

Cryptographie à clé publique

Bruno MARTIN,
 Université Côte d'Azur

1976 : Invention de Diffie et Hellman [2]; 1^{re} phrase prophétique :
We stand today on the brink of a revolution in cryptography.

Idée géniale : asymétrique; chiffrement \neq du déchiffrement.

- chiffrement par clé **publique** (pk)
- déchiffrement avec clé **privée** (sk)

Utile pour distribuer les clés : publiées dans un annuaire

Le principe de Kerckhoff (1883) est d'autant plus d'actualité

La sécurité d'un chiffre ne doit pas dépendre du secret de l'algorithme mais seulement du secret de la clé.

Fonction à sens unique

Soit M et C deux ensembles et $f : M \rightarrow C$. $f(M)$: image de l'ensemble M par f . f est à **sens unique** (OW) si

- pour tout x de M , il est facile de calculer $f(x)$ (f calculable en temps polynomial) et
- il est difficile de trouver, pour la plupart des $y \in f(M)$ un $x \in M$ tel que $f(x) = y$ (problème « difficile » [4, 5, 1]).

Mais, s'il est difficile de trouver, pour la plupart des $y \in f(M)$ un $x \in M$ tel que $f(x) = y$, déchiffrer aussi difficile que cryptanalyser ! Autre notion nécessaire pour permettre le déchiffrement et rendre la cryptanalyse aussi difficile que possible.

→ Notion de trappe.

Fonction à sens unique à trappe

$f : M \rightarrow C$ à sens unique est à **trappe** si le calcul dans le sens inverse est efficace en connaissant la trappe (secrète).

La trappe permet de construire une fonction g telle que $g \circ f = Id$. Calcul dans le sens direct est facile et dans le sens inverse, calculatoirement impossible sans connaître g .

- construire des couples (f, g) doit être facile
- publier f ne doit rien révéler sur g

C'est là qu'on retrouve formalisée l'idée d'utiliser deux algorithmes (ou 2 clés) différents, un pour chiffrer f et un pour déchiffrer g .

Définition PKC

Définition

Un chiffre à clé publique est un triplet PPT $\Pi = (Gen, Enc, Dec)$:

- $Gen : 1^n \rightarrow (pk, sk)$ resp. clé publique et privée tq $|pk| \approx |sk| \approx n$.
- $Enc : c \leftarrow Enc_{pk}(m)$ où $m \in M(pk)$ (probabiliste)
- $Dec : m := Dec_{sk}(c)$ (déterministe)

On demande que $Dec_{sk}(Enc_{pk}(m)) = m$ pour tous les $m \in M$ et toutes les clés (pk, sk) produites par Gen .

Formalisation OW

Définition (OW)

$f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ est à sens unique si :

- il existe un algo en temps polynomial pour calculer $f(x)$
- pour tout adversaire A PPT, il existe $negl$. tq :

$$Pr[Invert_{A, f}(n) = 1] \leq negl(n)$$

$Invert_{A, f}(n)$ formalise l'attaque contre OW f :

- 1 $m \xleftarrow{\mu} \{0, 1\}^n ; c := f(m)$
- 2 A reçoit 1^n et c et renvoie m'
- 3 A réussit (i.e. renvoie 1) ssi $f(m') = c$

Sécurité calculatoire : exemple factorisation

Cryptanalyste doit faire plus de calculs que la durée de vie du clair.

- Donné $n = pq$
- trouver p (et q).

Année	$\log_2(\#Op.)$	$\log_2(n)$	1 MIPS (années)	500 MIPS (années)
< 2000	64	768	2^{19}	2^{10}
< 2010	80	1024	2^{35}	2^{26}
< 2020	112	2048	2^{67}	2^{58}
< 2030	128	3072	2^{83}	2^{74}

NB : 2^{80} opérations correspond à 2^{35} ans (1 MIPS). Pour info, un i7 développe au max 318 MIPS et certains i9 4000 MIPS.

Défis de factorisation jusqu'à 2009 jusqu'à RSA-768 (232 chiffres).

Sécurité prouvée : preuves par réduction

- Hypothèse : le problème algorithmique Π est difficile (pas algo poly. sauf...) avec $\Pi = \text{RSA, DLP, DDH, CDH, ...}$
- Réduction :
 - si un adversaire A PPT casse le chiffre
 - alors on peut utiliser A pour résoudre Π en temps poly.
- résultat de sécurité : il n'existe pas d'adversaire PPT.

Expérience IND-CPA : $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}$

- 1 Gen(1^n) produit (pk, sk)
- 2 l'adversaire A reçoit pk et a accès à (l'oracle) $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$. A retourne $m_0, m_1 \in M(pk)$ de même long.
- 3 $b \leftarrow \{0, 1\}$; calculer $c \leftarrow \text{Enc}_{pk}(m_b)$ et envoyer c à A : le défi chiffré
- 4 A a toujours accès à $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$. et retourne un bit b'
- 5 A réussit l'expérience (i.e. renvoie 1) ssi $b = b'$

IND-CPA exprime le fait qu'il est impossible de distinguer quel message a été chiffré et souligne le fait qu'il faut un chiffrement probabiliste !

