

TD 05 – Complexité: Ordre de grandeur

Exercice 1.

Ordres de grandeur (1)

Soit $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$.

1. Donner une définition de $f \in O(g)$.
2. Donner une définition de $f \in o(g)$.
3. Donner une définition de $f \in \Omega(g)$.
4. Classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique, c'est-à-dire $f(n) \leq_{n \rightarrow \infty} g(n)$ ssi $f \in O(g)$ et $f(n) =_{n \rightarrow \infty} g(n)$ ssi $f \in O(g)$ et $g \in O(f)$:
 - (a) $n^2 - 15n - 10$
 - (b) $100 \log(n)$
 - (c) $2^n - n^{10}$
 - (d) $n^2 + 100n$
 - (e) $\frac{n}{60} \log(n)$

Exercice 2.

Ordres de grandeur (2)

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai (donner une preuve) ou faux (donner un contre exemple).

1. Si $f \in O(g)$ et $g \in O(h)$ alors $f \in O(h)$.
2. Un algorithme fonctionnant en temps t est plus lent qu'un algorithme fonctionnant en temps s quand :
 - (a) $t \in O(2^n)$ et $s \in O(n^2)$.
 - (b) $t \in \Omega(2^n)$ et $s \in \Omega(n^2)$.
 - (c) $t \in \Omega(2^n)$ et $s \in O(n^2)$.
 - (d) $t \in O(2^n)$ et $s \in \Omega(n^2)$.
 - (e) $t \in O(2^n)$ et $s \in o(n^2)$.

Exercice 3.

DTIME(t)

Pour chacun des problèmes de décision suivants, donner un algorithme haut niveau pour le résoudre et donner la plus petite classe DTIME(t) à laquelle il appartient. (On ne vous demande pas de prouver que l'algorithme est optimal).

1.

FORTE CONNEXITÉ <i>entrée</i> : Un graphe orienté G . <i>question</i> : Le graphe G est fortement connexe ?
--
2.

TRIANGLE <i>entrée</i> : Un graphe non orienté G . <i>question</i> : Le graphe G contient-il un triangle (une clique de taille 3) ?
--

CLIQUE

3. *entrée* : Un graphe non orienté G et un entier k codé en binaire.
question : Le graphe G contient-il une clique de taille k ?

DAME

4. *entrée* : Une grille de jeu de dame de taille $n \times n$
question : Existe-t-il une stratégie pour que le joueur 1 gagne à chaque coup ?

Exercice 4.

P vs EXP

1. Dans l'exercice précédent, quels problèmes appartiennent à P ? à EXP ?
2. Est-ce qu'on a prouvé que certains de ces problèmes n'appartiennent pas à P ?

Exercice 5.*Vrai ou Faux P et EXP*

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai (donner une preuve) ou faux (donner un contre-exemple).

1. Un problème appartenant à P n'appartient pas à EXP.
2. Un problème appartenant à EXP n'appartient pas à P.
3. Il existe des problèmes appartenant à P mais pas à EXP.
4. Il existe des problèmes appartenant à EXP mais pas à P.