'il n'y a pas de corps, la tête est *toujours vraie*
$$\quad \quad \quad fact_0.$$

Les *Ensembles-réponses* sont tous les modèles valides

- Ce sont des ensembles d'atomes qui vérifient toutes les règles.
 - Tout atome d'un modèle valide apparaît dans la tête d'au moins une règle.

Who killed Mr Boddy ?

PROGRAM

```
% Specify that there is only one murder
1{murderer(ms_Scarlet);murderer(colonel_Mustard)}1.
1{weapon_of_crime(revolver);weapon_of_crime(candlestick)}1.
1{place_of_crime(kitchen);place_of_crime(hall);place_of_crime(dining-room)}1.

% Declare what you can deduce from your cards
:- place_of_crime(kitchen).
place_of_crime(hall) :- murderer(colonel_Mustard);
                           not weapon_of_crime(revolver).
weapon_of_crime(candlestick).

% Enumerate the solutions
#show murderer/1.
#show place_of_crime/1.
#show weapon_of_crime/1.
```

ANSWER SETS? Exercice

Solving...

Answer: 1

weapon_of_crime(candlestick) murderer(colonel_Mustard) place_of_crime(hall)

Answer: 2

weapon_of_crime(candlestick) murderer(ms_Scarlet) place_of_crime(dining_room)

Answer: 3

weapon_of_crime(candlestick) murderer(ms_Scarlet) place_of_crime(hall)

SATISFIABLE

ASP: Principe généraux à retenir

Approche déclarative pour la résolution de problèmes combinatoires de complexité NP
"What instead of How?"

APPROCHE DÉCLARATIVE

Modélisation du problème à résoudre sous formes d'axiomes et de contraintes exprimées dans un langage logique.

POURQUOI CE NOM ?

Les modèles logiques solutions de l'ensemble de formules, les ensembles réponses, sont les résultats du programme.

PRINCIPE

Des solveurs associés effectuent la recherche d'une, de plusieurs, ou de l'ensemble des solutions.

Un peu plus précisément

Langage de modélisation à haut-niveau

expressivité: $\text{ASP} \simeq \text{Prolog}$

- LOGIQUE PROPOSITIONNELLE

→ *On ne peut travailler que sur un ensemble fini d'atomes.*

- NÉGATION : formalisme élégant (monde clos).

→ *Un prédicat est faux tant qu'aucune indication ne permet de dire qu'il est vrai.*

Capacité de résolution de problèmes très élevée

$\text{ASP} \simeq \text{SAT}, \text{ILP}$

- DÉCIDABLE techniques de résolution SAT

→ *Pas de réécriture de programmes*

→ L'ordre des clauses n'a pas d'impact

→ **PAS DE BOUCLE INFINIE** dans la résolution

- OPTIMISATION, raisonnement flexible (préférences), solveurs hybrides.

Une spécificité très utile en biologie moléculaire et bioinformatique

Différents modes de raisonnements

Déduire différents types d'information biologique

- **ENUMÉRATION** des solutions à un problème (`clingo cluedo.lp -n 0`)
→ **Variabilité** et taille de l'espace des modèles possibles
- **INTERSECTION** (cautious reasoning) des atomes présents dans toutes les solutions (`clingo cluedo.lp --enum-mode=cautious`)
→ **Déductions robustes** des données et connaissances
- **UNION** (brave reasoning) des atomes présents dans toutes les solutions (`clingo cluedo.lp --enum-mode;brave`)
→ Espace des **déductions possibles**

Programmation par ensembles-réponses: d'un point de vue concret

Syntaxe: Termes

CONSTANTE : entier, mot de {a-z, A-Z, 0-9, _ }*

→ débute par une **MINUSCULE**. porquerolles jean-Paul.Comet

VARIABLE : mot de {a-z, A-Z, 0-9, _ }*

→ débute par une **MAJUSCULE**. Lieu Organisateur

FONCTION

- de la forme *constante(terme, ..., terme)*
- inclut les opérateurs : a+b
- inclut la notation de liste. L=[a,b,c]=[a|U], U =[b,c]

Question: Cout(Repas(Participants,Jour),nuits(participants,jour))*5 est-il valide ?

Réponse: cout(repas(Participants,Jour),nuits(Participants,Jour))*5

LITTERAL

- **Négation** not q
- **Calculs** X<Y U!=V X+Y<5

Syntaxe: Termes

CONDITION

TailleMin { atome1 : domaine_validite1 ; atome2 : domaine_validite2 } TailleMax

- On construit l'ensemble des atomes1 et atomes 2 qui vérifient toutes les conditions de validité.
- On isole tous les sous-ensembles de taille qui contiennent entre *TailleMin* et *TailleMax* atomes valides.

25{chambreSimple(X) :particip(X) ; chambreDouble(Y,Z) :particip(Y),particip(Z)}30

→ Sous-ensembles de 25 à 30 chambres simples ou doubles qui hébergent des participants.

5 { chambreSimple(X) : participant(X) ; dureeSejour(X)=DureeMax } 8

→ Sous-ensembles de 5 à 8 chambres simples qui hébergent des participants dont la durée du séjour est égale à la constante DureeMax.

Exemple

Variables

% Declare what you are playing with

```
place(kitchen; hall; diningroom).  
weapon(revolver; candlestick).  
character(colonel_Mustard;ms_Scarlet).
```

% Specify that there is only one murder

```
1{murderer(X):character(X)}1.
```

→ Le grounder (gringo cluedo.lp -t) va instancier cette clause en 1{murderer(ms_Scarlet)
; murderer(colonel_Mustard)}1.

```
1{weapon_of_crime(X):weapon(X)}1.
```

→ grounding: 1{weapon_of_crime(revolver) ; weapon_of_crime(candlestick)}1.

```
1{place_of_crime(X):place(X)}1.
```

→ grounding:

```
1{place_of_crime(kitchen);place_of_crime(hall);place_of_crime(dining-room)}1.
```

Syntaxe: Termes

$1\{bouchanourrirs(X) : perso(X)\}2$

→ sous-ensemble de taille 1 à 2 de l'ensemble des atomes $bouchanourrirs(X)$ qui sont vrais, où X est une variable dans le domaine défini par le prédictat $perso$.

Sans indication supplémentaire sur les prédictats $bouchanourrirs$ et $perso$, ce terme est strictement équivalent à

$1\{r(X) : q(X)\}2$

$2\{r(U) : q(U)=U \ ; \ s(V) : t(V)=2\}$

→ Sous-ensemble de taille au moins 2 de l'ensemble composé

- des $r(U)$ vrais pour lesquels U est tel que $q(U) = U$,
- ET de l'ensemble des $s(V)$ vrais pour lesquels V est tel que $t(V) = 2$.

Syntaxe: Clauses

FAITS $p(2, a)$.

→ $p(2, a)$ est vrai.

RÈGLE $q(X) \Leftarrow p(X, Y) ; q(Y)$.

→ Si $p(X, Y)$ est vrai et $q(Y)$ est vrai, alors $q(X)$ est vrai aussi.

CONTRAINTE $\Leftarrow q(2)$.

→ $q(2)$ est faux.

$\Leftarrow p(X) ; q(X)$.

→ Le prédicat " $p(X)$ et $q(X)$ " est faux.

OPTIMISATION

```
#minimize{Score , ensembleDeRecherche(X,...,Z) : ensembleDeRecherche(X,...,Z) ,
constrainte1(X,...,Z) , constrainte2(X,...,Z) ,
constrainteVariablesScore(X,...,Z,Score) ,
```

SORTIES

```
#show p(X). #show p/1. #show s(X):r(X).
```

Le /1 désigne l'arité de p. p/1 est équivalent à $p(X)$

Exemple optimisation

```
place(kitchen; hall; diningroom).
weapon(revolver; candlestick).
character(colonel_Mustard;ms_Scarlet).
1{murderer(X):character(X)}1.
1{weapon_of_crime(X):weapon(X)}1.
1{place_of_crime(X):place(X)}1.
:- place_of_crime(kitchen).
place_of_crime(hall) :- murderer(colonel_Mustard) ;
                           not weapon_of_crime(revolver).
weapon_of_crime(candlestick).

sol(X,Y,Z) :- murderer(X) ; weapon_of_crime(Y) ; place_of_crime(Z).
criminal_record(colonel_Mustard,20). criminal_record(ms_Scarlet,18).
number_previous_crime(hall,8). number_previous_crime(dining_room,6).
number_previous_crime(kitchen,2).

#show sol/3. #show murderer/1. #show place_of_crime/1. #show weapon_of_crime/1.

Answer: 1
weapon_of_crime(candlestick) murderer(ms_Scarlet) place_of_crime(dining_room) sol(ms_Scarlet,candlestick,dining_room)
Answer: 2
weapon_of_crime(candlestick) place_of_crime(hall) murderer(ms_Scarlet) sol(ms_Scarlet,candlestick,hall)
Answer: 3
weapon_of_crime(candlestick) place_of_crime(hall) murderer(colonel_Mustard) sol(colonel_Mustard,candlestick,hall)
```

Question: écrire une règle qui permet de caractériser les solutions de poids minimal?

Synthaxe

```
#minimize{W , sol(X,Y,Z) : sol(X,Y,Z) , criminal_record(X,W) ,
          character(X) , place(Z) , weapon(Y)}.
```

```
(clingo cluedo.lp --opt-mode=optN)
```

```
Answer: 1
weapon_of_crime(candlestick) place_of_crime(hall)
murderer(ms_Scarlet)
sol(ms_Scarlet,candlestick,hall)
Optimization: 3
Answer: 2
weapon_of_crime(candlestick) murderer(ms_Scarlet)
sol(ms_Scarlet,candlestick,dining_room)
place_of_crime(dining_room)
Optimization: 3
OPTIMUM FOUND
```

Exercice 1

Données : nombre de minutes que doit mettre un taxi pour joindre un client

```
cout(taxi1,client1,10).  cout(taxi2,client1,8).
cout(taxi3,client1,12).  cout(taxi1,client2,11).
cout(taxi2,client2,15).  cout(taxi3,client2,13).
cout(taxi1,client3 ,7).  cout(taxi2,client3 ,7).
cout(taxi3,client3,10).
```

Dérivation d'un graphe : comment identifier les taxis et les clients ?

```
taxi(T):- cout(T,_,_).  client(T):- cout(_,T,_).
```

Caractéristiques d'une solution

Exercice: introduire des clauses pour définir le prédictat sol(Taxi, Client) qui affecte un taxi par client et un client par taxi

Exercice 1

Données : nombre de minutes que doit mettre un taxi pour joindre un client

```
cout(taxi1,client1,10).  cout(taxi2,client1,8).
cout(taxi3,client1,12).  cout(taxi1,client2,11).
cout(taxi2,client2,15).  cout(taxi3,client2,13).
cout(taxi1,client3 ,7).  cout(taxi2,client3 ,7).
cout(taxi3,client3,10).
```

Dérivation d'un graphe : comment identifier les taxis et les clients ?

```
taxi(T):- cout(T,_,_).  client(T):- cout(_,T,_).
```

Caractéristiques d'une solution

Exercice: introduire des clauses pour définir le prédictat sol(Taxi, Client) qui affecte un taxi par client et un client par taxi

```
1{sol(X,Y):taxi(X)}1:- client(Y).
1{sol(X,Y):client(Y)}1:- taxi(X).
```

Optimisation

Exercice: minimiser le coût d'affectation ?

```
#minimize { Temps, sol(Taxi, Client):  sol(Taxi, Client), cout(Taxi, Client, Temps) } .
```

.... généralisable à de nombreux problèmes de graphes.

Modélisation de la négation

Ensemble-réponse = solutions données par le programme

- Un ensemble réponse contient des atomes se trouvant dans au moins une tête de règle du programme.
- Tout élément d'un ensemble réponse est supporté par une règle.
- Tout ce qui n'est pas prouvé par un fait est considéré comme faux !
- Logique non monotone: rajouter des faits à une théorie peut faire réduire l'ensemble de conclusions.

Exemple 1

PROGRAMME

```
a :- b;p;q.  
b :- q.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE DU PROGRAMME ?

L'ensemble-réponse du programme est l'ensemble vide \emptyset

→ Le programme ne contient que des implications, et rien n'est "vrai".

Tout ce qui n'est pas prouvé par un fait est considéré comme faux!

Exemple 2

Programme

```
a :- b;p;q.  
b :- q.  
q.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

L'ensemble réponse du programme est {b,q}

→ On n'a pas gardé *p* puisqu'on n'a aucune preuve de *p*.