Expérience IND-EAV : $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{EAV}}$

- 1 Gen(1^n) produit (pk, sk)
- 2 l'adversaire A reçoit pk et un accès à (l'oracle) $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$. A retourne $m_0, m_1 \in M(pk)$ de même long.
- 3 $b \leftarrow \{0, 1\}$; calculer $c \leftarrow \text{Enc}_{pk}(m_b)$ et envoyer c à A : le défi chiffré
- 4 ~~A a toujours accès à $\text{Enc}_{pk}(\cdot)$. et retourne un bit b'~~
- 5 ~~A réussit l'expérience (i.e. renvoie 1) ssi $b = b'$~~

qui est équivalente à $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}$

Définition de la sécurité

Définition

Π est IND-CPA si, pour tout adversaire A PPT, il existe $\text{negl}(\cdot)$ tq :

$$\Pr(\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}(n) = 1) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

L'oracle de chiffrement n'est pas nécessaire, donc si Π IND-EAV, alors Π IND-CPA.

Le premier chiffre à clé publique

Inventé en 1978 par Rivest Shamir et Adleman.
Ils cherchaient une contradiction au concept de clé publique.
Après beaucoup d'efforts, ils sont finalement parvenus au résultat inverse et ont été récompensés du Turing Award en 2002 !
http://www.acm.org/awards/turing_citations/rivest-shamir-adleman.html

Le chiffre de Rivest Shamir et Adleman (1978)

RSA

Repose sur la difficulté calculatoire de factoriser un entier **et** sur la difficulté calculatoire de dire si un nombre est premier.
 Par exemple, 1829 est-il premier ?

Non : on vous donne 31 et 59, on vérifie en les multipliant que 1829 est leur produit, mais les trouver est beaucoup plus difficile. Surtout qu'on ne connaît pas a priori le nombre de facteurs premiers de 1829.

Ou bien, 7919 est-il composé ?

Non, mais le certificat de primalité est plus « difficile » à exhiber.

Rappels mathématiques

Indicatrice d'Euler d'un entier n notée $\varphi(n)$: nombre d'entiers compris entre 1 et n premiers avec n . On a $\varphi(1) = 1$ et pour p premier, $\varphi(p) = p - 1$.

$$\varphi(n) = \text{card}\{j \in \{1, \dots, n\} : \text{gcd}(j, n) = 1\}$$

Calcul : décomposer $n = \prod_{p|n, p \text{ premier}} p^{\alpha_p}$ alors,
 $\varphi(n) = \prod_{p|n, p \text{ premier}} (p^{\alpha_p} - p^{\alpha_p - 1}) = n \prod_{p|n} (1 - \frac{1}{p})$.

Exemple

$$\varphi(12) = (4 - 2)(3 - 1) = 12(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) = 4$$

Petit théorème de Fermat - Euler

On utilise le théorème d'Euler :

Théorème (Fermat-Euler)

$$m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n} \text{ si } \text{gcd}(m, n) = 1$$

qui généralise le petit théorème de Fermat :
 Pour p premier, tout entier m vérifie :

$$m^p \equiv m \pmod{p}$$

et si $p \nmid m$,

$$m^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Théorème Chinois des restes

Théorème

Soit n_1, \dots, n_k et x_1, \dots, x_k entiers tq pour toute paire (i, j) , on a

$$x_i \equiv x_j \pmod{\gcd(n_i, n_j)}$$

Il existe $x \in \mathbb{N}$ tq $x \equiv x_i \pmod{n_i}$ pour $1 \leq i \leq k$. De plus, x est unique modulo le ppcm de n_1, \dots, n_k .

Corollaire

Soit n_1, \dots, n_k premiers 2 à 2. Alors, pour tout entier x_i , il existe un unique entier x modulo $\prod n_i$ tq

$$x \equiv x_i \pmod{n_i} \quad 1 \leq i \leq k$$

Algorithme de calcul

Input : $x_i, n_i \quad 1 \leq i \leq n$

$$n = \prod_{i=1}^k n_i$$

for $i = 1$ à k **do**

calculer n/n_i

$$\gcd(n/n_i, n_i) =$$

$$= s_i \frac{n}{n_i} + t_i n_i = 1$$

$$c_i = x_i s_i \pmod{n_i}$$

end for

Output : $\sum_{i=1}^k c_i \frac{n}{n_i}$

i	1	2	3	
x_i	2	3	2	
n_i	3	5	7	$n = 105$
$\frac{n}{n_i}$	35	21	15	
\gcd	-1.35	1.21	1.15	
	12.3	-4.5	-2.27	
$s_i x_i$	-2	3	2	
mod	-2	3	2	
$c_i \frac{n}{n_i}$	-70	63	30	$x = 23$

Qiu JiuShao : combien l'armée de Han Xing a-t-elle de soldats si, rangés en 3 colonnes, il en reste 2, par 5 colonnes, il en reste 3 et par 7 colonnes, il en reste 2 ?

Factorisation et primalité : Crible d'Eratosthène

Problème

INSTANCE : Un entier n

QUESTION : n est-il premier ?

Problème algorithmique par excellence. Très étudié.

Nombreux critères permettent de vérifier si un entier n est premier.

On divise n par tous les entiers impairs compris entre 3 et $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

Méthode connue depuis l'antiquité et efficace pour $n < 10^{12}$.

Crible d'Eratosthène en $O(\sqrt{n})$.

Pas polynomial ! Complexité en temps n'est pas polynomiale en la longueur de l'entrée, en $\log(n)$. Il est **pseudo polynomial**.

Test de Lucas

Définition

Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ tq $\gcd(a, n) = 1$, l'ordre multiplicatif de a mod n est le plus petit entier k tq $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ (ou $a^k - 1 | n$).

Théorème

n est premier ssi $\exists g \in \mathbb{Z}_n^*$ tel que $g^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et $g^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \pmod{n}$ pour tout p facteur premier de $n-1$.

