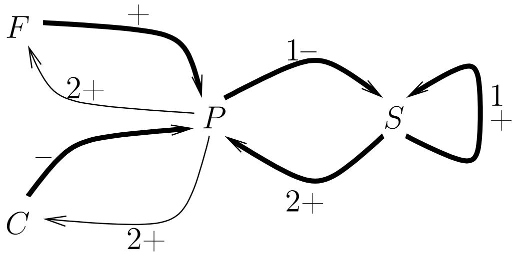
I.A. symbolique pour les réseaux biologiques complexes Examen du 20 décembre 2023

Durée 3h. *Documents autorisés,* G. Bernot, J.-P. Comet
Ordinateur et autres moyens de communication interdits.

Rédigez les parties 1 et 2 sur deux copies séparées. **Justifiez chacune de vos réponses.**



La santé (S) d'un arbre fruitier peut être altérée par des colonies de pucerons (P). On sait par ailleurs que les fourmis (F) élèvent des colonies de pucerons en raison du miellat que les pucerons produisent, et il est courant d'utiliser des coccinelles (C), prédateurs des pucerons, pour tenter de protéger les arbres. Enfin les arbres dont la santé n'est pas trop dégradée mettent en place des mécanismes pour un retour en pleine santé (auto-activation de S au seuil 1).
Ces connaissances sont résumées dans le graphe d'interactions. On considère pour simplifier que les pucerons commencent à nourrir les fourmis en miellat au même niveau de population qu'elles commencent à alimenter les coccinelles (seuil 2 commun). On considère aussi que les feuilles de l'arbre doivent être en pleine santé pour bien nourrir les pucerons.

Dans toute la suite, les *conditions de Snoussi* sont satisfaites.

Partie 1

Exercice 1 : Donnez la liste des paramètres à identifier (selon la théorie de Thomas) pour chacune des variables F, C, P et S (dans cet ordre, y-compris pour les ressources).

Exercice 2 : Donnez la liste des cycles positifs et celle des cycles négatifs de ce graphe.

En fait, le modèle est plus simple qu'il n'y paraît. En effet, les chercheurs ont montré que le miellat n'est qu'une « friandise » pour les fourmis et n'influe pas sur leur population : si un nid de fourmis est proche de l'arbre alors F tend toujours vers 1, sinon F tend toujours vers 0. Il s'agit donc d'une hypothèse qui préconditionne notre modèle de Thomas.
De même, en conditions naturelles, les coccinelles sont toujours en nombre insuffisant pour faire diminuer la population de pucerons : si le jardinier maintient artificiellement des coccinelles en surnombre à proximité de l'arbre alors C tend toujours vers 1, sinon C tend toujours vers 0. C représente donc la présence en surnombre. Il s'agit là aussi d'une hypothèse qui préconditionne le modèle.

Exercice 3 : (3.1) Quelle est la valeur des paramètres de la variable F ($K_{F,\ldots}$) dans l'hypothèse où un nid de fourmis est à proximité de l'arbre fruitier ?
(3.2) Et quelle est la valeur des paramètres de la variable F dans l'hypothèse contraire ?
(3.3) Quelle est la valeur des paramètres de la variable C ($K_{C,\ldots}$) dans l'hypothèse où le jardinier maintient des coccinelles en surnombre ?
(3.4) Et quelle est la valeur des paramètres de la variable C dans l'hypothèse où il n'apporte pas de coccinelles ?

Exercice 4 : Pour chacune de ces hypothèses, les activations $P \to F$ et $P \to C$, et les cycles $F \leftrightarrow P$ et $C \leftrightarrow P$ sont-ils fonctionnels ? pourquoi ?

Exercice 5 : Que les pucerons soient présents ou non, un arbre trop abîmé ($S = 0$) ne peut jamais améliorer sa santé. Quelles valeurs de paramètres en déduisez-vous ?

Exercice 6 : On observe également *(i)* que sans l'élevage des pucerons par les fourmis, la population de pucerons n'atteint pas le seuil qui nuit à la santé de l'arbre, et *(ii)* qu'il en est de même si le jardinier apporte des coccinelles en surnombre.
Quelles valeurs de paramètres de P en déduisez-vous ?

Exercice 7 : Sous l'hypothèse inverse, i.e. avec un nid de fourmis proche et sans surnombre de coccinelles, on observe une oscillation (stable dans le temps) de la population de pucerons.
(7.1) Par quoi est-elle engendrée ? (7.2) Cette oscillation peut-elle passer par un état où $S = 0$? autrement dit, l'arbre fruitier peut-il perdre la ressource S durant l'oscillation ? (7.3) Que déduisez-vous des remarques 7.1 et 7.2 sur les valeurs des paramètres ?