Les atomes d'un ensemble-réponse d'un programme positif apparaissent dans la tête d'au moins une règle

Exemple 3

```
p:- p.  
q:- not p.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

Ensembles-réponses ? {q}

(Par défaut, p est considéré comme faux !)

Exemple 4

```
p:- not q.  q:- not p.  
p:- not q.  
q:- not p.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

Ensembles-réponses ? {p}, {q}

(Si p est faux, on obtient une preuve de q, et inversement, donc deux solutions)

Exemple 5

```
p:- not p.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

Ensembles-réponses ? Aucun: il n'y a pas d'ensemble stable !

A RETENIR

**Un ensemble réponse contient des atomes se trouvant dans une tête de règle du programme.
Tout élément d'un ensemble réponse est supporté par une règle.**

LOGIQUE NON MONOTONE Rajouter des faits à une théorie peut faire réduire l'ensemble de conclusions.

Exemple 6

```
a :- b ; not q.  
b:- p ; q.  
p.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

Exemple 6

```
a :- b ; not q.  
b:- p ; q.  
p.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

Ensembles-réponses ? C'est p. (puisque'on n'a pas de preuve de b pour déduire a...)

CALCUL EFFECTIF

- **On réduit le programme par rapport à { q } (=on enlève les règles dans lesquelles { q })** apparaît avec une négation

```
b:- p; q.  
p.
```

- **Exercice: calculer le réduit du programme par rapport à { a } , { b } , { p }**

```
a :- b.  
b:- p; q.  
p.
```

Exemple 7 : contrainte d'intégrité vs règle de déduction

RAPPEL DE MATH " $A \implies B$ " est équivalent à vérifier que la formule B ou $\text{not}A$ est vraie
Ce qui est équivalent à vérifier que la formule $\text{not}B$ et A est fausse.

Et en ASP ? Comparer les deux programmes

```
b :- a.  
a.  
  
:- not b; a.  
a.
```

Exemple 7 : contrainte d'intégrité vs règle de déduction

RAPPEL DE MATH " $A \implies B$ " est équivalent à vérifier que la formule B ou $\text{not } A$ est vraie
Ce qui est équivalent à vérifier que la formule $\text{not } B$ et A est fausse.

Et en ASP ? Comparer les deux programmes

```
b :- a.  
a.
```

Solution : a. b.

Règle de déduction. Puisque a est vrai,
alors b est vrai.

```
:- not b; a.  
a.
```

Solution : insatisfiable.

Contrainte d'intégrité : on ne peut pas déduire b puisque qu'on n'a aucune preuve de b (qui n'apparaît dans aucune tête de règle). Mais si vrai est faux alors "not b; a" est vérifié et cela n'est pas autorisé.

Conclusion : modélisation de la négation

Ensemble-réponse = solutions données par le programme

- Un ensemble réponse contient des atomes se trouvant dans au moins une tête de règle du programme.
- Tout élément d'un ensemble réponse est supporté par une règle.
- Tout ce qui n'est pas prouvé par un fait est considéré comme faux !
- Logique non monotone: rajouter des faits à une théorie peut faire réduire l'ensemble de conclusions.

Exercice

Question : que veut dire ?

`:= {proprieteLambda(U+1):conditionQuelconque(U)} M ; domaineValidite(M).`

- **Il est faux d'avoir :**

si M qui vérifie le prédicat `domaineValidite`,

il existe un ensemble contenant au plus M atomes vrais de la forme `proprieteLambda(U+1)`, où U vérifie le prédicat `conditionQuelconque`.

- **Autre formulation:**

Pour tout M qui vérifie `domaineValidite`,

le prédicat `proprieteLambda(U+1)` est vrai au moins $M + 1$ fois lorsqu'on parcours les U qui vérifient `conditionQuelconque`.

- **Encore une autre formulation:**

Pour tout M qui vérifie `domaineValidite`,

il y a au moins $M + 1$ valeurs de U qui vérifie `conditionQuelconque` et qui sont telles que `proprieteLambda(U+1)` est vraie.

→ *Introduction de quantificateurs...*

Nouvelle question : que veut dire ?

`:= {r(U+1):q(U)}M ; p(M).`

Généralisation

Question : proposer des reformulations de la règle suivante

```
:‐ not {proprieteLambda(U+1):conditionQuelconque(U)}M ; domaineValidite(M).
```

- Il est faux d'avoir :

si M vérifie le prédicat `domaineValidite`,

il n'existe pas d'ensemble contenant au plus M atomes vrais de la forme
`proprieteLambda(U+1)`,

où U vérifie le prédicat `conditionQuelconque`,

Généralisation

Question : proposer des reformulations de la règle suivante

```
:- not {proprieteLambda(U+1):conditionQuelconque(U)}M ; domaineValidite(M).
```

- **Il est faux d'avoir :**

si M vérifie le prédicat `domaineValidite`,

il n'existe pas d'ensemble contenant au plus M atomes vrais de la forme `proprieteLambda(U+1)`,

où U vérifie le prédicat `conditionQuelconque`,

- **Autre formulation:**

si M vérifie `domaineValidite`,

le prédicat `proprieteLambda(U+1)` est vrai au plus M fois

lorsqu'on parcours les U qui vérifient `conditionQuelconque`.

- **Encore une autre formulation:**

Pour tout M qui vérifie `domaineValidite`,

il y a au plus M valeurs de U qui vérifie `conditionQuelconque` et qui sont telles que `proprieteLambda(U+1)` est vraie.

Introduction de nouveaux quantificateurs et du concept de "au moins"...

Exercice 2

Proposer un programme ASP pour modéliser le système suivant

Le métabolisme du lactose chez Escherichia coli nécessite la présence de 3 enzymes: la β -galactosidase LacZ, la perméase LacY et la transacetylase LacA. La perméase LacY transporte le lactose de l'extérieur de la cellule à l'intérieur du milieu cellulaire. LacZ hydrolyse le lactose interne en glucose et en allolactose. Les protéines LacY et LacZ sont sous contrôle direct d'un inhibiteur appelé LacI. Inversement, un complexe formé d'AMP cyclique et de la protéine CRP (cAMP – CRP) agit sur l'activité des ARN-polymérases et permet d'activer fortement la transcription de LacY et LacZ. Le glucose inhibe la production d'AMP cyclique. Enfin, l'allolactose a une action inhibitrice sur LacI via la formation d'un complexe.

Exercice 2

- ① Ecrire un programme pour l'opéron-lactose qui prédit les enzymes, métabolites, autres molécules présentes dans le système en fonction de la présence ou non de LacI, LacA, LacZ et du lactose externe.
- ② Quelle est la différence entre les deux codages suivants pour décrire le lien entre LacI et LacY
 - `:– enzyme(lacI), enzyme(lacY).` (contrainte d'intégrité)
 - `enzyme(lacY) :- not enzyme(lacI).` (règle de déduction)

(Début de solution de l') Exercice

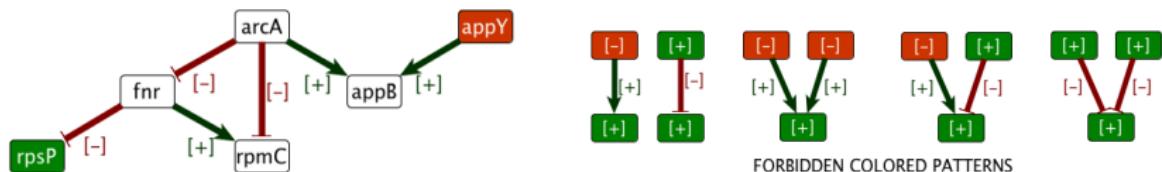
```
%enzyme(lacI).  
enzyme(lacZ).  
%enzyme(lacY).  
%enzyme(lacA).  
metabolite(lactoseExterne).  
metabolite(lactoseInterne) :- enzyme(lacY) ; metabolite(lactoseExterne).  
metabolite(allolactose) :- enzyme(lacZ) ; metabolite(lactoseInterne).  
metabolite(glucose) :- enzyme(lacZ) ; metabolite(lactoseInterne).  
  
%:- enzyme(lacI), enzyme(lacY).  
    (Intégrité: si lacI et lacY sont présents, le système est incompatible)  
enzyme(lacY) :- not enzyme(lacI).  
    (règle: si lacI est absent, alors lacY est présent)  
  
:- enzyme(lacI), enzyme(lacZ).  
enzyme(lacZ):- compound(ampcyc) ; proteine(crp).  
enzyme(lacY):- compound(ampcyc) ; proteine(crp).  
:- compound(ampcyc) ; metabolite(glucose).  
:- metabolite(allolactose) ; enzyme(lacI).  
#show enzyme/1.  
#show metabolite/1.  
#show compound/1.
```

Le codage des règles est très sensible à ce que nous voulons exprimer et peut changer tous les résultats !

Application réelle

Contrainte sur la coloration de graphes

Expliquer l'expression de chaque gène cible par la régulation consistante d'au moins une source.



Exercice

Ecrire un programme qui vérifie que le modèle est inconsistante ou, s'il est consistant, qui donne les prédictions existantes

Suite

Déclarer les signes, sommets, observations des sommets, aretes avec leurs observations.

Les observations sur les arêtes permettent de déclarer des arêtes.

Le terme `predictedV(I,S)` spécifie que chaque sommet a exactement un signe prédit par la méthode.

Les prédictions sur les sommets sont compatibles avec les observations si elles existent.

Un sommet reçoit une influence positive si le signe d'un de ses régulateurs est égal au signe de l'interaction correspondante

Un sommet reçoit une influence négative d'un de ses régulateurs est opposé au signe de l'interaction correspondante

Pour tout sommet I qui a au moins un régulateur dans le graphe, si I est prédit comme étant de signe S , alors I doit recevoir une influence de signe S d'un de ses régulateurs

(1) On caractérise les sommets sans prédecesseurs

(2) Pour modéliser le "quelque soit", on exprime le fait que la contraposée est fausse

Afficher les prédictions sur les sommets

Suite

Déclarer les signes, sommets, observations des sommets, aretes avec leurs observations.

```
signe(down;up).
vertex(rpsP;fnr;arcA;rpmC;appY;appB).
observedV(rpsP,up).
observedV(appY,down).
observedE(fnr,rpsP,down). observedE(fnr,rpmC,up).
observedE(arcA,fnr,down). observedE(arcA,rpmC,down).
observedE(arcA,appB,up). observedE(appY,appB,up).
```

Les observations sur les arêtes permettent de déclarer des arêtes.

```
edge(I,J) :- observedE(I,J,S); signe(S).
```

Le terme predictedV(I,S) spécifie que chaque sommet a exactement un signe prédit par la méthode.

```
1predictedV(I,S):signe(S)1 :- vertex(I).
```

Les prédictions sur les sommets sont compatibles avec les observations si elles existent.

```
predictedV(I,S) :- observedV(I,S).
```

Un sommet reçoit une influence positive si le signe d'un de ses régulateurs est égal au signe de l'interaction correspondante

```
influenced(I,up) :- observedE(J,I,S); predictedV(J,S); signe(S).
```

Un sommet reçoit une influence négative d'un de ses régulateurs est opposé au signe de l'interaction correspondante

```
influenced(I,down) :- observedE(J,I,T); predictedV(J,S) ; T!=S.
```

Pour tout sommet *I* qui a au moins un régulateur dans le graphe, si *I* est prédit comment étant de signe *S*, alors *I* doit recevoir une influence de signe *S* d'un de ses régulateurs

(1) On caractérise les sommets sans prédecesseurs

```
sansPredecesseur(I):- vertex(I); \edge(J,I):vertex(J)0.
```

(2) Pour modéliser le "quelque soit", on exprime le fait que la contraposée est fausse : il est faux d'avoir au moins un couple (*I, S*) tel que *I* a un régulateur, *I* est prédit comme ayant le signe *S* et *I* ne reçoit pas une influence de signe *S*.

```
:- vertex(I); signe(S); predictedV(I,S); not influenced(I,S); not sansPredecesseur(I).
```

Afficher les prédictions sur les sommets

```
#show predictedV/2.
```

Application

ENUMERATION

```
clingo consistance.lp -n 0
```

Answer: 1
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) **predictedV(appB,up)**
predictedV(rpmC,down) predictedV(arcA,up) predictedV(fnr,down)
Answer: 2
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) **predictedV(appB,down)**
predictedV(rpmC,down) predictedV(arcA,up) predictedV(fnr,down)
SATISFIABLE

INTERSECTION DES SOLUTIONS : CE QUI EST CERTAINEMENT DÉDUIT

```
clingo consistance.lp --enum-mode=cautious
```

Cautious consequences:
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) predictedV(rpmC,down)
predictedV(arcA,up) predictedV(fnr,down)
SATISFIABLE

UNION DES SOLUTIONS: GROUPER TOUT CE QUI PEUT ÊTRE DÉDUIT

```
./clingo consistance.lp --enum-mode;brave
```

Brave consequences:
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) **predictedV(appB,up)**
predictedV(appB,down) predictedV(rpmC,down) predictedV(arcA,up)
predictedV(fnr,down)
SATISFIABLE

Extensions

PROGRAMME POUR TROUVER UNE COLORATION QUI CONTIENT LE PLUS DE SIGNE “-” POSSIBLES ?