Preuve [6] pour n premier, g primitif modulo n remplit la condition. Réciproquement, si un tel g existe, alors l'ordre de g dans \mathbb{Z}_n^* est forcément $n-1$. Or, tout élément de \mathbb{Z}_n^* est d'ordre un diviseur de $\varphi(n)$; comme $\varphi(n) \leq n-1$, on a $\varphi(n) = n-1$, équivalent à n premier. \square

On en déduit le test de primalité de Lucas. Il permet de construire un algorithme non-déterministe en temps polynomial. Primalité \in NP.

Et le complémentaire de Primalité ?

La reconnaissance des nombres composés est dans NP ; construire p.e. un algorithme de type deviner/vérifier pour leur factorisation. Plus précisément, on considère le problème FACTM des facteurs majorés.

Problème

INSTANCE : *Un entier n et un nombre $M \leq n$.*

QUESTION : *Existe-t-il un diviseur de n inférieur à M ?*

La difficulté de factoriser équivaut à la difficulté de décider FACTM. En effet, si $\text{FACTM} \in P$, n se factorise en temps poly. par dichotomie : on cherche s'il y a un facteur de n dans l'intervalle $[1, \sqrt{n}]$ en résolvant FACTM avec $M = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; s'il n'y en a pas, n est premier. S'il y en a, on cherche si n a un facteur dans $[1, \sqrt{n}/2]$, sinon on cherche s'il a un facteur dans l'intervalle $[\sqrt{n}/2, \sqrt{n}]$ etc. En conséquence,

Théorème (Pratt)

PRIMALITÉ $\in NP \cap \text{co-NP}$.

Primes $\in P$, Agrawal, Kayal et Saxena (2002)

A partir de l'identité :

$$\text{si } \gcd(a, p) = 1, \quad [(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p} \Leftrightarrow p \text{ premier}]$$

AKS ont construit un **algo. dét. de test de primalité**.

Pour p premier, choisir $P(x) = x - a$ et tester l'équation précédente. Coûteux en temps dans le pire des cas !

Amélioration : évaluer la congruence modulo $x^r - 1$ pour un premier r bien choisi (dans l'anneau $\mathbb{F}_p[x]/x^r - 1$). Une itération de l'algorithme sera :

$$(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{(x^r - 1, p)}$$

Et de vérifier cette nouvelle congruence pour un petit nombre de valeurs de a (de l'ordre de $O(\sqrt{r} \log p)$).

Preuve de l'identité

$$\text{si } \gcd(a, p) = 1, \quad [(x - a)^p \equiv (x^p - a) \pmod{p} \Leftrightarrow p \text{ premier}]$$

Si p premier, $p \mid \binom{p}{r} = \frac{p(p-1)!}{r!(p-r)!}$ pour $1 \leq r \leq p-1$ et $(x - a)^p \equiv (x^p - a^p) \pmod{p} \equiv x^p - a \pmod{p}$ par Fermat-Euler. Réciproquement, supposons p composé. Alors il existe q premier diviseur de p et soit q^k la plus grande puissance de q qui divise p . q^k ne divise pas $\binom{p}{q} = \frac{p!}{q!(p-q)!} = \frac{q^k \alpha (p-1)!}{q(q-1)!(p-q)!}$ et q^k est premier avec a^{p-q} . Le coefficient de x^q dans le développement de $(x - a)^p$ n'est pas nul alors qu'il l'est dans le membre droit de l'identité, une contradiction.

Entrée : un entier $n > 1$

Si n est de la forme $a^b, b > 1$ **alors** n est COMPOSE **fsi**

$r \leftarrow 2$

Tantque $r < n$ **faire**

Si $\gcd(n, r) \neq 1$ **alors** n est COMPOSE **fsi**

Si r est premier ≥ 2 **alors**

soit q le plus grand facteur premier de $r - 1$;

Si $(q \geq 4\sqrt{r} \log n)$ **et** $(n^{\frac{r-1}{q}} \not\equiv 1 \pmod{r})$ **alors** ARRET ;

fsi

$r \leftarrow r + 1$

ftq

Pour $a \leftarrow 1$ **jusqu'à** $2\sqrt{r} \log n$ **faire**

Si $(x - a)^n \not\equiv (x^n - a) \pmod{(x^r - 1, n)}$ **alors** n est COMPOSE **fsi**

fpour

n est PREMIER

Exponentiation modulaire pour calculer $a^b \pmod n$

A la main

Algorithme

Exponentiation modulaire (a, b, n)
 $d \leftarrow 1$;
 Soit $\langle b_k, b_{k-1}, \dots, b_0 \rangle$ la représentation binaire de b
Pour $i \leftarrow 0$ **jusqu'à** k **faire**
 $d \leftarrow (d \cdot d) \pmod n$;
 si $b_i = 1$ **alors**
 $d \leftarrow (d \cdot a) \pmod n$;
renvoie d

```

1 def expMod(a, b, n):
2   d = 1
3   for i in bin(b)[2:]:
4     d = (d*d) % n
5     if i == '1': d = (d*a) % n
6   return d
    
```

$$17^{71} \pmod{133} = \langle 1000111 \rangle$$

i	b_i	17^{2^i}	$17^{2^i} \pmod{133}$	valeur
0	1	17	17 mod 133	17
1	1	17^2	289 mod 133	23
2	1	23^2	529 mod 133	130
3	0	130^2	16900 mod 133	9
4	0	9^2	81 mod 133	81
5	0	81^2	6561 mod 133	44
6	1	44^2	1936 mod 133	74

$$\text{et } 17^{71} = 17 \cdot 17^2 \cdot 17^{2^3} \cdot 17^{2^6} = 17 \cdot 23 \cdot 130 \cdot 74 \pmod{133} = 47.$$

Chiffrement RSA

Preuve de RSA

- 1 choisir p et q premiers assez grands -de l'ordre de 10^{100}
- 2 fixer $n = pq$ et publier n
- 3 calculer $\varphi(n) = (p-1)(q-1)$
- 4 choisir et publier $e / \gcd(e, \varphi(n)) = 1$ (clé publique, encipher)
- 5 calculer d tq $d \cdot e \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ (clé privée, decipher)

Chiffrer : $E : M \mapsto M^e \pmod n$.

