

Le principe d'exclusion compétitive

Mots clefs : Systèmes dynamiques, équations différentielles, données réelles, identification de paramètres.

Description du projet

Ce projet se veut être une promenade épistémologique autour d'un grand classique de la modélisation en dynamique de populations, devenu un des principes les plus connus de l'écologie théorique. Il se penche d'abord sur le premier modèle décrivant la croissance d'une population et proposé par T. Malthus à la fin du XVIII^e siècle. Celui-ci sera suivi par le modèle "logistique", introduit par P.F. Verhulst au début du XIX^e siècle. Au début du XX^e siècle, les scientifiques s'intéressent à modéliser les interactions entre populations d'espèces différentes, et particulièrement entre deux espèces en compétition pour une ressource commune.

En suivant le développement historique des modèles (une seule population d'abord, populations en compétition ensuite) et en analysant leurs propriétés mathématiques, ainsi qu'en étudiant l'approche expérimentale conduite par G.F. Gause dans les années 1930, ce projet remontera aux sources de ce que l'on appelle aujourd'hui le "principe d'exclusion compétitive".

Partie 1 : une seule population

- (i) Le premier modèle de croissance de population a été proposé par Malthus à la fin du XVIII^e siècle :

$$\frac{dN(t)}{dt} = fN(t) - mN(t) \quad (1)$$

avec $N(t)$ la densité de la population au temps t , f le taux de fécondité de la population, et m le taux de mortalité. Analyser (par des moyens numériques, analytiques et/ou graphiques) le comportement du modèle selon les valeurs de f et m .

- (ii) Un des plus fameux modèles décrivant l'évolution d'une population a été proposé par P.F. Verhulst au XIX^e siècle, c'est le modèle "logistique" :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t) \left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) \quad (2)$$

avec r le taux de croissance intrinsèque de la population et K la "capacité d'accueil" de l'environnement. Se documenter et expliquer cette équation. Analyser son comportement en assimilant les notions d'équilibre, de stabilité et d'instabilité. (on pourra notamment s'aider d'un graphique $\frac{dN}{dt}$ en fonction de N).

- (iii) G.F. Gause a étudié dans les années trente la croissance des micro-organismes (paramécies) *Paramecium aurelia* et *P. audatum* au laboratoire. Se documenter sur ces organismes. Gause a élevé des populations de *P. aurelia* et de *P. audatum* dans deux récipients contenant le même milieu de culture. En prélevant chaque jour 0.5cm³ il a obtenu les données suivantes :

	<i>P. aurelia</i>	<i>P. caudatum</i>
0	2	2
1	—	—
2	14	10
3	34	10
4	56	11
5	94	21
6	189	56
7	266	104
8	330	137
9	416	165
10	507	194
11	580	217
12	610	199
13	513	201
14	593	182
15	557	192
16	560	179
17	522	190
18	565	206
19	517	209
20	500	196
21	585	195
22	500	234
23	495	210
24	525	210
25	510	180

Nombre de *P. aurelia* et de *P. audatum* dans 0.5cm^3 de milieu en fonction du nombre de jours depuis le début de l'expérience. (populations isolées).

A partir des données de Gause, identifier les paramètres r et K du modèle logistique pour chacune des deux espèces (on pourra se documenter sur l'identification des systèmes, les moindres carrés,...).

Partie 2 : populations en compétition

Une des premières familles de modèles proposée pour décrire les dynamiques de populations en interaction sont les modèles de "Lotka Volterra" proposés dans les années 20. Ces modèles postulent que les vitesses de variations des densités de populations *per capita* sont des fonctions linéaires des densités des populations. Le modèle le plus connu est un modèle proies-prédateurs, mais celui qui nous intéresse ici est un modèle de compétition entre deux espèces.

(i) Le modèle de compétition entre deux espèces de Lotka Volterra s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = r_1 N_1 \left(1 - \frac{N_1}{K_1}\right) - \beta_1 N_1 N_2 \\ \frac{dN_2}{dt} = r_2 N_2 \left(1 - \frac{N_2}{K_2}\right) - \beta_2 N_2 N_1 \end{cases} \quad (3)$$

vérifier qu'il s'agit bien d'un modèle de Lotka-Volterra, et interprétez la formulation des équations. En se renseignant sur les notions d'équilibre (en dimension 2), d'attractivité et de stabilité, de plan de phase, d'isoclines nulles, d'orientation du champs de vecteur, analyser le comportement de ce modèle. Énoncer un "principe d'exclusion compétitive". Est il nécessairement valable ?

(ii) Gause a aussi étudié la croissance de *P. aurelia* et *P. audatum* lorsqu'elles sont en compétition (c'est à dire élevées ensemble dans le même récipient). Il a obtenu les données suivantes.

	<i>P. aurelia</i>	<i>P. caudatum</i>
0	2	2
1	—	—
2	10	10
3	21	11
4	58	29
5	92	50
6	202	88
7	163	102
8	221	124
9	293	93
10	236	80
11	303	66
12	302	83
13	340	55
14	387	67
15	335	52
16	363	55
17	323	40
18	358	48
19	308	47
20	350	50
21	330	40
22	350	20
23	350	20
24	330	35
25	350	20

Nombre de P. aurelia et de P. caudatum dans 0.5cm³ de milieu en fonction du nombre de jours depuis le début de l'expérience (populations en compétition).

Tracer les données ; pensez vous être face à un cas d'exclusion compétitive ?

- (iii) identifiez les paramètres β_1 et β_2 du modèle de compétition entre deux espèces à partir des données de Gause. A partir de (i), concluez. Que pensez vous de l'adaptation du modèle (3) aux données ? Cherchez (au besoin en demandant à vos professeurs) des données complémentaires dans Gause (1934) ; recalculez les paramètres. En vous documentant, concluez par une discussion sur le principe d'exclusion compétitive.

Remarques :

- Tout au long du projet vous devrez faire appel à des logiciels pour tracer des courbes, et intégrer des équations différentielles. Le logiciel libre **Scilab** vous sera probablement très utile (il est installé sur les machines des salles de TDs).
- Le début de ce projet (partie 1, notamment) pourra bénéficier de discussions avec le groupe travaillant sur le projet “catastrophes pour les populations exploitées”.