```
poids(up,0).  
poids(down,10).  
#maximize {T, predictedV(I,S): poids(S,T), predictedV(I,S), vertex(I), signe(S)}.
```

CONCRÈTEMENT. On recherche tous les modèles optimaux avec

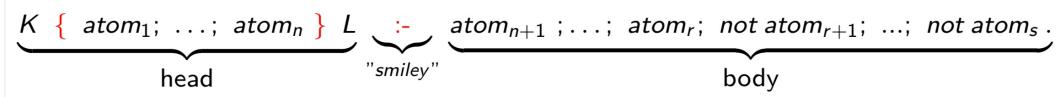
clingo programme.lp --opt-mode=optN

```
Solving...  
Answer: 1  
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) predictedV(fnr,down) predictedV(arcA,up) predictedV(rpmC,down)  
predictedV(appB,down)  
Optimization: -20  
Answer: 2  
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) predictedV(fnr,down) predictedV(arcA,up) predictedV(rpmC,down)  
predictedV(appB,up)  
Optimization: -30  
Answer: 1  
predictedV(appY,down) predictedV(rpsP,up) predictedV(fnr,down) predictedV(arcA,up) predictedV(rpmC,down)  
predictedV(appB,up)  
Optimization: -30  
OPTIMUM FOUND  
  
Models : 3  
Optimum : yes  
Optimization : -30
```

LECTURE DE LA SORTIE

- Le solveur cherche l'optimum (Answer:1 ... Answer: 2) jusqu'à trouver la bonne valeur optimale (-30).
- Ensuite, le solveur recommence sa recherche et énumère toutes les solutions dont le score prend cette valeur optimale (Answer:1 ... OPTIMUM FOUND)

ANSWER SET PROGRAMMING



High-level model language

- Propositional logics
- **Model for negation: everything is false a priori**
- **Reasoning modes:** enumeration, union, intersection of solutions
- Optimisation

Highly performant solving techniques

- SAT-based and deductive-DB technics
- Decidable: no infinite loop

Optimisation rule

#maximize{W,atom(X): condition(X),W}.

Linear constraints atoms

&sum{a1*x1;...;al*xl} <= k

Problem statement & modelling



Solving heuristics & problem reformulation

ASP programs never scale...
... until they do scale thanks to specific heuristics

- Repair large-scale interaction graph with **branch and bound** [KR'10]
- Scale metabolic network gap-filling problem with **unsatisfiable core** [LPNMR'13]
- Design experiments with **incremental solving** [Frontiers'15]
- Implement and benchmark **constraints propagators** [TPLP'18]

7. Back to biology & more tricky problems

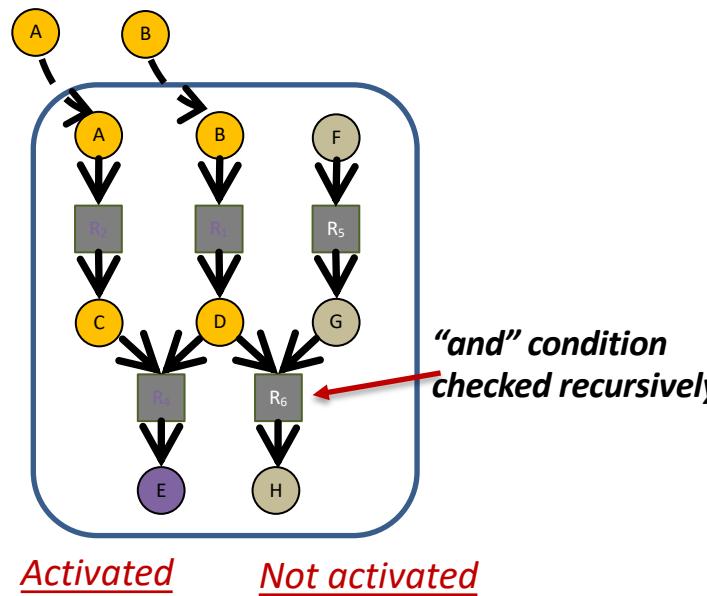
1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
- 7. Back to biology towards more tricky problems**
8. Still new issues

COMING BACK TO METABOLISM

Graph-based semantics [Handorf, Ebenhoeh, Sagot, Schaub/Thiele]

A reaction can be activated if all its substrates are

- either in the growth medium
- or the product of an activated reaction



From dynamics to reasoning:
characterize metabolite production

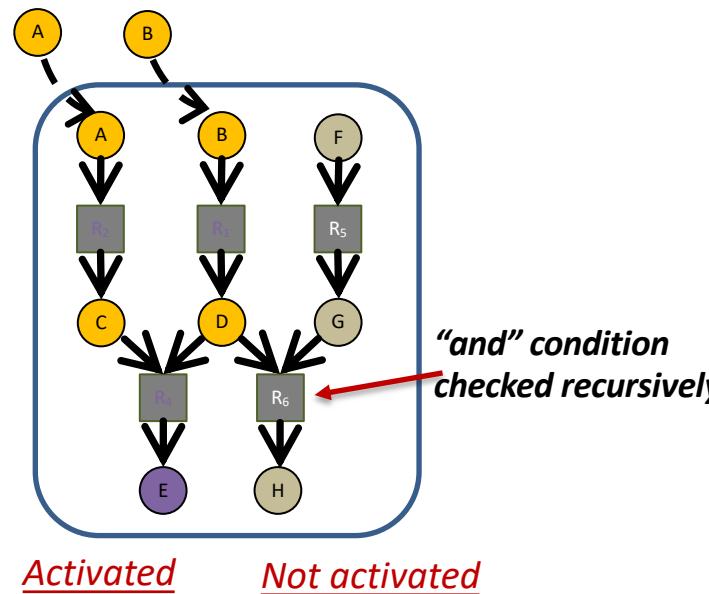
Solve the gap-filling problem

COMING BACK TO METABOLISM

Graph-based semantics [Handorf, Ebenhoeh, Sagot, Schaub/Thiele]

A reaction can be activated if all its substrates are

- either in the growth medium
- or the product of an activated reaction

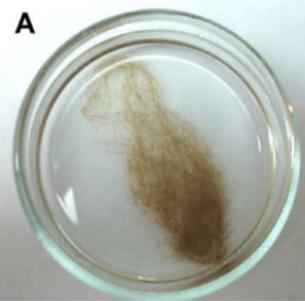


From dynamics to reasoning:
characterize metabolite production

```
scope(M) :- seed(M).
scope(M) :- product(M,R), reaction(R), scope(M') : reactant(M',R).
```

Solve the gap-filling problem

