

**TD 05 – Complexité: Ordre de grandeur**

---

**Exercice 1.**

*Ordres de grandeur (1)*

Soit  $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ .

1. Donner une définition de  $f \in O(g)$ .
2. Donner une définition de  $f \in o(g)$ .
3. Donner une définition de  $f \in \Omega(g)$ .
4. Classer les fonctions suivantes selon leur comportement asymptotique, c'est-à-dire  $f(n) \leq_{n \rightarrow \infty} g(n)$  ssi  $f \in O(g)$  et  $f(n) =_{n \rightarrow \infty} g(n)$  ssi  $f \in O(g)$  et  $g \in O(f)$  :
  - (a)  $n^2 - 15n - 10$
  - (b)  $100 \log(n)$
  - (c)  $2^n - n^{10}$
  - (d)  $n^2 + 100n$
  - (e)  $\frac{n}{60} \log(n)$

**Exercice 2.**

*Ordres de grandeur (2)*

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai (donner une preuve) ou faux (donner un contre exemple).

1. Si  $f \in O(g)$  et  $g \in O(h)$  alors  $f \in O(h)$ .
2. Un algorithme fonctionnant en temps  $t$  est plus lent qu'un algorithme fonctionnant en temps  $s$  quand :
  - (a)  $t \in O(2^n)$  et  $s \in O(n^2)$ .
  - (b)  $t \in \Omega(2^n)$  et  $s \in \Omega(n^2)$ .
  - (c)  $t \in \Omega(2^n)$  et  $s \in O(n^2)$ .
  - (d)  $t \in O(2^n)$  et  $s \in \Omega(n^2)$ .
  - (e)  $t \in O(2^n)$  et  $s \in o(n^2)$ .

**Exercice 3.**

*DTIME( $t$ )*

Pour chacun des problèmes de décision suivants, donner un algorithme haut niveau pour le résoudre et donner la plus petite classe DTIME( $t$ ) à laquelle il appartient. (On ne vous demande pas de prouver que l'algorithme est optimal).

1. 

<b>FORTE CONNEXITÉ</b> <i>entrée</i> : Un graphe orienté $G$ . <i>question</i> : Le graphe $G$ est fortement connexe ?
--
2. 

<b>TRIANGLE</b> <i>entrée</i> : Un graphe non orienté $G$ . <i>question</i> : Le graphe $G$ contient-il un triangle (une clique de taille 3) ?
--

**CLIQUE**

3. *entrée* : Un graphe non orienté  $G$  et un entier  $k$  codé en binaire.  
*question* : Le graphe  $G$  contient-il une clique de taille  $k$  ?

**DAME**

4. *entrée* : Une grille de jeu de dame de taille  $n \times n$   
*question* : Existe-t-il une stratégie pour que le joueur 1 gagne à chaque coup ?

**Exercice 4.**

P vs EXP

1. Dans l'exercice précédent, quels problèmes appartiennent à P ? à EXP ?
2. Est-ce qu'on a prouvé que certains de ces problèmes n'appartiennent pas à P ?

**Exercice 5.***Vrai ou Faux P et EXP*

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai (donner une preuve) ou faux (donner un contre-exemple).

1. Un problème appartenant à P n'appartient pas à EXP.
2. Un problème appartenant à EXP n'appartient pas à P.
3. Il existe des problèmes appartenant à P mais pas à EXP.
4. Il existe des problèmes appartenant à EXP mais pas à P.