TD 06 – P, NP et EXP

Exercice 1. *Inclusion classes de complexité*

1. Dessiner le diagramme de Venn des classes suivantes : P, NP, EXP, NEXP.
2. Y ajouter les classes co-P, co-NP, co-EXP et co-NEXP.
3. Citer deux inclusions connues pour être strictes.
4. Quelle est la question à 1 million de dollars ? (de la part du Clay Mathematics Institute).
5. Expliquer à l'aide d'un dessin pourquoi NP $\subseteq$ EXP

Exercice 2. *Carrés magiques*

En mathématiques, un carré magique (normal) d'ordre n est une grille de taille $n \times n$ composée des n^2 entiers entre 1 et n^2. Ces nombres sont disposés de sorte que leurs sommes sur chaque rangée, sur chaque colonne et sur les deux diagonales soient égales. Quelques exemples de carrés magiques (normaux) :

8	1	6
3	5	7
4	9	2

1	14	4	15
8	11	5	10
13	2	16	3
12	7	9	6

16	14	7	30	23
24	17	10	8	31
32	25	18	11	4
5	28	26	19	12
13	6	29	22	20

1	35	4	33	32	6
25	11	9	28	8	30
24	14	18	16	17	22
13	23	19	21	20	15
12	26	27	10	29	7
36	2	34	3	5	31

35	26	17	1	62	53	44
46	37	21	12	3	64	55
57	41	32	23	14	5	66
61	52	43	34	25	16	7
2	63	54	45	36	27	11
13	4	65	56	47	31	22
24	15	6	67	51	42	33

> **CARRE_MAGIQUE**
> *entrée :* Une grille $n \times n$ déjà partiellement remplie.
> *question :* Est-ce que cette grille peut être complétée pour obtenir un carré magique ?

1. Donner un algorithme haut-niveau *déterministe* pour résoudre ce problème. Donner la complexité en temps de l'algorithme et en déduire une classe de complexité du problème CARRE_MAGIQUE.
2. Donner un algorithme haut-niveau *non-déterministe* pour résoudre ce problème (vous pouvez utiliser l'instruction *deviner*$(1, m)$ pour deviner un entier entre 1 et m). Donner la complexité en temps de l'algorithme et en déduire une meilleure classe de complexité de CARRE_MAGIQUE.

Exercice 3. *Vrai ou Faux*

Pour chacun des énoncés suivants, dire s'il est vrai (donner une preuve) ou faux (donner un contre exemple).

1. Si P = NP alors NP = co-NP.
2. Si NP = EXP alors NP = co-NP.

3. $\mathsf{NP} \neq \mathsf{NEXP}$.
4. $P \neq \mathsf{coNEXP}$.
5. Si un problème est dans P alors il n'est pas dans EXP.

Exercice 4. *Cycle hamiltonien*

> **CYCLE_HAMILTONIEN**
> *entrée :* Un graphe orienté $G = (V, A)$.
> *question :* Existe-t-il un cycle dirigé dans G qui inclue chaque sommet exactement une fois ?

1. Prouver que ce problème est dans NP.

Exercice 5. *Vieux jeu vidéos*

On considère une "vieille" console de jeu vidéo. On possède un contrôleur avec un certains nombres de boutons. Au début du jeu, le système charge un niveau. À chaque *frame* (60 fois par seconde), le système regarde la combinaison de touche qu'on a pressée et met à jour le niveau. La mise à jour est déterministe : elle ne dépend que des combinaisons de touches qu'on a pressé à chaque frame depuis le début du jeu et il n'y a pas de notion de "hasard". Enfin si l'encodage du niveau peut se complexifier (des ennemis ou des objets qui apparaissent), on suppose que sa taille est bornée par une constante (pas plus d'un objet différents sur chaque pixel par exemple).

1. Qu'est-ce qu'on peut dire sur la complexité du problème de savoir si un niveau donné est gagnable ?
2. Si on ajoute la condition que le joueur perd s'il met plus d'un temps polynomial en fonction de la taille du niveau pour gagner, que devient la complexité du problème ?