



PROPOSITION DE STAGE DE M2-RECHERCHE

Sujet proposé par J.-P. COMET (Pr.) et A. RICHARD (CR CNRS)

Vers une version forte de la seconde conjecture de R. Thomas

Titre : Vers une version forte de la seconde conjecture de R. Thomas

Mots clés : Systèmes booléens, Jacobienne booléenne signée, modélisation des réseaux génétiques

Poursuite en thèse possible: Oui

Contexte

L'étude des réseaux génétiques passe souvent par l'étude des liens qui existent entre leurs graphes d'interactions, graphes orientés dont les arcs sont étiquetés par les signes d'interactions, et leurs dynamiques. Au début des années 80, R. Thomas a conjecturé que la présence d'un circuit positif (resp. négatif) dans le graphe d'interactions d'un réseau génétique, est nécessaire pour avoir multistationarité (resp. des oscillations) dans la dynamique. Deux versions de ces conjectures existent : la version faible dit que le circuit est nécessaire dans l'union des graphes locaux, alors que la version forte dit qu'il existe un état où le graphe local contient un tel circuit. La première conjecture (circuit positif) a été démontrée dans ses versions faible et forte pour un grand nombre de cadre d'études, alors que la deuxième (circuit négatif) n'a été abordée que dans sa version faible.

Nous nous proposons d'aborder la version forte de la seconde conjecture de Thomas, d'une part en faisant des simulations pour chercher des contre exemples, et d'autre part en étudiant les propriétés des jacobiennes locales lorsqu'on restreint l'ensemble des dynamiques considérés.

Objectifs du stage

Trois directions de recherche seront envisagées :

- La génération d'exemples dans l'espoir de trouver un contre exemple. Evidement l'énumération des fonctions de $\{0,1\}^n$ dans lui-même est trop longue pour pouvoir espérer trouver rapidement un contre exemple. Il s'agit donc d'essayer de trouver une énumération qui permet d'élaguer rapidement un grand nombre de fonctions.
- On peut aussi essayer de restreindre l'ensemble des dynamiques considérées. Si on voit chacun des états comme un mot binaire de n bits, on peut par exemple se restreindre aux dynamiques dont le circuit est défini par l'état initial $x_0 = 0$, et la récurrence suivante : $\forall k \in [0, n-1], x_{k+1} = 2x_k + 1 \pmod{2^n}$ et $\forall k \in [n, 2n], x_{k+1} = 2x_k \pmod{2^n}$. La question est de savoir si cette forte restriction permet de déduire des éléments du comportement sur des états proches du cycle, qui permettent d'avancer dans la preuve de la conjecture.
- La troisième voie d'étude consiste à travailler sur les jacobiennes des états. Les travaux de Robert, Shih [2], Weichbuch, Richard[1]... donnent certaines conditions pour que la fonction soit simple dans le cas où l'on considère la jacobienne booléenne. Ici, la difficulté vient du fait que la jacobienne que l'on doit considérer n'est plus booléenne puisqu'il faut maintenir le signe des interactions.

Encadrement

Jean-Paul COMET, tél : 04.92.94.27.42, comet@unice.fr, <http://www.i3s.unice.fr/~comet/>

Adrien RICHARD, tél : 04.92.94.27.51, richard@unice.fr, <http://www.i3s.unice.fr/~richard/>

I3S, Université de Nice Sophia-Antipolis

Bâtiment Algorithme-Euclide-B, 2000 Route des Lucioles, B.P. 121, 06903 Sophia Antipolis

References

- [1] A. Richard and J.-P. Comet. Necessary conditions for multistationarity in discrete dynamical systems. *Discrete Applied Mathematics*, 155(18):2403–2413, 2007.
- [2] Mau-Hsiang Shih and Juei-Ling Ho. Solution of the boolean Markus-Yamabe problem. *Advances in Applied Mathematics*, 22(1):60–102, 1999.