Déchiffrer : $D : C \mapsto C^d \pmod n$ (d est la trappe).

Implémentations : logicielles, matérielles et même mixtes.

Sur des cartes dédiées, RSA environ 1000 fois plus lent que DES.

Avec $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$,

$$M^{ed} \equiv M^{k\varphi(n)+1} \pmod n$$

Par Euler, $M^{\varphi(p)} \equiv 1 \pmod p \Rightarrow M^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ si

$$\gcd(M, p) = 1$$

Et comme $(p-1) | \varphi(n)$,

$$M^{k\varphi(n)+1} \equiv M \pmod p$$

(trivialement vrai si $M \equiv 0 \pmod p$)

De même pour q :

$$M^{k\varphi(n)+1} \equiv M \pmod q$$

(trivialement vrai si $M \equiv 0 \pmod q$)

$$\text{On a : } M^{ed} \equiv M \pmod{pq}$$

Exemple

A et B utilisent RSA avec $n = 133$. La clé publique de A est 35.

- 1 quelle est sa clé privée ?
- 2 si le chiffré reçu par A est 17, retrouver le clair. (Les messages sont compris entre 0 et $n - 1$).

Exemple

A et B utilisent RSA avec $n = 133$. La clé publique de A est 35.

- 1 quelle est sa clé privée ?
- 2 si le chiffré reçu par A est 17, retrouver le clair. (Les messages sont compris entre 0 et $n - 1$).

Clé privée de A ? Factoriser n en produit de 2 premiers ; on trouve $n = 133 = 7 \times 19$. $\varphi(133) = 6 \cdot 18 = 108$.
 Les premiers nombres premiers sont 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19...
 Avec $e = 35$, $d \equiv e^{-1} \pmod{\varphi(n)}$. Euclide (35, 108) donne les coefs de Bezout $(-37, 12)$. D'où $d = -35 = 108 - 37 = 71 \pmod{108}$.
Cryptanalyse de A = 17, il suffit de calculer $17^{71} \pmod{133} = 47$

Textbook RSA

- $\text{Gen}(1^\tau)$ construit p, q premiers tq $|p| = |q| \approx \frac{1}{2\epsilon^3} \tau^3$ et donne $\text{pk}=(e, n)$ et $\text{sk}=(p, q, n, e, d)$ (c petite constante $\approx 8^1$).
- $\text{Enc}_{\text{pk}}(m)$ pour $m \in \{0, 1\}^*$ découpe m en $|m|/(|n| - 1)$ blocs de $|n| - 1$ bits en on applique le chiffre à chaque m_i
- $\text{DEC}_{\text{sk}}(c)$ déchiffre bloc par bloc les c_i

Hypothèse (hypothèse RSA)

Calcul infaisable : pour un τ assez grand, le calcul de m sur l'entrée $((e, n), c)$ avec RSA défini comme précédemment et $m \xleftarrow{\mathcal{U}} \mathbb{Z}_n^*$.

Correspond à la définition de OW.

[Retour def. OW](#)

1. valeur de c fixée par algo. de factorisation

Attaque sur les paramètres

Cycles : Eve observe $c = m^e \pmod{n}$; elle essaye de trouver ν t.q.

$$c^{e^\nu} \equiv c \pmod{n} \Leftrightarrow e^\nu \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$$

Ce qui permet de trouver $m \equiv c^{e^{\nu-1}} \pmod{n}$

En effet $c^{e^\nu} \equiv c \pmod{n} \Leftrightarrow c^{e^\nu-1} \equiv 1 \pmod{n}$ et, par d'Euler, on a $e^\nu - 1 \equiv 0 \pmod{\varphi(n)} \Leftrightarrow e^\nu \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$. Comme $c = m^e \pmod{n}$ et $de \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$, on peut prendre $d = e^{\nu-1}$.

Exemple

Publics : e et n , 35 et 133. Eve intercepte $c = 69$ et calcule

i	2	3	4
c^{e^i}	69	27	69

Il n'y a plus qu'à « lire » m pour $i = 3$, soit 27 (cycle de long. 2).

Exposant commun (Low exponent attack)

On n'a pas toujours besoin de factoriser n

- dans le cas où le clair m est chiffré par des PK $(e, n_1), (e, n_2), (e, n_3) \dots$ avec un même e .

$$c_1 = m^e \pmod{n_1}, \quad c_2 = m^e \pmod{n_2}, \quad c_3 = m^e \pmod{n_3}$$

- possible de retrouver m à partir des chiffrés
- des implémentations de RSA utilisent $e = 3$ (ou 65537 ss1)

Eve peut retrouver m ainsi en supposant les n_i premiers 2 à 2 (sinon Eve pourrait factoriser l'un des n_i). Par le Th. Chinois des restes, Eve calcule $c = m^3 \pmod{n_1 n_2 n_3}$. Comme $m < n_1, n_2, n_3$, $m < n_1 n_2 n_3$ d'où $c = m^3$ qui devient une équation sur \mathbb{N} . m peut être retrouvé en calculant la racine cubique de c .

Correctif : utiliser du padding.