```
{reaction(r)}.
scope(M) :- seed(M).
scope(M) :- product(M,R), reaction(R), scope(M') : reactant(M',R).
:- target(T), not scope(T).
#minimize{ reaction(r) }.
```

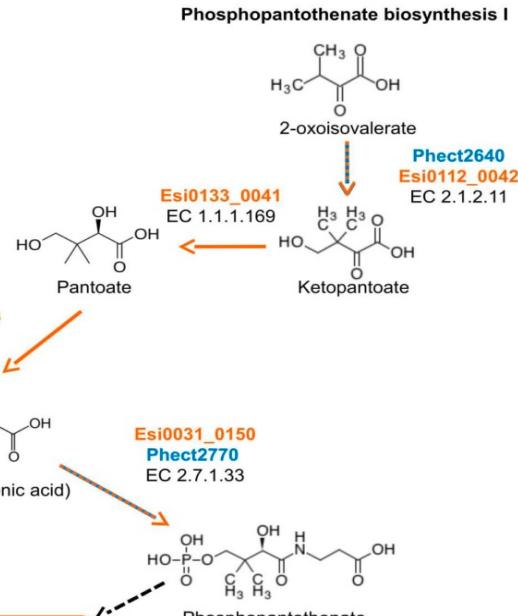
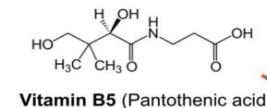
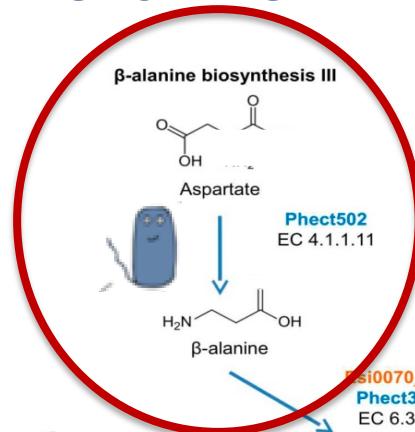
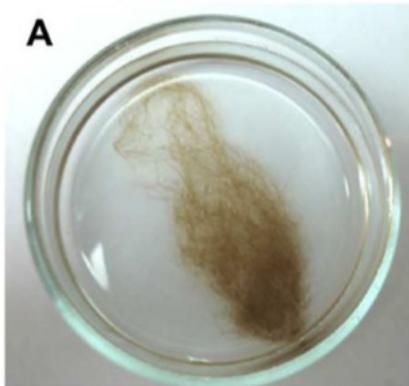


E. *Siliculosus* [Plant Journal'15]

- Flow-based gap-filling: untractable
- Discrete-based gap-filling solved with ASP (union mode) :
→ 3500 solutions, 50 reactions to check (union reasoning mode).

THE METABOLIC MAP HAD NEW SECRETS

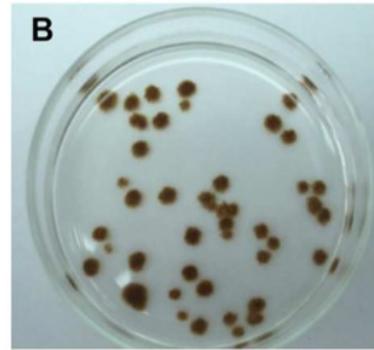
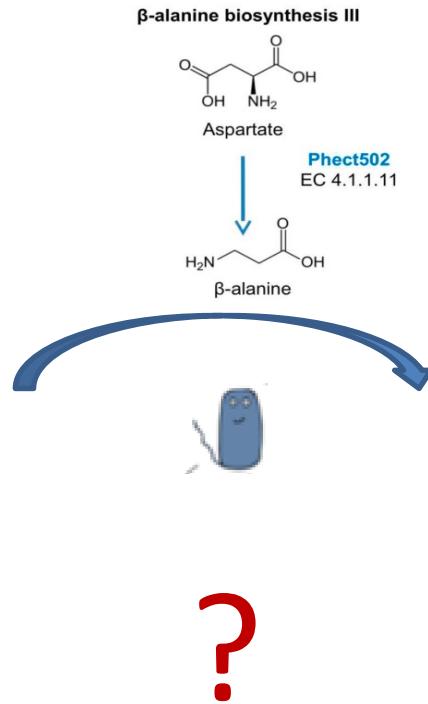
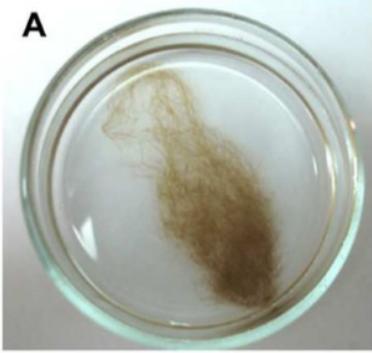
A



Coenzyme A biosynthesis
(Complete in EctoGEM)

One of the necessary filled reactions could not be operated by the algae... but by a bacteria !

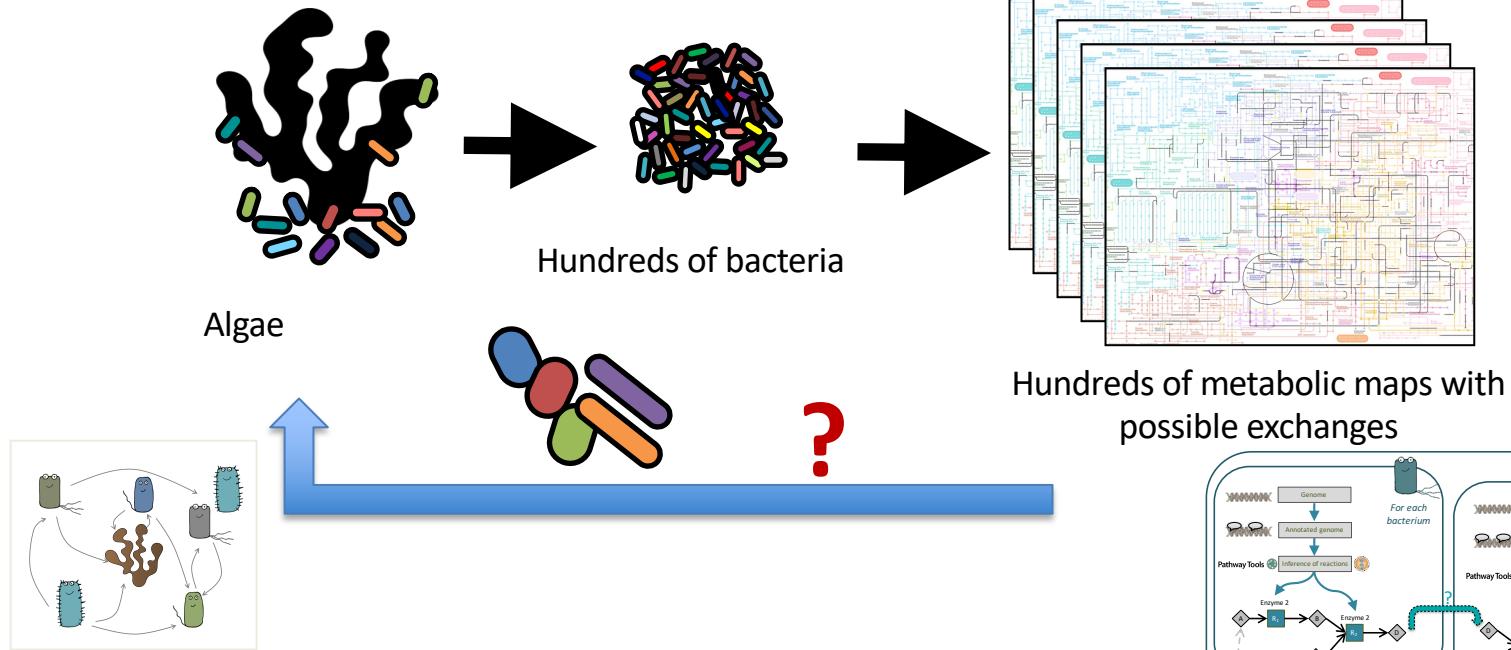
Biological discovery = inconsistency between predictions and knowledge



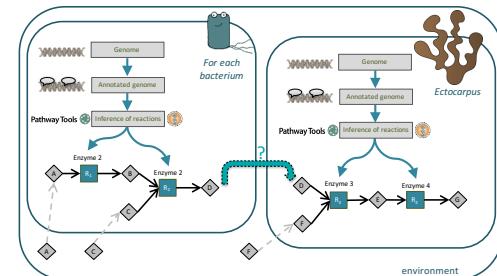
NEW COMBINATORIAL PROBLEM



C. Frioux's phD.
Now @Inria



Hundreds of metabolic maps with
possible exchanges

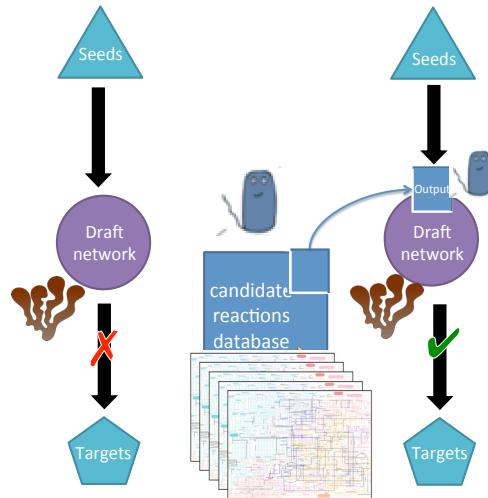


Smallest number of bacteria useful for the algae ?

NEW GAP-FILLING PROBLEM

Synthetic community problem

- Pick-up reactions in the database made of bacterial GSMS.
- For few bacteria: Steiner graph approach [Sagot team, 2017]

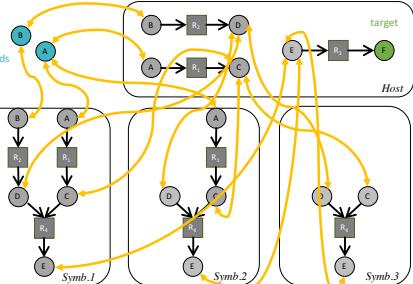


Gapfilling database: Bacterial GSMS

Highly combinatorial optimization problem

Gapfilling complexity

- depends on the number of hyperarcs



499,177 combinations of
<6 exchanges

Size of the search space

- depends on the number of symbionts



1.62.10⁸¹ combinations of
<10 exchanges

PROBLEM RESOLUTION



Heuristics for the community selection problems,
→ playing with projection and union reasoning modes

C. Frioux's phD.
Now @Inria

Who problem

- Get rid of boundaries and select all minimal symbiot families
- **ASP-based gapfilling** with a meta-bacterial GSM as database

How problem

- Sort the selected families according to the number of exchanges
- **ASP-based gapfilling** with union of compartmentalized GSMS as database.

Curation

- Model prior knowledge / co-culture / cultivable constraints
- Ask your favorite biologist to select the final community

$$\text{mxdbagCnity}(S, T, G_1..G_N) \\ = \arg \min_{\{G_{i_1}..G_{i_L}\} \subset \{G_1..G_N\}} \begin{cases} \text{size}(T \setminus \text{mxdbagScope}(G_{i_1}..G_{i_L}, S)), \\ \text{size}\{G_{i_1}..G_{i_L}\}. \end{cases}$$

$$\text{cptCnity}(S, T, G_1..G_N) \\ = \arg \min_{\substack{\{G_{i_1}..G_{i_L}\} \\ \subset \{G_1..G_N\}}} \begin{cases} \text{size}(T \setminus \text{mxdbagScope}(G_{i_1}..G_{i_L}, S)), \\ \text{size}\{G_{i_1}..G_{i_L}\}, \\ \text{size}\{\mathcal{E} \subset \text{exchg}(G_{i_1}..G_{i_L}) | \\ \quad T \cap \text{cptScope}(G_{i_1}..G_{i_L}, \mathcal{E}, S) \\ \quad = T \cap \text{mxdbagScope}(G_{i_1}..G_{i_L}, S)\}. \end{cases}$$

VALIDATION AND BENCHMARKING ON THE HUMAN MICROBIOME



Benchmark

- Human model + 773 AGORA bacteria. 46 molecules to produce

C. Frioux's phD.
Now @Inria

Applying the miscoto tool [ECCB/bioinformatics 2018]

- Enumeration : 381 minimal communities of 3 bacteria,
- Union: 89 bacteria in total

Analysis of solutions (power graphs) Clustering of bacteria

Each of the 381 communities is composed of

1 *Bacteroidetes* (/58) + 1 *Firmicute* or *Proteobacteria* (/15) + 1 *Firmicute* or *Proteobacteria* (/16)

<i>Mycobacterium smegmatis</i> ATCC 15258	4	<i>Clostridium botulinum</i> ATCC 12891	45
<i>Atiopspseudotuberculosis</i> YIT 12860	5	<i>Pseudomonas putida</i> DSM 23758	50
<i>Atiopspseudotuberculosis</i> DSM 19147	5	<i>Pseudomonas putida</i> DSM 23757	51
<i>Atiopspseudotuberculosis</i> WAS_8032	7	<i>Pseudomonas putida</i> DSM 23756	52
<i>Atiopspseudotuberculosis</i> DMS 51002	73	<i>Pseudomonas putida</i> ATCC 27027	54
<i>Bacteroides cleistii</i> YIT 11841	73	<i>Pseudomonas putida</i> YIT 11841	55
<i>Bacteroides cleistii</i> <i>Pseudomonas fluorescens</i> ATCC 25175	73	<i>Pseudomonas putida</i> ATCC 27028	56
<i>Bacteroides fragilis</i> M. Przeworski isolated DSM 23368	75	<i>Pseudomonas putida</i> ATCC 27029	56
<i>Bacteroides fragilis</i> Y. Przeworski isolated DSM 23369	82	<i>Citrobacter freundii</i> DSM 4668	57
<i>Bacteroides fragilis</i> Y. Przeworski isolated DSM 23370	82	<i>Citrobacter freundii</i> ATCC 10541	58
<i>Bacteroides mucilaginosus</i> DSM 23370	72	<i>Citrobacter freundii</i> ATCC 10542	59
<i>Bacteroides mucilaginosus</i> DSM 23371	72	<i>Bacillus cereus</i> ATCC 14570	60
<i>Bacteroides stercoricanus</i> DSM 23372	70	<i>Bacillus cereus</i> ATCC 14571	61
<i>Bacteroides stercoricanus</i> DSM 23373	70	<i>Bacillus cereus</i> ATCC 14572	62
<i>Bacteroides stercoricanus</i> DSM 23374	70	<i>Bacillus cereus</i> ATCC 14573	63
<i>Bacteroides salinarius</i> <i>Pectobacterium</i> ATCC 44377	70	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23343	64
<i>Bacteroides timonensis</i> <i>Pectobacterium</i> CH5 SC 10	70	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23344	65
<i>Bacillus</i> sp.	83	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23345	65
<i>Bacillus</i> sp.	83	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23346	66
<i>Bacillus</i> sp.	87	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23347	67
<i>Coproclytphaga</i> genospecies ATCC 35100	31	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 23348	68
<i>Coproclytphaga</i> aethiops DSM 7219	32	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 35400	68
