TD 03 – Réductions

Rappel : pour $A \subseteq \Sigma_A^*$ et $B \subseteq \Sigma_B^*$ deux langages, $A \leq_m^T B$ signifie que A se réduit à B.

Exercice 1. *Utilité des réductions*

Démontrer les quatre énoncés suivants.

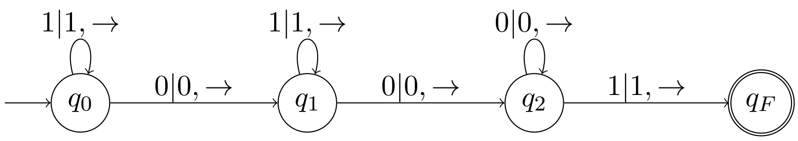
1. Si $A \leq_m^T B$ et B est décidable alors A est décidable.
2. Si $A \leq_m^T B$ et B est semi-décidable alors A est semi-décidable.
3. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est pas décidable alors B n'est pas décidable.
4. Si $A \leq_m^T B$ et A n'est pas semi-décidable alors B n'est pas semi-décidable.

Exercice 2. *Ma première réduction Turing many-one*

1. Réduire $L_{halt\epsilon} = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur l'entrée vide $\}$ à $A = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur l'entrée $aa\}$.
2. En utilisant l'exercice 1, que peut-on en déduire ?

Exercice 3. *Complémentaire*

Soit la machine de Turing M suivante sur l'alphabet d'entrée $\Sigma = \{0, 1\}$.



1. Cette machine de Turing s'arrête-elle sur toute entrée ?
2. Construire une machine de Turing M' telles que $L(M') = \Sigma^* \setminus L(M)$.

Exercice 4. *Réductions Turing many-one*

Écrire chacune des réductions (Turing many-one) suivantes, et indiquer ce que l'on peut en déduire quant à la récursivité de ces langages.

1. Réduire $L_u = \{\langle M \rangle \# w \mid M$ accepte le mot $w\}$ à $B = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M)\}$.
2. Réduire L à $aL = \{aw \mid w \in L\}$ pour tout langage L.
3. Réduire aL à L pour tout langage $L \subsetneq \{a, b\}^*$.
4. Réduire $L_{\bar{u}} = \{\langle M \rangle \# w \mid M$ n'accepte pas $w\}$ à $C = \{\langle M \rangle \# w \mid M$ n'accepte pas w mais accepte $bbw\}$.
5. Réduire $L_{stupide} = \{a\}$ à L_u.

Exercice 5. *Lancer deux MT en parallèle*

Soient deux machines mono-ruban $M_A = (Q_A, \Gamma_A, \Sigma_A, q_0^A, B_A, q_F^A, \delta_A)$,
et $M_B = (Q_B, \Gamma_B, \Sigma_B, q_0^B, B_B, q_F^B, \delta_B)$.

1. Définir une machine M à deux rubans, telle que $L(M) = L(M_A) \cup L(M_B)$.
2. Dans le cas où $\Sigma_A = \Sigma_B$ et $L(M_A) = \Sigma_A^* \setminus L(M_B)$, comment adapter la construction pour créer une machine de Turing M' à deux rubans qui décide le langage $L(M_A)$?

Exercice 6. *Semi-décidable mais pas décidable*

Donner un exemple de langage semi-décidable, mais pas décidable (justifier).

Exercice 7. *Avec des réductions Turing many-one…*

Montrer que les langages suivants ne sont pas décidables.

1. $D = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur les entrées ab et $ba\}$.
2. $E \times F$ avec $E = \{\langle M \rangle \mid b \in L(M)\}$ et $F = \{\langle M \rangle \mid a \in L(M)$ ou $b \in L(M)\}$.

Montrer que les langages suivants ne sont pas semi-décidables.

3. $G = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$.
4. $H = \{\langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \mid L(M_1) = L(M_2)\}$.

Montrer que les langages suivants sont semi-décidables.

5. $L_M = \{w \mid w \in L(M)\}$ avec M une machine de Turing.
6. $D = \{\langle M \rangle \mid M$ s'arrête quand on la lance sur les entrées ab et $ba\}$.

Montrer que le langage suivant est décidable.

7. $I = \{\langle M \rangle \mid \langle M \rangle < 2^{2^{1024}}$ et $L(M) = \{a\}\}$

✎ Du plus « simple » au plus « difficile » à décider, ordonner les langages de cet exercice.