Module n commun

On distribue un message commun à deux utilisateurs. m est envoyé aux deux utilisateurs de paramètres publics respectifs (e_1, n) et (e_2, n) qui vérifient $\gcd(e_1, e_2) = 1$.

Fred intercepte m^{e_1} et m^{e_2} . Il ne lui reste plus qu'à calculer avec Euclide étendu $u, v \in \mathbb{N}$ tq $ue_1 + ve_2 = 1$ le clair :

$$(m^{e_1})^u (m^{e_2})^v \equiv m \pmod{n}$$

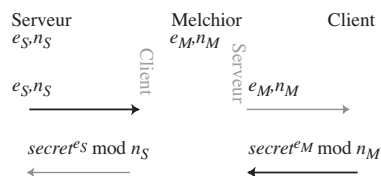
Exemple

le module partagé est 143 et les exposants de chiffrement respectifs sont $e_1 = 17$ et $e_2 = 19$. On distribue $m = 123$ en envoyant $123^{17} = 106$ au premier utilisateur et $123^{19} = 72$ au second. Fred calcule alors les coefficients de Bezout du $\text{pgcd}(17, 19) = (9, -8)$ et retrouve $m = 106^9 72^{-8} \pmod{143} = 123$.

L'attaque de l'homme du milieu ("man in the middle")

Porte sur la communication des clés.

- Bob (client) demande ses paramètres publics à Alice (serveur)
- Alice envoie (e_S, n_S) à Bob
- Melchior intercepte (e_S, n_S) et envoie ses paramètres (e_M, n_M)
- Bob chiffre en utilisant à son insu (e_M, n_M) et envoie c
- Melchior intercepte le message c et le déchiffre en secret
- Melchior rechiffre secret avec (e_S, n_S) et le transmet à Alice...



Ah ! si Bob avait pu s'assurer de l'identité d'Alice.

Attaque à $\varphi(n)$ connu

Connaître $(n, \varphi(n))$ revient à connaître la factorisation de n [4].

En effet, en posant : $\begin{cases} n = pq \\ \varphi(n) = (p-1)(q-1) \end{cases}$ et $q = \frac{n}{p}$:

$$\varphi(n) - (p-1) \left(\frac{n}{p} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 + p(\varphi(n) - n - 1) + n = 0$$

équation du second degré de solutions p et q .

Calcul de $\varphi(n)$ aussi difficile que la factorisation de n .

Exemple

Connus $n = p \cdot q = 133$ et $\varphi(n) = 108$. On pose

$$\varphi(n) - (p-1) \left(\frac{n}{p} - 1 \right) = 0 \Leftrightarrow p^2 + p(\varphi(n) - n - 1) + n = 0$$

Soit $p^2 + p(108 - 133 - 1) + 133 = 0 \Leftrightarrow p^2 - 26 \cdot p + 133 = 0$ de discriminant $\Delta = (-26)^2 - 4 \cdot 133 = 144 = 12^2$ et de solutions $p = \frac{26 \pm 12}{2} = \{19, 7\}$.

Sûreté calculatoire

RSA est aussi sûr que la factorisation de n est difficile.
 Complexité de quelques « bons » algorithmes de factorisation :

crible quadratique	$O(e^{((1+o(1))\sqrt{\log n \log \log n})})$
courbes elliptiques	$O(e^{((1+o(1))\sqrt{2 \log p \log \log p})})$
crible algébrique	$O(e^{((1,92+o(1))(\log n)^{1/3}(\log \log n)^{2/3})})$

(p : plus petit facteur premier de n).

Sécurité sémantique

Pour qu'un chiffre à clé publique soit sémantiquement sûr (IND-CPA ou IND-EAV), il faut que l'adversaire (avec une puissance calculatoire limitée) soit incapable d'obtenir des informations significatives sur le clair à partir de la donnée du chiffré et de la clé publique.

La sécurité sémantique considère un adversaire « passif » qui observe les chiffrés.

Insécurité prouvée de RSA

- RSA n'est pas sémantiquement sûr
- $Enc_{pk}(m)$ révèle des informations sur m !
 - il suffit de connaître le symbole de Jacobi de m^2 :

$$\left(\frac{m^e}{n}\right) = \left(\frac{m^e}{p}\right)\left(\frac{m^e}{q}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{q}\right) = \left(\frac{m}{n}\right)$$

- vient du fait que le chiffrement par RSA est déterministe !
- pourquoi un chiffrement déterministe empêche-t'il la sécurité sémantique ?

Plus de détails en suivant le [lien](#)

2. permet de décider si un entier modulaire n'est pas un carré

Correctif de sécurité RSA-OAEP

Utiliser du random padding comme OAEP (1995) permet de contrer les attaques "low exponent".
 Optimal Asymmetric Encryption Padding est une forme de chiffre de Feistel qui utilise une source aléatoire et 2 fonctions de hachage (oracle aléatoire).

Pour un clair M , un aléa r et g, h deux fonctions de hachage :

$$OAEP(M) = (M \oplus g(r)) || (r \oplus h(M \oplus g(r)))$$

Retrouver M connaissant, n la longueur de M :

- découper $OAEP(M)$ en B_1 de longueur n et B_2
- $r = h(B_1) \oplus B_2$
- $M = B_1 \oplus g(r)$

Utilisé avec RSA, c'est RSA-OAEP, prouvé sémantiquement sûr.
 Mais avec quelles fonctions de hachage ? (celles de la famille SHA)

Distinguabilité

- contredire IND-CPA : Ciphertext Distinguishability Pb (CDP)
- chiffre sémantiquement sûr si CDP est infaisable
- (attaquant peut avoir à sa disposition un dictionnaire clair/chiffrés et choisir le défi parmi eux.)