<i>Coproclytphaga</i> aethiops DSM 7219	32	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 35404	68
<i>Coproclytphaga</i> aethiops ATCC 35612	33	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 35612	68
<i>Coproclytphaga</i> aethiops ATCC 35612	33	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 35612	69
<i>Dysgoniella</i> sp.	68	<i>Pseudomonas aeruginosa</i> ATCC 35612	70

Cluster 1:
Bacteroidetes

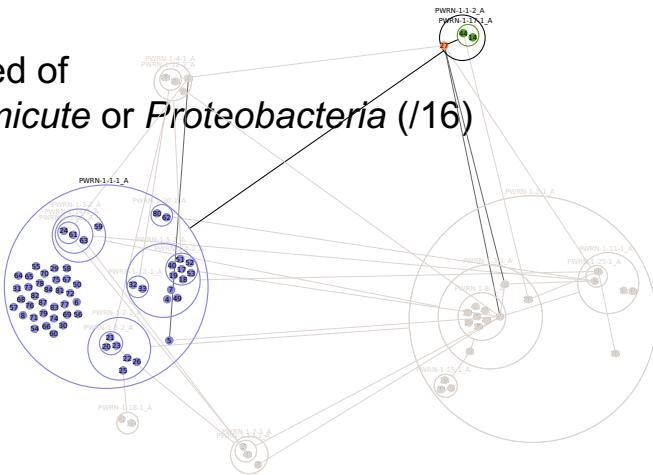
	Cluster 1:	Cluster 2:	Cluster 3:
<i>Bacteroidetes</i>	58	<i>Firmicutes</i> & <i>Proteobacteria</i>	<i>Firmicutes</i> & <i>Proteobacteria</i>

Cluster 2:
Firmicutes & *Proteobacteria*

	Cluster 1:	Cluster 2:	Cluster 3:
<i>Firmicutes</i> & <i>Proteobacteria</i>	15	15	16

Cluster 3:
Firmicutes & *Proteobacteria*

	Cluster 1:	Cluster 2:	Cluster 3:
<i>Firmicutes</i> & <i>Proteobacteria</i>	16	16	16

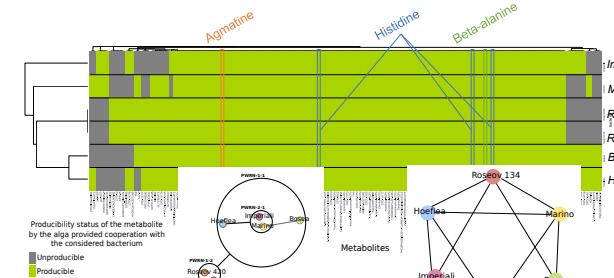


Back to biological discovery: Screening of individual metabolic functions
The functionality of individual targets explains the communities

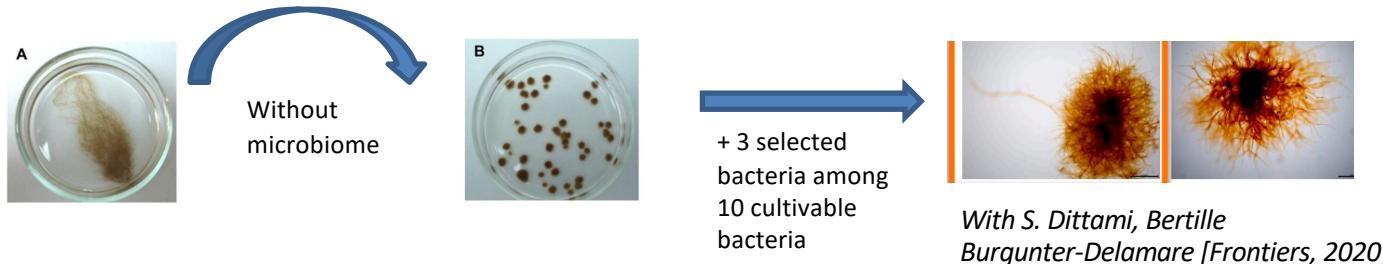
APPLICATION TO ALGAL METABOLISM

Preliminary community selection for *E. Siliculosus*

- 10 cultivable bacteria
- Prediction: 6 equivalent communities of 3 bacteria



Experimentations



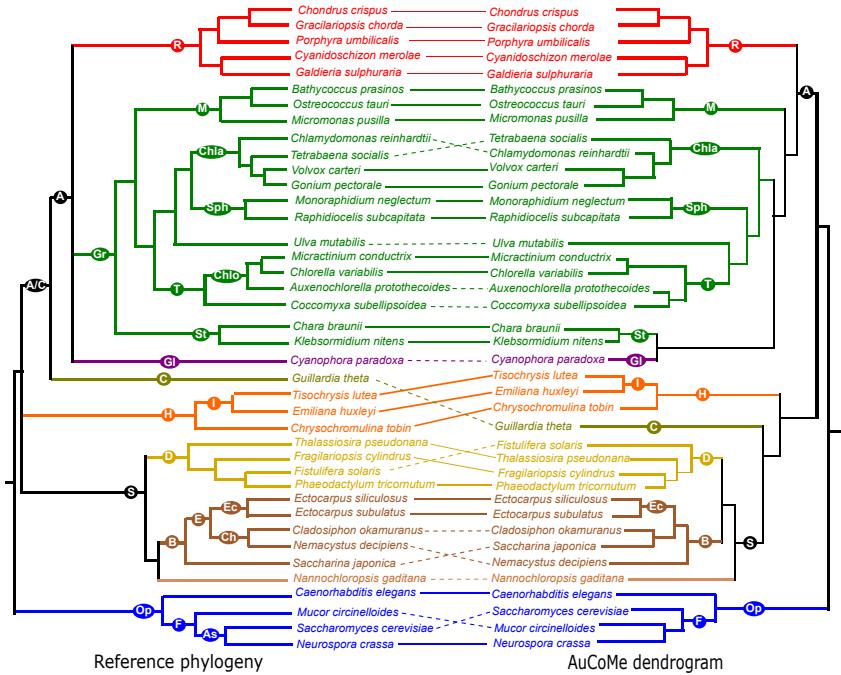
CNRS • SORBONNE UNIVERSITÉ
Station Biologique
de Roscoff

APPLICATION A L'ETUDE D'UNE GRANDE FAMILLE D'ALGUES

Projet Phaeoexplorer

- 61 échantillons d'algues séquencés
- Données bactériennes retrouvées malgré les lavages antibiotiques
 - 285 espèces bactériennes

**Reconstruction des réseaux métaboliques
De toutes les algues et de toutes les bactéries**
(A. Belcour, P. Hamon-Giraud, C. Lucas)



Genome Research 2023



UMR

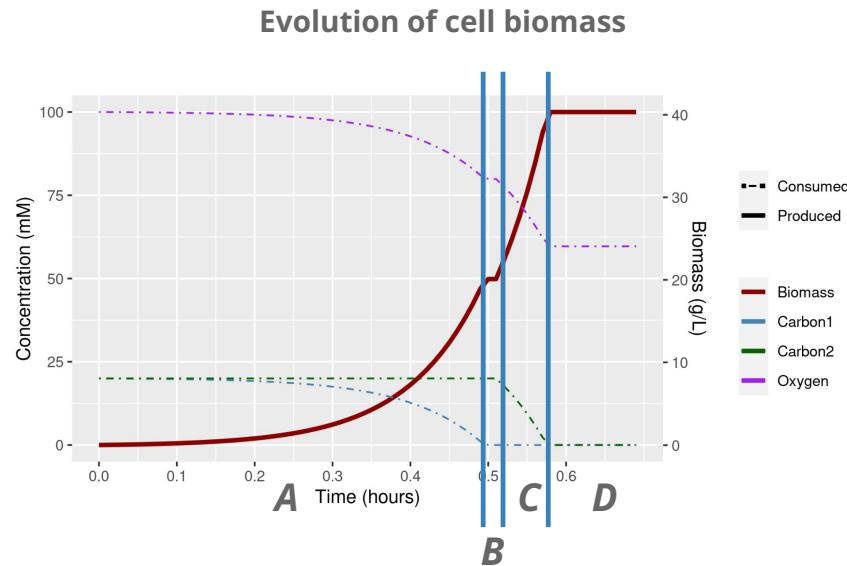
IRISA

Institut de Recherche en Informatique et
Systèmes Aléatoires

8. Still new issues : discrete-continuous systems

1. Short historical reminder: from observations to discoveries in life sciences
2. (Identification of) dynamical systems
3. Focus on the metabolic scale.
4. Reasoning over discrete dynamical systems
5. Knowledge representation : introduction to ASP
6. More insights on ASP
7. Back to biology towards more tricky problems
- 8. Still new issues**

COMPRENDRE DES CINETIQUES COMPLEXES DU METABOLISME ?



Diauxic shift

- Successive growth phases on different media
- Control by regulations

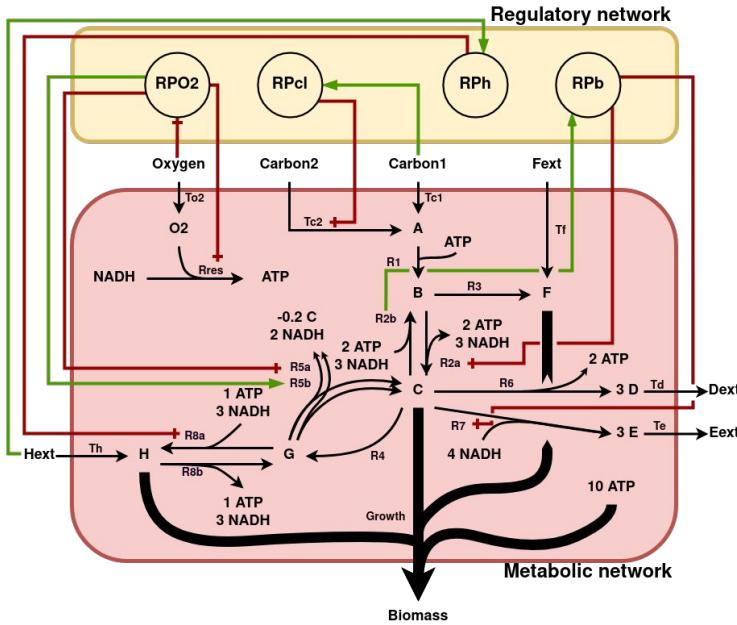
Divided in 4 phases

Characterize by different qualitative behaviours (e.g. growth medium)

- A** → Growth on **Carbon1 only**
- B** → **No growth** due to regulations
- C** → Growth on **Carbon2 only**
- D** → **No growth**, no growth medium

MODELE SOUS-JACENT : MODELES MULTI-NIVEAUX

Gold standard instance (*Covert et al, 2001*)



Toy model based on *E.coli*

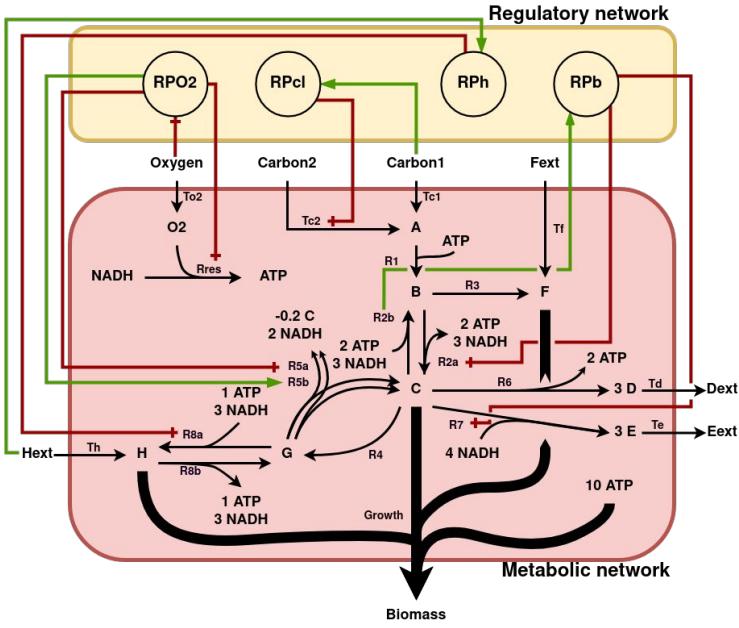
20 reactions, 4 regulatory proteins,
11 regulations

Model complex behaviours

Diauxic shift, aerobic/anaerobic growth, etc.

¹ M. W. Covert et al., *Journal of theoretical biology*, 2001

MODELE SOUS-JACENT : MODELES MULTI-NIVEAUX



Toy model based on *E.coli*

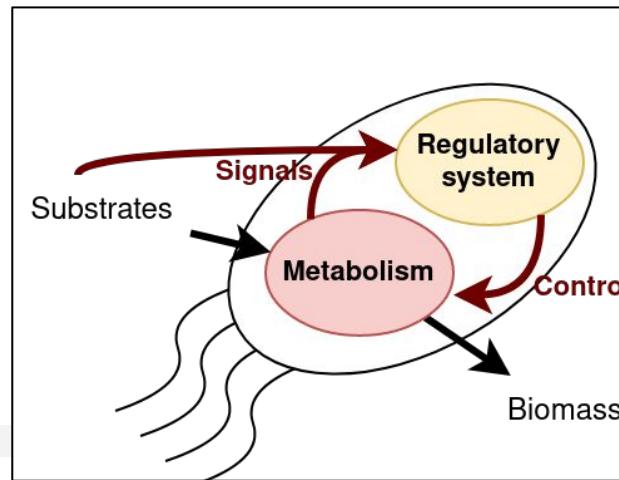
20 reactions, 4 regulatory proteins,
11 regulations

Model complex behaviours

Diauxic shift, aerobic/anaerobic growth, etc.

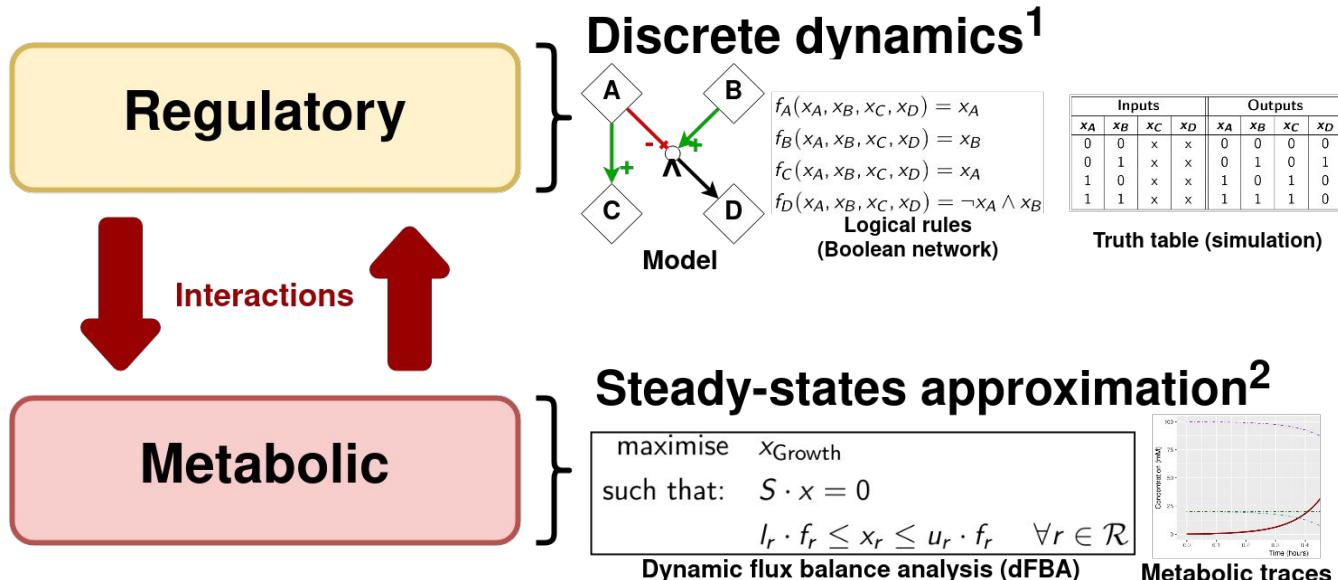
Model as two interconnected systems

- 1. Metabolic system**
Chemical reactions converting substrates to energy and biomass
- 2. Regulatory system**
Rules constraining the metabolism to adapt itself to its environment



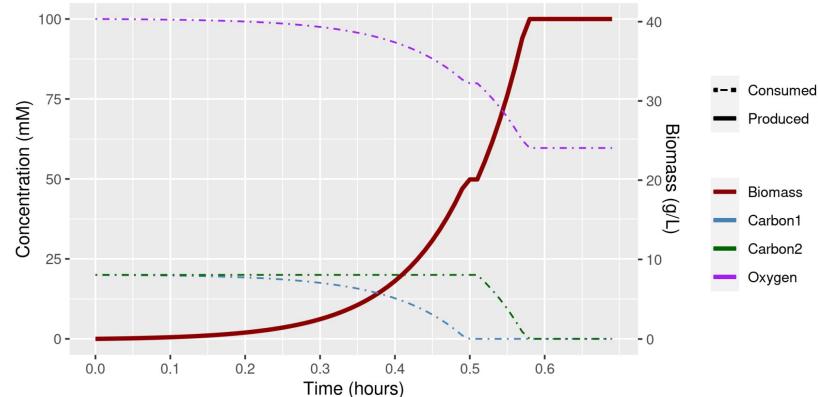
¹ M. W. Covert et al., *Journal of theoretical biology*, 2001

Two models with different dynamics



¹ S. Videla et al., *Bioinformatics*, 2016

² M. W. Covert et al., *Journal of theoretical biology*, 2001



Several simulations approaches

Based on **regulatory Flux Balance Analysis**¹ (dynamic + regulations)

Regulatory



Metabolic

rFBA timestep:

1. Update the **regulatory system**

*1 synchronous update
of the Boolean network*

$$\begin{aligned} f_A(x_A, x_B, x_C, x_D) &= x_A \\ f_B(x_A, x_B, x_C, x_D) &= x_B \\ f_C(x_A, x_B, x_C, x_D) &= x_A \\ f_D(x_A, x_B, x_C, x_D) &= \neg x_A \wedge x_B \end{aligned}$$

2. Update the **metabolic system**

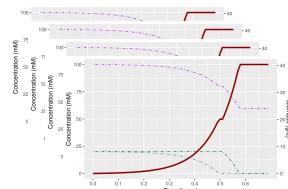
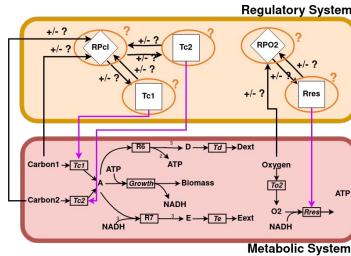
Solve FBA — LP problem

$$\begin{aligned} &\text{maximise} && x_{\text{Growth}} \\ &\text{such that:} && S \cdot x = 0 \\ &&& l_r \cdot f_r \leq x_r \leq u_r \cdot f_r \quad \forall r \in \mathcal{R} \end{aligned}$$

3. Update the cell environment

UN PROBLEME D'INFERENCE : RETROUVER LES REGLES DE REGULATION A PARTIR DES DONNEES ?

Inferring regulatory rules from time series observations



Input:

→ Prior Knowledge Network (PKN)

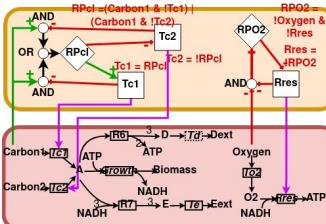
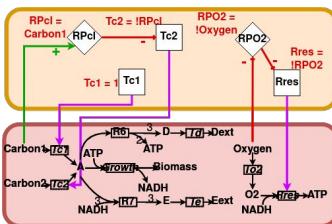
Set of admissible interactions between components of the regulatory network

→ Time series data

Kinetics, fluxomics and/or transcriptomics



Time series
(kinetics, fluxomics,
transcriptomics)

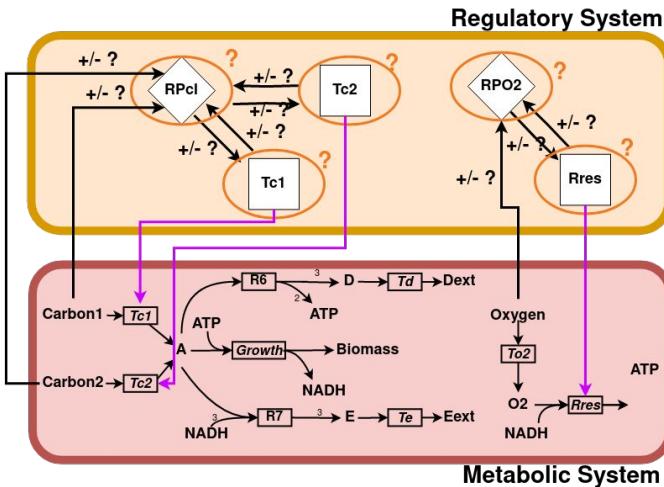


Output:

→ Set of consistent regulatory networks

*Respecting the admissible interactions
Allowing to reproduce the input time series*

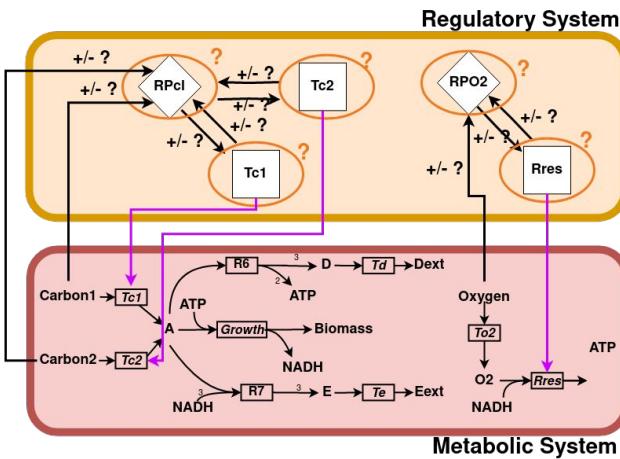
ESPACE DE RECHERCHE : CONTRAINT PAR UN GRAPHE D'INTERACTION A PRIORI



Only specific interactions (*activations*, *inhibitions*) between proteins and enzymes can be used in Boolean regulatory rules

Prior Knowledge Network

ESPACE DE RECHERCHE : CONTRAINT PAR UN GRAPHE D'INTERACTION A PRIORI