Exercice 8 : Toujours avec un nid de fourmis proche et sans surnombre de coccinelles…

(8.1) Lors des oscillations, on a observé le triplet de Hoare suivant :

$$\{F = 1 \wedge C = 0 \wedge S = 2\}\ P+; P+\ \{P = 2\}$$

Déduisez-en la valeur de $K_{P,FCS}$.

(8.2) Qu'il y ait des pucerons ou non, il y a toujours deux bassins d'attraction, l'un conduisant à la mort de l'arbre fruitier et l'autre non. Indiquez par quoi ces deux bassins d'attraction sont engendrés et déduisez en la valeur de $K_{S,S}$.

Exercice 9 : En restant sous l'hypothèse d'un nid de fourmis proche et sans surnombre de coccinelles, (9.1) donnez le tableau des ressources en considérant uniquement les 9 états possibles des variables P et S puis (9.2) tracez le graphe de transitions entre ces 9 états.

Partie 2

Dans cette partie, nous allons nous intéresser à la situation où un nid de fourmis est proche de l'arbre et il y a surnombre de coccinelles, cette double condition restant satisfaite indéfiniment. Puisque les deux variables F et C restent constantes à 1, nous allons nous intéresser aux 9 états possibles engendrés par S et P lorsque $F = C = 1$.

De plus on considérera les valeurs de paramètres suivantes :

- $K_P = 0,\ K_{P,F} = 0,\ K_{P,S} = 0,\ K_{P,FS} = 0$
- $K_S = 0,\ K_{S,S} = 1,\ K_{S,P} = 0,\ K_{S,PS} = 2$

Exercice 10 : Dans ce contexte, (10.1) donnez le tableau des ressources en considérant uniquement les 9 états possibles des variables P et S puis (10.2) tracez le graphe de transitions entre ces 9 états.

Exercice 11 : (11.1) Écrivez une formule CTL apte à déterminer si la boucle $P \leftrightarrow S$ est fonctionnelle. *Indication :* sa fonctionnalité entraîne une oscillation. Vous aurez aussi à utiliser l'état caractéristique de la boucle.

(11.2) Cette formule est-elle vraie pour le graphe de transitions que vous avez construit en exercice 10 ?

Exercice 12 : On considère la formule CTL « $EF(AG(S = 2))$ », que l'on souhaite traiter par model checking sur le graphe de transitions que vous avez construit en exercice 10.

(12.1) Traduisez la formule en une formule équivalente mais sous une forme qui facilite le model checking.

(12.2) En étiquetant les états successivement par les sous-formules de votre formule traduite, comme le fait l'algorithme basique de model checking, déterminez tous les états qui satisfont cette formule. *Indication :* pour éviter de surcharger la figure, vous pouvez en faire une par sous-formule en utilisant la feuille jointe. Il suffit alors d'indiquer la sous-formule considérée et de hachurer les états qu'elle étiquette par l'algorithme de model checking. La feuille contient assez de figures successives utiles, sinon plus.

Exercice 13 : On considère maintenant des systèmes différentiels linéaires par morceau pour modéliser le même système. Pour cela, on se place encore dans le cas où il y a un nid de fourmis proche de l'arbre, et où il y a surnombre de coccinelles. Ainsi, on va considérer que les variables F et C sont constantes, au dessus de leur seuil respectif. La population de pucerons sera considérée comme une variable continue, et on fait l'hypothèse que S peut être encodée dans une variable continue qui possède deux seuils : le premier déclenchant l'auto-activation (via des voies métaboliques complexes, abstraites ici), l'autre déclenchant l'action positive sur les pucerons.

Écrivez les deux équations différentielles régissant P et S correspondant au système décrit par la figure du début de l'énoncé. Les variables continues représentant P et S seront notées x_P et x_S respectivement, les seuils de déclenchement des interactions seront notés θ_P^1, θ_P^2, θ_S^1 et θ_S^2 ; les constantes de synthèse seront notées κ avec des indices convenables et les constantes de dégradation γ_P et γ_S.

Exercice 14 : Ecrivez, *et justifiez*, les contraintes sur les paramètres du système d'équations différentielles pour qu'il soit cohérent avec le modèle discret construit à l'exercice 10.

Nom, prénom ou identifiant de votre copie :