Plan

- 1 Cryptographie à clé publique
- 2 RSA
 - Rappels
 - Factorisation, primalité
 - Fonctionnement
- 3 Logarithme discret
- 4 Chiffre d'ElGamal

Un autre problème difficile

DLP : problème du logarithme discret de y en base g

Problème

INSTANCE : $g, y \in G$, groupe fini

QUESTION : trouver x tel que $g^x \equiv y$ dans G

ou, pour p un grand premier, g un générateur de $G = \mathbb{Z}_p^*$,

$$g^x \equiv y \pmod{p} \text{ et } x = \log_g(y) \pmod{p}$$

Plus généralement, tout $y \in G$ possède un logarithme discret en base g ssi G cyclique de générateur g .

Exemple

Soit $G = \mathbb{Z}_7^*$ groupe cyclique, d'ordre 6.

- en base 2, seuls 1, 2 et 4 possèdent un logarithme discret ;
- en base $g=3$, on obtient le tableau :

nombre y	1	2	3	4	5	6
logarithme	6	2	1	4	5	3

Par exemple, pour nombre = 1 et log = 6, cela signifie que $\log_3 1 = 6$ (dans G), ce qu'on vérifie par $3^6 \pmod{7} = 1$.

Calcul du logarithme discret – Shanks

S'applique à tout groupe fini G .

Complexité en temps $O(\sqrt{|G|} \log |G|)$ en espace $O(\sqrt{|G|})$

Idée : construire deux listes de puissances de g :

- une liste de petits pas $\{g^i : i = 0.. \lceil \sqrt{n} \rceil - 1\}$ avec $n = |G|$
- une liste de pas de géant $\{y(g^{-\lceil \sqrt{n} \rceil j}) : j = 0.. \lceil \sqrt{n} \rceil\}$.

Puis trouver un terme commun aux 2 listes. Ainsi,

$$g^{i_0} = y(g^{-j_0 \lceil \sqrt{n} \rceil}) \text{ et } m = i_0 + j_0 \lceil \sqrt{n} \rceil$$

Calcul du log. discret de groupes de faible cardinalité facile, opération difficile quand le cardinal de G croît.

Exemple

On travaille dans $\mathbb{Z}_{113}^\times = \langle 3 \rangle$ d'ordre $n = 112$; $\sqrt{n} = r = 11$. On cherche le logarithme discret de $y = 57$ en base $g = 3$:

Liste (non ordonnée) des petits pas, forme (exposant, valeur) :

$$B = \{(0, 1), (1, 3), (2, 9), (3, 27), (4, 81), (5, 17), (6, 51), (7, 40), (8, 7), (9, 21), (10, 63)\}$$

Liste (non ordonnée) des pas de géant, forme (exposant, valeur) :

$$L = \{(0, 57), (1, 29), (2, 100), (3, 37), (4, 112), (5, 55), (6, 26), (7, 39), (8, 2), (9, 3), (10, 61), (11, 35)\}$$

3 valeur commune aux 2 listes, engendré pour $i_0 = 1$ dans B et $j_0 = 9$ dans L . Le logarithme discret est $x = i_0 + r \cdot j_0 = 100$.

Vérification : on calcule $g^x \bmod 113 = 57$.

```

1  from sympy import *
2  g, n, r, y = 3, 113, 11, 57
3  B = [(i, pow(g, i, n)) for i in range(r)]
4  L = [(j, y * gcdex(pow(g, j * r, n), n)[0] % n) for j in range(r + 1)]
5  B = sorted(B, key=lambda x: x[1])
6  L = sorted(L, key=lambda x: x[1])
7  print(B, L)

```

[(0, 1), (1, 3), (8, 7), (2, 9), (5, 17), (9, 21), (3, 27), (7, 40), (6, 51), (10, 63), (4, 81)]

[(8, 2), (9, 3), (6, 26), (1, 29), (11, 35), (3, 37), (7, 39), (5, 55), (0, 57), (10, 61), (2, 100), (4, 112)]

```

1  1+r*9

```

100

Shanks

Algorithme :

Entrée : n le cardinal de G , g et $y \in G$

Sortie : logarithme discret de y en base g dans G . $r := \lceil \sqrt{n} \rceil$

Construire la liste $B := \{g^i : i = 0.. \lceil \sqrt{n} \rceil - 1\}$

Construire la liste $L := \{y(g^{-\lceil \sqrt{n} \rceil j}) : j = 0.. \lceil \sqrt{n} \rceil\}$

Trier les listes B et L selon un ordre sur les g^i et les g^{-rj} .

Trouver i_0 et j_0 tel que : $g^{i_0} = y g^{-rj_0}$.

RETURN($i_0 + j_0 r$).

Preuve :

Pour $r = \lceil \sqrt{n} \rceil$, on a :

Construction des listes : $r + 1 + r$ opérations de groupes : $O(r)$

Tri des listes : $O(r \log(r))$

Recherche d'un même élément dans deux listes triées : $O(\log(r))$ \square

Plan

Le chiffre d'El Gamal [3]

- 1 Cryptographie à clé publique
- 2 RSA
 - Rappels
 - Factorisation, primalité
 - Fonctionnement
- 3 Logarithme discret
- 4 Chiffre d'ElGamal

Repose sur DLP.

- 1 choisir p premier t.q. DLP est difficile dans \mathbb{Z}_p^*
- 2 choisir un générateur $\alpha \in \mathbb{Z}_p^*$
- 3 choisir $2 \leq a < p - 1$, la **clé privée**
- 4 calculer $\beta \equiv \alpha^a \pmod{p}$
- 5 **clé publique** : p, α, β .