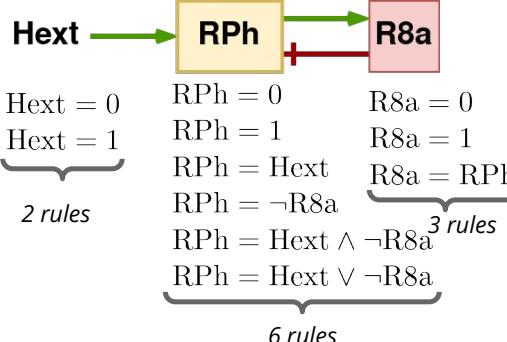
Prior Knowledge Network

Only specific interactions (*activations*, *inhibitions*) between proteins and enzymes can be used in Boolean regulatory rules

Prior Knowledge Network:

Set of authorised interactions: activation and inhibition effects

Example:



Regulatory rule of **RPh** can only depend on:
- activation of **Hext**
- inhibition of **R8a**

6 potential Boolean regulatory rules for these 2 interactions

Size of the search space

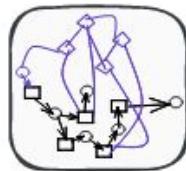
$O(2^{2^n})$ in the number n of interactions

ETAT DE L'ART : NE TIENT PAS COMPTE DU METABOLISME !!!

Several inferring approaches^{1,2}

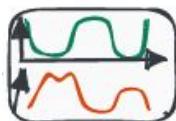
- Based on **constraint programming**
- **Discrete modelling** of the regulatory system dynamics
- **Observations of the regulatory system + PKN**

PKN



Observations

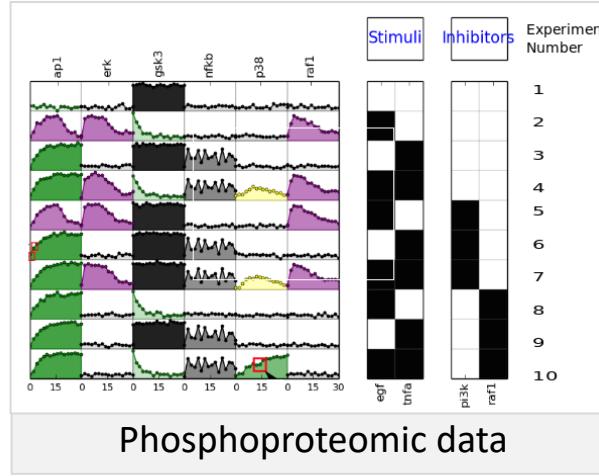
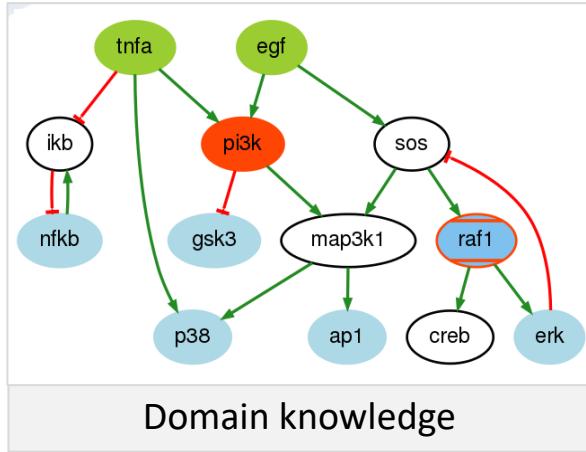
Regulatory



Set of regulatory networks that verify time series data

Infer the regulatory systems

Si on oublie le métabolisme: décrire la réponse combinatoire d'un modèle



Goal. Explain individual data

- Propagation of regulations among a discrete system
- Common hidden mutation

Sample	mutation	RNA-seq
Patient	-	AP1 =0
Patient 1	SOS	AP1 ++
Patient 2	pi3K	P38 = 0

Genomics (inter-individual data)

Reformulating the inference problem

Mathematical problem: Optimize $\Theta_{rss}((V, \phi) + 0.1\Theta_{size}((V, \phi))$

1st objective ($\in \mathbb{R}$). difference between observations and predictions

$$\Theta_{rss}((V, \phi), \underbrace{(P_1, \dots, P_n)}_{n \text{ experiments}}) = \sum_{i=1}^n \sum_{v \in \text{dom}(P_i)} (\underbrace{P_i(v)}_{\text{observations} \in [0,1]} - \underbrace{\pi_i(v)}_{\text{predictions} \in \{0,1\}})^2$$

2nd objective ($\in \mathbb{N}$). model complexity

$$\Theta_{size}((V, \phi)) = \sum_{v \in \text{dom}(\phi)} |\phi(v)|$$

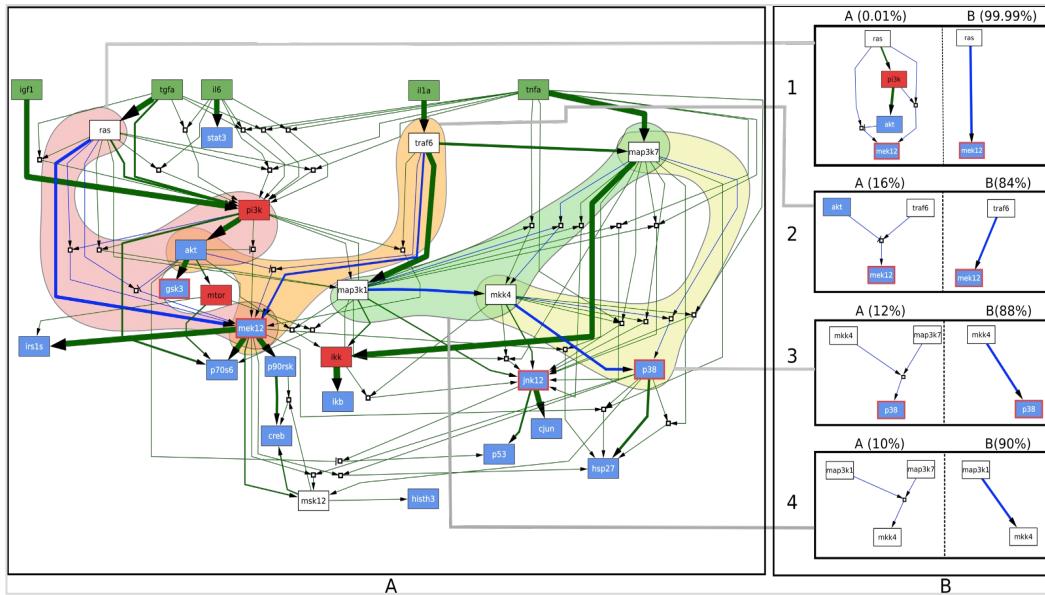
- Local minima
- No global enumeration
- No data noise

**Impact of data discretization
on the solutions of the optimization problem**

**Computing all sub-optimal solutions
to a combinatorial multi-optimization problem → ASP encoding**

$$\left\{ (V, \phi) \in \underbrace{\mathbb{M}(V, E, \sigma)}_{\text{Structure}} \mid \underbrace{\text{Score}_{rss}((V, \phi), \text{Exp_Data})}_{\text{Fitting}} \leq \underbrace{(1 + 10\%) \min \text{Score}_{rss}}_{\text{Noise tolerance}} \text{ and } \underbrace{\text{Score}_{size}((V, \phi))}_{\text{Parsimony}} \leq \underbrace{\min \text{Score}_{rss} + 2}_{\text{Size tolerance}} \right\}$$

Network identification from two time points



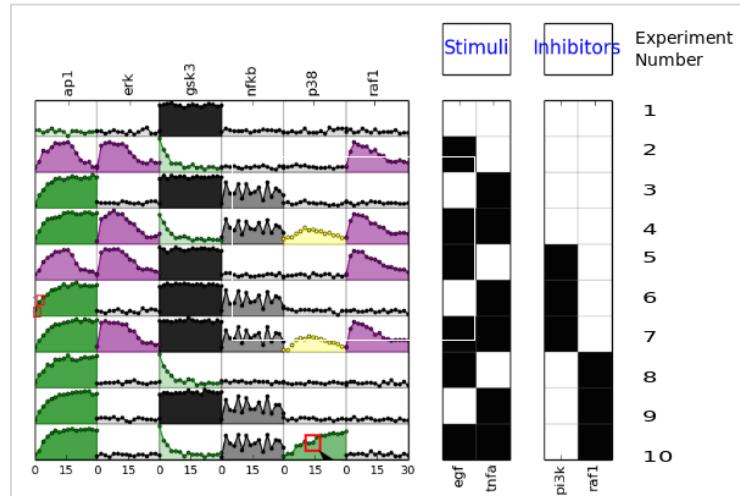
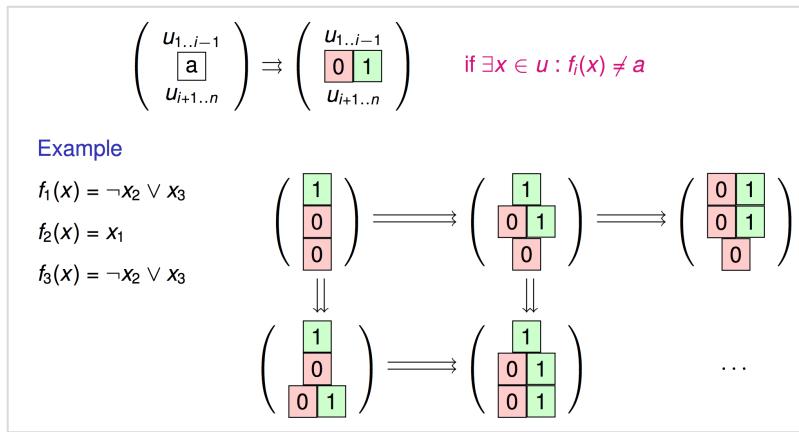
Within the search space of 2^{87} models,
exactly 5306 boolean models explain equivalently
well the 2009 Dream challenge data.

Boolean network inference from time-series data

Main limitation:

ASP is not a model-checker: finite trajectories only.

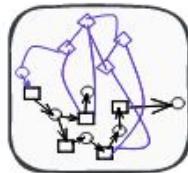
➤ How to take dynamical traces into account ?



- Abstraction of logical states with meta-states
- A posteriori-filtering with model-checkers

RETOUR AU PROBLEME DU METABOLISME

PKN

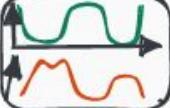


Observations

Regulatory



Metabolic



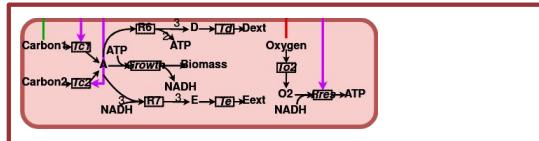
?

Could not model metabolic system

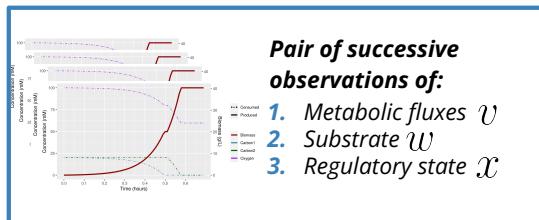
RAPPEL

Inferring problem – *in a nutshell*

Inputs:



Metabolic network \mathcal{N}



Set of time series $\{T_i\}_i$

(kinetics, fluxomics, transcriptomics)

Set of authorised interactions: **activation** and **inhibition** effects



Hext = 0	RPh = 0	R8a = 0
Hext = 1	RPh = 1	R8a = 1
	RPh = Hext	R8a = RPh
	RPh = \neg R8a	
	RPh = Hext \wedge \neg R8a	
	RPh = Hext \vee \neg R8a	

36 compatible regulatory networks

$O(2^{2^n})$ in the number n of interactions

Prior Knowledge Network (PKN)

Define a search space \mathcal{F}

Outputs:

All the Boolean networks $f \in \mathcal{F}$ such that there is a rFBA simulations matching the input time series $\{T_i\}_i$

Inferring problem – *formal definition*

Input: metabolic network \mathcal{N} , search space \mathcal{F} , set of time series $\{T_i\}_i$

Output: all Boolean networks $f \in \boxed{\mathcal{F}}$ such that:

$$\bigwedge_{T_i} \bigwedge_{(s,s') \in T_i} \left(f(x) = x' \quad \text{Boolean constraints} \right)$$

$$\wedge \exists \hat{v} \in \mathbb{R}^{\text{Reactions}}, \left(S \cdot \hat{v} = 0 \wedge \bigwedge_{r \in \text{Reactions}} l_r \cdot x'_r \leq \hat{v}_r \leq u_r \cdot x'_r \wedge \hat{v}_{\text{growth}} \geq v'_{\text{growth}} - \epsilon \right)$$

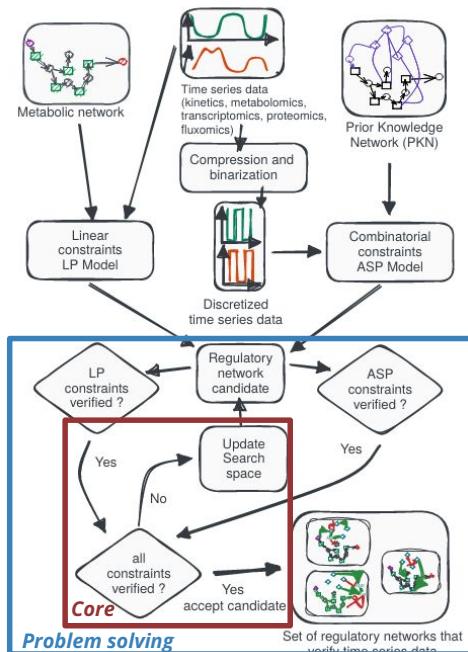
$$\wedge \forall \hat{v} \in \mathbb{R}^{\text{Reactions}}, \left(S \cdot \hat{v} = 0 \wedge \bigwedge_{r \in \text{Reactions}} l_r \cdot x'_r \leq \hat{v}_r \leq u_r \cdot x'_r \right) \implies \hat{v}_{\text{growth}} \leq v'_{\text{growth}} + \epsilon$$

Quantified linear constraints

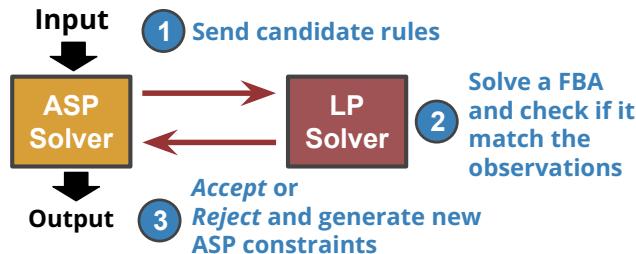
Hybrid problem: combinatorial + quantified linear constraints

Resolution framework

MERRIN – published at ECCB22



Based on the *conflict driven clause learning* algorithm¹ and *satisfiability modulo theory*² methods



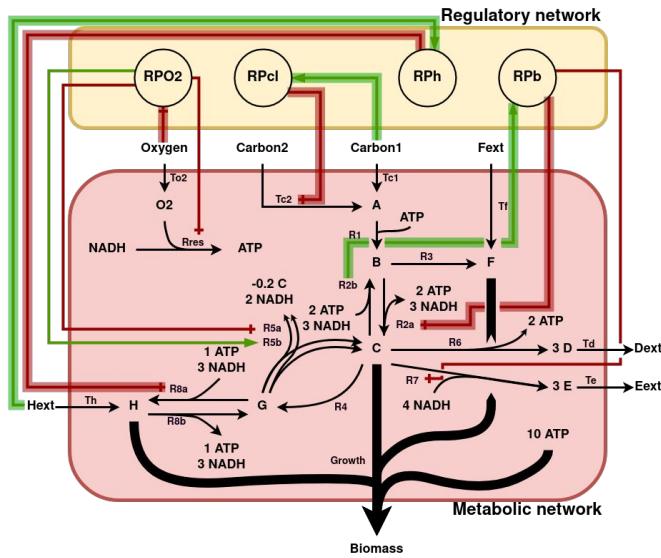
New constraints (*nogoods*) are generated for each conflict

- Generalisation of conflicts
- Reduce the number of call to the LP solver

¹ CDCL: J. P. Marques-Silva and K. A. Sakallah, *IEEE Transactions on Computers*, 1999

² SMT: C. Barrett and C. Tinelli, *Handbook of model checking*, 2018

