

MODÈLES BIOLOGIQUES EN TEMPS CONTINU

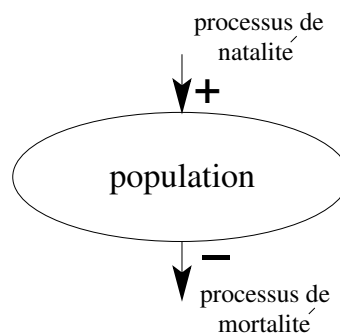
Projet 2 : Dynamiques de populations en interaction : des insectes au jardin

Mots-clé : Système dynamique, équations différentielles, intégration numérique de Euler, simulation

Description du projet

Les insectes phytophages représentent une menace majeure pour les plantes cultivées. Décrire et prédire l'évolution de leurs populations au cours du temps permet d'évaluer leur dangerosité réelle. Par ailleurs il est possible d'utiliser d'autres espèces d'insectes, qui sont entomophages, pour limiter l'impact des phytophages sur les plantes. On appelle cette méthode la lutte biologique et nous nous y intéresserons dans la seconde partie du projet en considérant un modèle simplifié des interactions entre les pucerons et les coccinelles.

Une des méthodes de modélisation en biologie se base sur la notion de “compartiments” et décrit leur évolution au cours du temps sur la base des “flux” qui en entrent et en sortent. Ainsi si l'on considère l'évolution au cours du temps d'une population d'une espèce d'insectes dans un jardin (“compartiment population”), nous avons le schéma suivant :



Première partie :

1. Un des premiers modèles décrivant l'évolution d'une population dans un environnement donné a été proposé par P.F. Verhulst au XIX^e siècle, c'est le modèle “logistique” :

$$\frac{dN(t)}{dt} = r \left(1 - \frac{N(t)}{k} \right) N(t) \quad (1)$$

avec $N(t)$ la taille de la population au temps t , r le taux de croissance intrinsèque de la population et k la “capacité d'accueil” de l'environnement. Initialement ce modèle visait à décrire des populations humaines mais est aussi adapté aux populations d'insectes.

Proposer une explication de ce modèle sur la base de la figure. Décrire la variation de $N(t)$ au cours du temps et selon les valeurs de N .

Vérifier que la solution de cette équation s'écrit :

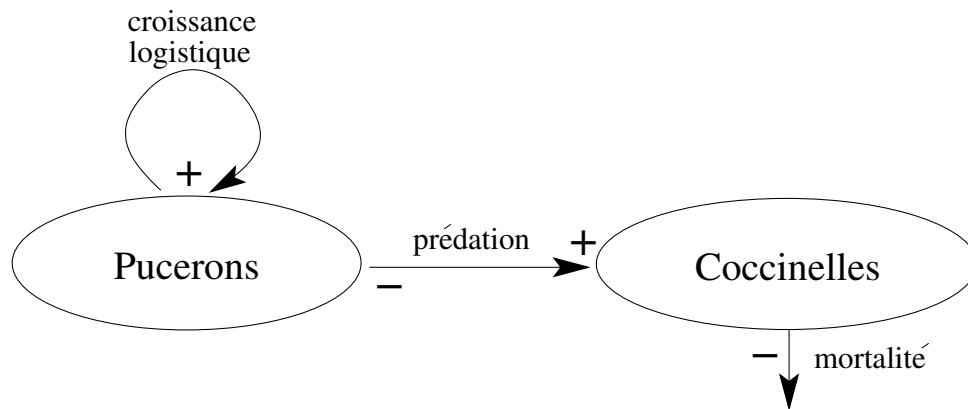
$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N(0)} - 1 \right) e^{-rt}}$$

Etudier cette fonction ; la tracer avec un logiciel de son choix (par exemple Scilab...). Que peut on dire de la valeur remarquable k ? Effectuer si nécessaire des recherches bibliographiques sur les notions d’“équilibre” et de “stabilité”.

2. Décrire un algorithme (en pseudo langage informatique) permettant de simuler le modèle (1) selon une méthode d'intégration numérique de Euler (effectuer si nécessaire quelques recherches sur le sujet).
Implémenter à l'aide d'un logiciel ou d'un langage informatique cet algorithme et le tester (tracer l'évolution de N au cours du temps). Augmenter le pas d'intégration de la méthode d'Euler ; quelles observations et conclusions en tirez vous ?
3. Se documenter sur les diagrammes en toile d'araignée pour les suites récurrentes d'ordre 1 (voir aussi "cobweb plots", diagramme de Verhulst, diagramme en escargot). Appliquer cette méthode à la suite définie par votre intégration numérique selon la méthode d'Euler.

Deuxième partie : deux populations d'insectes en interactions, la lutte biologique

Les pucerons sont des insectes phytophages qui causent des dégâts importants aux plantes qu'il consomment. Heureusement, ils ont des ennemis naturels comme par exemple les coccinelles, qui permettent de réguler leurs populations. Il s'agit d'un système proies-prédateurs que l'on peut représenter par le schéma compartimental suivant :



1. On propose le modèle de type "Lotka Volterra" qui décrit les dynamiques de populations de pucerons (notées P) et de coccinelles (notées C) et on omet la dépendance en t :

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = r \left(1 - \frac{P}{k}\right) P - \beta PC \\ \frac{dC}{dt} = \alpha \beta PC - mC \end{cases} \quad (2)$$

Justifier/interpréter la formulation de ce modèle et en calculer le ou les équilibres (faire attention aux valeurs des paramètres), puis proposer un algorithme permettant de simuler ce modèle grâce à la méthode d'Euler et effectuer des simulations ; les commenter avec l'oeil du biologiste. La valeur du pas d'intégration a-t-elle aussi une importance ici ?

2. Tracer des représentations graphiques des trajectoires C en fonction de P à l'aide du programme.
3. Calculer les isoclines nulles $\frac{dP}{dt} = 0$ et $\frac{dC}{dt} = 0$; les tracer dans le plan du point précédent. Ces courbes sont remarquables, essayer d'explicitier en quoi.
4. S'interroger sur les prédictions qui auraient pu être faites, ou pas, sans la partie simulation numérique.