Chiffrer : $E : (x, k) \mapsto (y_1 = \alpha^k \pmod{p}, y_2 = x\beta^k \pmod{p})$

pour k aléatoire secret de \mathbb{Z}_{p-1}^*

Déchiffrer : $(y_1, y_2) \mapsto y_2(y_1^a)^{-1} \pmod{p}$

ElGamal Rockstar

Fonctionnement

Alice écrit à Bob en utilisant $pk = (p, \alpha, \beta)$

$$E : (x, k) \mapsto (y_1 = \alpha^k \pmod{p}, y_2 = x\beta^k \pmod{p})$$

k aléatoire secret de \mathbb{Z}_{p-1}^* (on a donc un chiffrement probabiliste).

Clair x est « masqué » par β^k .

Valeur de α^k transmise comme partie du chiffré comme y_1 .

Bob, avec sk a , calcule $\beta^k = \alpha^{ak}$. Comme $\beta = \alpha^a$, il calcule $(\alpha^k)^a = \beta^k$. Reste à multiplier y_2 par $(\beta^k)^{-1} \pmod{p} = x$.

Observons que le chiffré est deux fois plus long que le clair.

Exemple

Soit $p = 2579, \alpha = 2, a = 765, \beta = 2^{765} \pmod{2579} = 949$.

Alice veut transmettre $x = 1299$ à Bob.

Elle choisit $k \in \mathbb{Z}_{p-1}^* = 853$ et calcule (mod 2579) :

$$y_1 = 2^{853} = 435 \quad y_2 = 1299 \cdot (949)^{853} = 2396$$

Bob reçoit (435, 2396) et connaît $a = 765$. Il calcule $(y_1)^a \pmod{p} = 435^{765} \pmod{2579} = 2424$, cherche l'inverse mod p par Euclide étendu : $(2424, 2579) = -599 \cdot 2424 + 563 \cdot 2579 = 1 \Leftrightarrow (\beta^k)^{-1} = -599 = 1980$.

Puis il calcule $2396 \cdot 1980 \pmod{2579} = 1299$.

Difficulté du logarithme discret

$G = \langle g \rangle$ d'ordre $p - 1$, $\forall y \in G, \exists ! x : g^x = y$ (on note $x = \log_g y$)
DLP : donnés g, y , calculer x dans G .

\mathcal{G} algo polytime : entrée 1^n retourne $G = \langle g \rangle$ d'ordre $p - 1$.
Expérience $DLog_{A, \mathcal{G}}(n)$:

- lance $\mathcal{G}(1^n)$ pour avoir (G, p, g) (générateur de groupe)
- $y \xleftarrow{\mu} G$
- A reçoit (G, p, g, y) et retourne x
- résultat expérience 1 si $g^x = y$ sinon 0

Définition (Hypothèse DH)

DLP est difficile pour \mathcal{G} si pour tout algo A PPT, il existe $negl$:
 $Pr(DLog_{A, \mathcal{G}}(n) = 1) \leq negl(n)$

Les problèmes CDH et DDH permettent de construire de bons \mathcal{G}

Computational Diffie Hellman CDH

$$\langle g \rangle = G \quad y_1, y_2 \in G \quad DH_g(y_1, y_2) \stackrel{\Delta}{=} g^{\log_g y_1 \log_g y_2}$$

$$y_1 = g^x \quad y_2 = g^z \Rightarrow DH_g(y_1, y_2) = g^{xz} = (y_1)^z = (y_2)^x$$

CDH = calculer $DH_g(y_1, y_2)$ pour y_1, y_2 choisis au hasard

Si DLP relatif à \mathcal{G} facile, CDH aussi

Si log discret difficile, CDH difficile ?

Decisional Diffie Hellman DDH

DDH revient à distinguer $DH_g(y_1, y_2)$ d'un élément aléatoire de G :
pour $y_1, y_2 \xleftarrow{\mu} G$ et y' une solution, DDH revient à décider si
 $y' = DH_g(y_1, y_2)$ ou si $y' \xleftarrow{\mu} G$.

Définition

DDH est difficile relativement à \mathcal{G} si, pour tout algo D PPT, il existe $negl$. tq

$$|Pr(D(G, p, g, g^x, g^y, g^z) = 1) - Pr(D(G, p, g, g^x, g^y, g^{xy}) = 1)| \leq negl(n)$$

pour $\mathcal{G}(1^n)$ qui renvoie (G, p, g) et $x, y, z \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z}_p$

Lemme utile

Le multiple d'un élément y tiré uniformément est unif. distribué.
Ou, y' ne contient pas d'information sur m .

Lemme

G groupe fini, $m \in G$ qcq. Les distrib. de probabilité relatives à :

- $y \xleftarrow{\mu} G$ et $y' := m \cdot y$
- $y' \xleftarrow{\mu} G$

sont identiques. Autrement dit, $\forall \hat{y} \in G, Pr(m \cdot y = \hat{y}) = 1/\#G$

$\hat{y} \in G$ qcq. Alors $Pr(m \cdot y = \hat{y}) = Pr(y = m^{-1} \cdot \hat{y})$.