Validation and robustness testing



Learn more parsimonious model than ground truth

- Reproduce exactly the input time series
- Unrecovered regulations can be explained

Validation on a benchmark of 240 instances (*in silico*)

- 4 data types
- 6 level of degradations (0% to 50%)

Perfectly reproduce the time series with:

- *kinetics and transcriptomics* data
- < 20% of degradation



Institut de Recherche en Informatique et
Systèmes Aléatoires

Bunch of conclusions

TAKE HOME MESSAGE

Life sciences are becoming a data-science....

But they cannot be addressed with usual complex system technics.

→ Curated and reliable dynamical models are difficult to obtain (Large-scale data, lacks of knowledge and information)

Our strategy: explore and integrate data with discrete abstractions

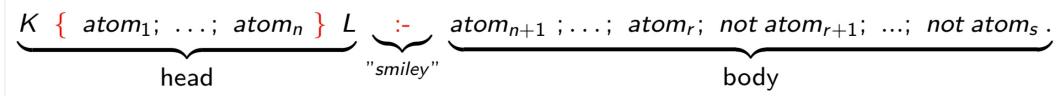
- Favor combinatorial optimisation problems to gain in robustness
- Use boolean abstractions of the dynamics (minimal fixed-point)

ASP technologies allow for a scalable reasoning on data and networks

(Win-win collaboration with your BFF ASP-tech developers)

New discoveries in life science may result rather from inconsistencies between knowledge and data (abduction) than from data-science technics.

ANSWER SET PROGRAMMING



High-level model language

- Propositional logics
- **Model for negation: everything is false a priori**
- **Reasoning modes**: enumeration, union, intersection of solutions
- Optimisation

Optimisation rule

#maximize{W,atom(X): condition(X),W}.

Linear constraints atoms

&sum{a1*x1;...;al*xl} <= k

Highly performant solving techniques

- SAT-based and deductive-DB technics
- Decidable: no infinite loop

Problem statement & modelling



Solving heuristics & problem reformulation

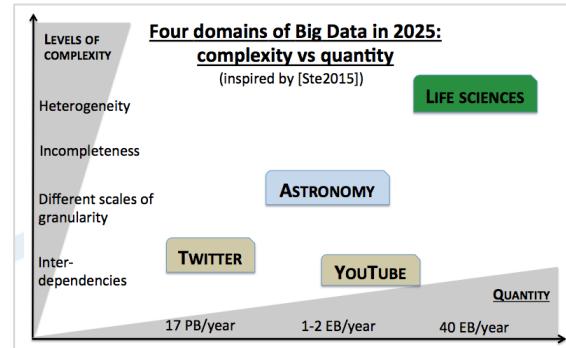
ASP programs never scale...
... until they do scale thanks to specific heuristics

- Repair large-scale interaction graph with **branch and bound** [KR'10]
- Scale metabolic network gap-filling problem with **unsatisfiable core** [LPNMR'13]
- Design experiments with **incremental solving** [Frontiers'15]
- Implement and benchmark **constraints propagators** [TPLP'18]

REASONING IN LIFE SCIENCES

Life sciences and systems biology are a wonderful playing field

- For new dynamical modeling frameworks (competitions...)
- For new knowledge representation and reasoning paradigms



Addressing the data nightmare in life sciences ?

- Machine learning/deep learning approaches : inductive reasoning, correlations
- **Biology is also/mainly interested in causalities, knowledge discovery, and hypothesis formulation, leading to inconsistencies... and new theories.**

→ **Produce hypotheses rather than replacing biologists by in silico models**

Hypothesis...

- **Life sciences = privileged field to experiment new theories of abductive reasoning applied to large-scale data ?**
- Do not forget dynamical systems behind...

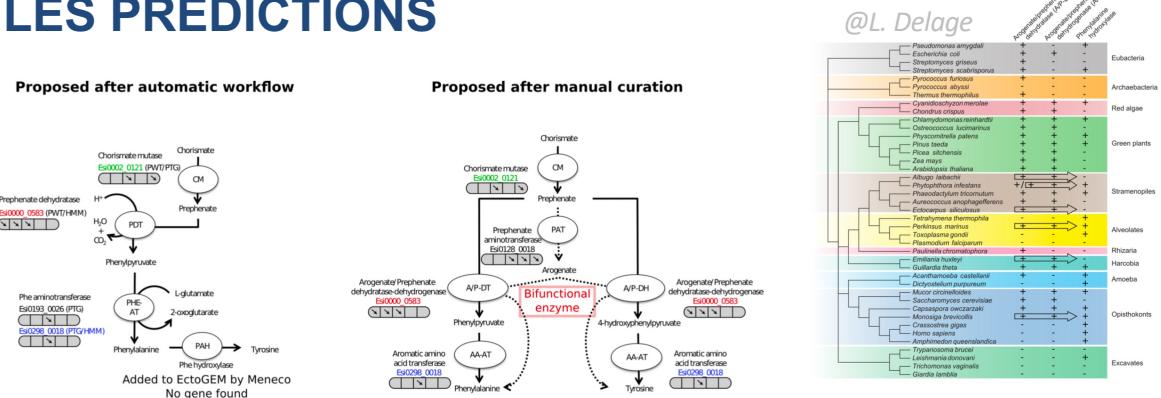
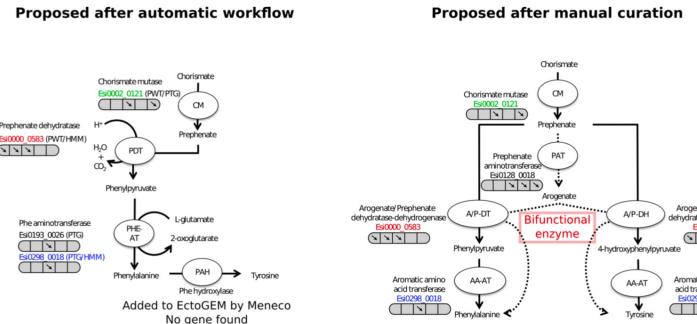
PLACE DES ERREURS DANS LES PREDICTIONS

Méthode(s) in silico pour boucher les trous dans les cartes

(Logiciels: meneco, miscoto, AuReMe, AuCoMe...)

Synthèse de la tyrosine chez *E. siliculosus* :
gène absent mais compréhension du rôle bifonctionnel d'une enzyme

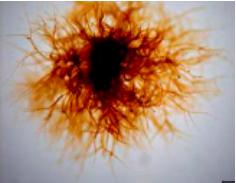
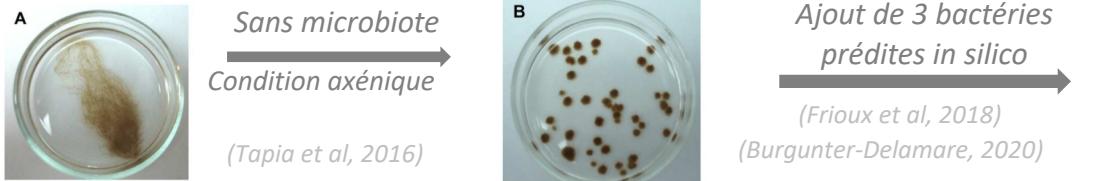
(Prigent et al, 2014)



Arrows: bifunctional enzymes

Voie de synthèse de la coenzyme A : nécessite de la beta-alanine et du pantoate

- L'algue sait produire le pantoate... mais n'a pas le gène prédit in silico pour produire la beta-alanine
- Ce gène est présent chez une bactérie symbiotique rescapée de la phase d'axénisation → Holobionte !



Identification de candidats (inexacts) pour faire progresser la connaissance

Remerciements

Team Dyliss@IRISA

- C. Frioux (now @Inria Bordeaux)
- S. Prigent (now @Inrae)
- C. Guziolowski (now@Univ Nantes)
- **J. Got**
- **S. Blanquart**
- **A. Belcour**
- **K. Thuillier**
- **P. Hamon Giraud**
- **C. Lucas**

Algae@SBR Roscoff

- **S. Dittami**
- H. Klijean
- B. Burgunder
- T. Tonon
- **G. Markov**



ASP tech@Potsdam university

- **T. Schaub's team**
- S. Thiele



Merrin team

Loic Paulevé

- Alexander Bockmayr
- Ludovic Cottret
- Caroline Baroukh



@irisa_lab



Institut de Recherche en Informatique et Systèmes Aléatoires

Programmation par ensembles-réponses: un peu de sémantique

Ensemble-réponse dans le cas de programmes positifs

PROGRAMME POSITIF

Un **programme positif** est constitué d'un ensemble de **règles** (clauses définies)

$$\underbrace{A}_{\text{tête}} \quad :- \quad \underbrace{B_1; B_2; \dots; B_m}_{\text{corps}}.$$

où A (la **tête** de la règle) et les B (le **corps**) sont des **atomes** (variables booléennes)

$A :- B_1; B_2; \dots; B_m.$ correspond à la formule $\neg B_1 \vee \neg B_2 \vee \dots \vee \neg B_m \vee A$

Les programmes positifs sont des clauses disjonctives avec exactement un atome positif.

ENSEMBLE CLOS D'UN PROGRAMME POSITIF

Un ensemble d'atomes X est **clos pour un programme positif P** si

pour toute règle r du programme P , $\text{corps}(r) \subset X \implies \text{tête}(r) \subset X$

C'est un **modèle du programme** vu comme une formule.

ENSEMBLE-RÉPONSE

L'ensemble réponse $Cn(P)$ (**answer set**) d'un programme positif P est le plus petit ensemble d'atomes qui soit clos pour P . Il existe et est unique.

Exemple 1

Vérifier que pour toute règle r , on a bien $\text{corps}(r) \subset X \implies \text{tête}(r) \subset X$

PROGRAMME

