TD 04 – Pavages, théorème de Rice

Exercice 1. *Propriétés de non-clôture*

Montrer avec des contre-exemples que les propriétés suivantes sont **fausses**.

1. La famille des langages non décidables est close par intersection et union.
2. La famille des langages non semi-décidables est close par complémentation.

Montrer que la propriété de clôture suivante est en revanche **vraie**.

3. La famille des langages non décidables est close par complémentation.

Exercice 2. *Théorème de Rice*

Utiliser le théorème de Rice pour étudier la décidabilité des propriétés suivantes.

1. $P_1 = \{L \mid L = a^*\}$.
2. $P_2 = \{L \mid aa \in L$, et $\forall k \neq 2 : a^k \notin L\}$.
3. $P_3 = \{L \mid ab \notin L$, ou $\exists k : ab^k \in L\}$.
4. $P_4 = \{\{\langle M \rangle \mid M$ n'accepte pas $\langle M \rangle\}\}$.
5. $P_5 = \{\{\langle M \rangle \mid M$ accepte $\langle M \rangle\}\}$.
6. Plus généralement, si L n'est pas semi-décidable, que peut-on dire de la propriété $P = \{L\}$?

Exercice 3. *Arrêt et conjectures mathématiques*

La conjecture de Golbach, formulée en 1742 et toujours ouverte, énonce que tout nombre entier pair supérieur à 3 peut s'écrire comme la somme de deux nombres premiers.

1. Donner un programme qui s'arrête si et seulement si la conjecture de Golbach est fausse (ce programme n'a pas d'entrée).

On peut déduire de votre réponse précédente que si l'on savait décider le problème de l'arrêt, alors on saurait décider si la conjecture de Golbach est vraie ou fausse.

2. Peut-on néanmoins semi-décider si cette conjecture est vraie ? ou bien si elle est fausse ?

La suite de Collatz (ou suite de Syracuse) d'un entier $n > 0$ est la suite infinie $(f^i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ avec

$$\begin{aligned} f :\ & \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ & n \mapsto \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 3n+1 & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases} \end{aligned}$$

La conjecture de Collatz, formulée en 1937 et toujours ouverte, énonce que $\forall\, n > 0 : \exists\, i \geq 0 : f^i(n) = 1$, c'est-à-dire que la suite de Collatz de tout entier converge vers la boucle $1, 4, 2$.

3. Proposer un algorithme liant le problème de l'arrêt et la conjecture de Collatz.

Exercice 4. *Réductions Turing many-one pour les fonctions*

Pour obtenir une réduction Turing many-one d'une fonction $f : A \to B$ à une fonction $g : C \to D$, il faut donner deux fonctions calculables $h : A \to C$ et $h' : D \to B$ telles que pour tout $a \in A$ on ait $f(a) = h'(g(h(a)))$. On peut en déduire que si g est calculable alors f aussi, autrement dit que si f n'est pas calculable alors g non plus.

1. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_1 : (\langle M \rangle, w) \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(bw) \uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

2. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_2 : \langle M \rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(\epsilon) \uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.

3. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_3 : \langle M \rangle \mapsto \begin{cases} 3 \text{ si } M(\epsilon) \uparrow \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

4. Réduire le calcul de la fonction **halt** à celui de $f_4 : \langle M \rangle \mapsto \begin{cases} 0 \text{ si } M(ab) \uparrow \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$.