Comme $y \xleftarrow{\mu} G$, la proba. pour que y soit un élément donné de G est $1/\#G$ \square

ElGamal (rappel)

Le chiffre d'ElGamal Π est (mod p) :

- Gen : $1^n \mapsto \mathcal{G}(1^n) \mapsto (G, p, g)$, $a \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z}_p^*$, $\beta := g^a$;
 $pk = (G, p, g, \beta)$ et $sk = (G, p, g, a)$
- E : reçoit (pk, m) ; $k \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z}_p^*$; renvoie $c = (y_1, y_2) = (g^k, m\beta^k)$
- D : reçoit sk et $c = (y_1, y_2)$; renvoie $m := y_2(y_1^a)^{-1}$

Théorème

Si DDH est difficile pour \mathcal{G} , ElGamal est IND-CPA.

Comparer fonctionnement de Π à celui de Π' qui ressemble syntaxiquement à Π en remplaçant toutes ses sorties par des VA.

On montre IND-EAV plutôt que IND-CPA (équivalent).

IND-EAV : $\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{EAV}} \equiv \text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}$

- 1 Gen(1^n) produit (pk, sk)
- 2 A reçoit pk et retourne $m_0, m_1 \in M(pk)$ de même long.
- 3 $b \xleftarrow{\mu} \{0, 1\}$; $c \leftarrow E_{pk}(m_b)$ et envoyer c à A
- 4 A retourne un bit b'
- 5 A réussit l'expérience (i.e. renvoie 1) ssi $b = b'$

Définition

Π est CPA-sûr si, pour tout adversaire A PPT, il existe $\text{negl}(\cdot)$ tq :

$$\Pr(\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{CPA}}(n) = 1) \leq \frac{1}{2} + \text{negl}(n)$$

On pose : $\varepsilon(n) = \Pr(\text{PubK}_{A,\Pi}^{\text{EAV}}(n) = 1)$ qu'il faut évaluer.

Le chiffre Π' , pas déchiffrable mais convenable pour A

- Gen' = Gen rend $pk = (G, p, g, \beta)$ et $sk = (G, p, g, a)$
- E : donné (pk, m) ; $y, z \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z}_p^*$; rend $c = (y_1, y_2) = (g^y, mg^z)$

Par le lemme :

- y_2 unif. distribué sur G et indépendant de m
- y_1 est unif. distribué et indépendant de m .

On ne tire pas d'information sur m à partir de c :

$$\Pr(\text{PubK}_{A,\Pi'}^{\text{EAV}}(n) = 1) = \frac{1}{2}$$

Algo D PPT qui résout DDH relativement à \mathcal{G}

D reçoit pk et $c : (G, p, g, g^x = \beta, g^y = y_1, g^z = y_2)$ avec

$$g_3 = \begin{cases} g^{xy} \\ g^z \end{cases} \text{ où } x, y, z \xleftarrow{\mu} \mathbb{Z}_p^*.$$

- $pk := (G, p, g, g^x = \beta)$ et appelle A pour obtenir m_0, m_1
- $b \xleftarrow{\mu} \{0, 1\}$; $y_1 := g^y$ et $y_2 := m_b g_3$
- donne (y_1, y_2) à A qui renvoie b'
- résultat expérience 1 si $b' = b$ sinon 0

Deux comportements possibles pour D selon g_3

Partage des paramètres

$g_3 = g^z$ A, appelé par D fonctionnera c̆ ds $\text{PubK}_{A,\Pi'}^{\text{EAV}}(n)$ sur un chiffré de la forme (g^y, mg^z) . Donc

$$\Pr(D(\text{pk}, g^y, g^z) = 1) = \Pr(\text{PubK}_{A,\Pi'}^{\text{EAV}}(n) = 1) = 1/2$$

$g_3 = g^{xy}$ A, appelé par D fonctionnera c̆ ds $\text{PubK}_{A,\Pi'}^{\text{EAV}}(n)$ sur un chiffré de la forme $(g^y, m(g^x)^y)$. Donc

$$\Pr(D(\text{pk}, g^y, g^{xy}) = 1) = \Pr(\text{PubK}_{A,\Pi'}^{\text{EAV}}(n) = 1) = \varepsilon(n)$$

par hyp. DDH difficile pour \mathcal{G} donc $\exists \text{negl. tq } \text{negl}(n) \geq$

$$\left| \frac{\Pr(D(\text{pk}, g^y, g^z) = 1) - \Pr(D(\text{pk}, g^y, g^{xy}) = 1)}{\Pr(D(\text{pk}, g^y, g^z) = 1)} \right| = |1/2 - \varepsilon(n)| \Rightarrow \varepsilon(n) \leq 1/2 + \text{negl}(n)$$

Dans la définition d'ElGamal, on demande d'exécuter Gen pour obtenir G, p, g .

En pratique, ces paramètres sont souvent engendrés une fois pour toute.

P.e. un admin système peut fixer ces paramètres pour un paramètre de sécurité donné n et tout le monde peut partager ces valeurs.

Dans un BSD sous `/etc/moduli`. Demander man moduli

```
DESCRIPTION The /etc/moduli file contains prime numbers and generators for use by sshd in the Diffie-Hellman Group Exchange key exchange method.
```



G. Brassard.

Cryptologie contemporaine.
Logique, mathématiques, informatique. Masson, 1993.



W. Diffie and M.E. Hellman.

New directions in cryptography.
IEEE Trans. on Inform. Theory, 22(6) :644-654, 1976.



T. ElGamal.

A public-key cryptosystem and a signature scheme based on discrete logarithms.
IEEE trans. on Info. Theory, 31(4) :469-472, 1985.



N. Koblitz.

A course in number theory and cryptography.
Graduate texts in mathematics. Springer Verlag, 1987.



A. Salomaa.

Public Key Cryptography.
EATCS monographs. Springer Verlag, 1990.



G. Zémor.

Cours de cryptographie.
Cassini, 2000.