```
a :- b;p;q.  
b :- q.
```

LISTE DES SOUS-ENSEMBLES D'ATOMES

```
{a,b,p,q}, {a,b,p}, {a,b,q}, {a,p,q}, {b,p,q}, {a,b}, {a,p}, {a,q}, {b,p}, {b,q}, {p,q}, {a}, {b}, {p}, {q}, {}.
```

SOUS-ENSEMBLES CLOS

Question: quels sont-ils ?

```
{a,b,p,q}, {a,b,p}, {a,b,q}, NONCLOS{a,p,q}, NONCLOS{b,p,q},  
{a,b}, {a,p}, NONCLOS{a,q}, NONCLOS{b,p},  
{b,q}, NONCLOS{p,q}, {a}, {b}, {p}, NONCLOS{q}, {}.
```

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE DU PROGRAMME ?

L'ensemble-réponse du programme est l'ensemble vide \emptyset

→ Le programme ne contient que des implications, et rien n'est "vrai".

Tout ce qui n'est pas prouvé par un fait est considéré comme faux!

Exemple 2

Vérifier que pour toute règle r , on a bien $\text{corps}(r) \subset X \implies \text{tête}(r) \subset X$

Programme

```
a :- b;p;q.  
b :- q.  
q.
```

LISTE DES SOUS-ENSEMBLES D'ATOMES

{a,b,p,q}, {a,b,p}, {a,b,q}, {a,p,q}, {b,p,q}, {a,b}, {a,p}, {a,q}, {b,p}, {b,q}, {p,q}, {a}, {b}, {p}, {q}, \emptyset .

LISTE DES SOUS-ENSEMBLES CLOS ?

{a,b,p,q}, NONCLOS{a,b,p}, {a,b,q}, NONCLOS{a,p,q}, NONCLOS{b,p,q}, NONCLOS{a,b}, NONCLOS{a,p},
NONCLOS{a,q}, NONCLOS{b,p}, {b,q}, NONCLOS{p,q}, NONCLOS{a}, NONCLOS{b}, NONCLOS{p}, NONCLOS{q},
NONCLOS \emptyset .

→ Comme \emptyset est contenu dans un corps, q doit être contenu dans tous les sous-ensembles clos.

QUEL EST L'ENSEMBLE-RÉPONSE?

L'ensemble réponse du programme est {b,q}

→ On n'a pas gardé p puisqu'on n'a aucune preuve de p .

Les atomes d'un ensemble-réponse d'un programme positif apparaissent dans la tête d'au moins une règle

Programmes avec une négation ?

PROGRAMME "QUELCONQUE"

Un **programme** est constitué de manière plus générale d'un ensemble de règles

$$r: \underbrace{A}_{\text{tete}} : - \underbrace{B_1; B_2; \dots; B_m}_{\text{corps}^+(r)} \underbrace{\text{not } B_{m+1}; \text{not } B_{m+2}; \dots; \text{not } B_{m+n}}_{\text{corps}^-(r)}.$$

RÉDUIT PAR RAPPORT À UN ENSEMBLE

Le **réduit** d'un programme par rapport à un ensemble d'atomes X est l'ensemble des règles de la forme

$$r: \text{tête}(r) : - \text{corps}^+(r). \quad \text{pour tout règle } r \text{ telle que } \text{corps}^-(r) \cap X = \emptyset.$$

IDENTIFICATION

- On choisit un sous-ensemble d'atomes X
- On ne garde que les règles $r : A :- B_1; B_2; \dots; B_m$ pour lesquelles aucun des $B_{m+1}, B_{m+2}, \dots, B_{m+n}$ n'appartiennent à X .

EXEMPLE a :- b; not q. b:- p; q. p.

- Exercice: calculer le réduit du programme par rapport à { q }

b:- p; q.

p.

- Exercice: calculer le réduit du programme par rapport à { a }

a :- b.

b:- p; q.

p.

"Not": ensemble-réponse

ENSEMBLE-RÉPONSE

Un *ensemble réponse* (*modèle stable*) d'un programme P est un sous-ensemble X d'atomes tel que

- X est **clos** pour le programme obtenu comme **réduit** de P par rapport à X .
- X est **stable**: X est égal à l'**ensemble-réponse de son programme réduit**.
- X est **minimal** pour l'inclusion parmi tous les ensembles clos et stables.

REMARQUE

- Il faut d'abord réduire le programme par rapport à X et ensuite vérifier que ce qu'on obtient est clos vis à vis de X .
- Il peut y en avoir 0, 1 ou plusieurs.

CONTENU D'UN ENSEMBLE-RÉPONSE

Un modèle contient l'atome d'une tête de règle

- si la règle est un fait (règle réduite à une tête) après en avoir enlevé les littéraux négatifs qui ne sont pas dans le modèle
- ou si tous les littéraux positifs du corps sont dans le modèle et aucun des littéraux négatifs.

Exemple 1

p:- p. q:- not p.

ENUMÉRER LES SOUS-ENSEMBLES X D'ATOMES.

{p,q}, {p}, {q}, \emptyset .

POUR CHACUN, CALCULER LE RÉDUIT.

- {p,q}. Réduit: ? p:-p.
- {p}. Réduit: ? p:-p.
- {q}. Réduit: ? p:-p. q.
- \emptyset . Réduit: ? p:-p. q.

POUR CHAQUE RÉDUIT, CALCULER L'ENSEMBLE CLOS MINIMAL

- {p,q}. Réduit: p:-p. . Ensemble clos minimal? \emptyset
- {p}. Réduit: p:-p. Ensemble clos minimal? \emptyset
- {q}. Réduit: p:-p. q. Ensemble clos minimal? {q}
- \emptyset . Réduit: p:-p. q. Ensemble clos minimal? {q}

GARDER LES CLOS STABLES MINIMAUX

Ensembles-réponses ? {q}

(c'est le seul ensemble qui est égal à l'ensemble-réponse de son réduit.)

Exemple 2

```
p:- not q.  q:- not p.
```

ENUMÉRER LES SOUS-ENSEMBLES X D'ATOMES.
 $\{p,q\}$, $\{p\}$, $\{q\}$, \emptyset .

POUR CHACUN, CALCULER LE RÉDUIT.

- $\{p,q\}$. Réduit: $? \rightarrow \emptyset$
- $\{p\}$. Réduit: $? \rightarrow p.$
- $\{q\}$. Réduit: $? \rightarrow q.$
- \emptyset . Réduit: $? \rightarrow p. q.$

POUR CHAQUE RÉDUIT, CALCULER L'ENSEMBLE CLOS MINIMAL

- $\{p,q\}$. Réduit: programme vide . Ensemble clos minimal? rien
- $\{p\}$. Réduit: $p.$ Ensemble clos minimal? $\{p\}$
- $\{q\}$. Réduit: $q.$ Ensemble clos minimal? $\{q\}$
- \emptyset . Réduit: $p. q.$ Ensemble clos minimal? $\{p,q\}$

GARDER LES CLOS MINIMAUX

Ensembles-réponses ? $\{p\}, \{q\}$

Exemple 3

```
p:- not p.
```

ENUMÉRER LES SOUS-ENSEMBLES X D'ATOMES.

$\{p\}$, \emptyset .

POUR CHACUN, CALCULER LE RÉDUIT.

- $\{p, q\}$. $\rightarrow \emptyset$
- \emptyset . $\rightarrow p$.

POUR CHAQUE RÉDUIT, CALCULER L'ENSEMBLE CLOS MINIMAL

- $\{p, q\}$. Réduit: programme vide . Ensemble clos minimal? rien
- \emptyset . Réduit: p . Ensemble clos minimal? $\{p\}$

GARDER LES CLOS MINIMAUX

Ensembles-réponses ? Aucun: il n'y a pas d'ensemble stable !

A RETENIR

Un ensemble réponse contient des atomes se trouvant dans une tête de règle du programme.

Tout élément d'un ensemble réponse est supporté par une règle.

LOGIQUE NON MONOTONE Rajouter des faits à une théorie peut faire réduire l'ensemble de conclusions.