TD 08 – Complexité: PSPACE

Exercice 1. *one-way*

Une fonction one-way ("à sens unique") est une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que
- f est bijective,
- x est codé sur k bits $\Leftrightarrow$ $f(x)$ est codé sur k bits,
- f est calculable en temps polynomial,
- f^{-1} n'est pas calculable en temps polynomial.

Supposons qu'une telle fonction existe et considérons le problème suivant :

> **ONE_WAY**
> *entrée :* Deux entiers x et y encodés en binaire sur k bits
> *question :* $f^{-1}(x) < y$?

1. Montrer que ONE_WAY $\in$ NP.

2. Montrer que ONE_WAY $\in$ co-NP

3. Montrer que ONE_WAY $\notin$ P.

4. Que peut-on en déduire sur la relation entre P et NP si les fonctions one-way existent ?

Exercice 2. *Géographie*

Le jeu Géographie se joue de la manière suivante :
- Le jeu commence avec un nom donné de ville, par exemple Caen.
- Le premier joueur donne le nom d'une ville dont la première lettre coïncide avec la dernière lettre de la ville précédente, par exemple Nice ;
- Le deuxième joueur donne un autre nom de ville, commençant également par la dernière lettre de la vile précédente, par exemple Évry ;
- le premier joueur joue à nouveau et ainsi de suite avec la restriction qu'aucun joueur ne peut donner le nom d'une ville déjà vu dans le jeu ;
- Le perdant est le premier joueur qui ne peut trouver de nom de ville pour continuer.

Ce jeu peut être décrit à l'aide d'un graphe orienté dont les nœuds représente les villes et où une arête (x, y) signifie que la dernière lettre de x est la première lettre de y. Ce graphe a également un nœud distingué qui correspond à la ville initiale. Chaque joueur choisit un nœud du graphe successeur du nœud précédent, le joueur 1 choisit en premier et ensuite les deux joueurs alternent. Un joueur gagne si, à un moment donné, l'autre joueur ne peut plus choisir de nœud qui n'a pas déjà été visité.

Géography Généralisée (i.e. GG) correspond au problème suivant :

> **GG**
> *entrée :* Un graphe orienté G, et un nœud initial s.
> *question :* Le joueur 1 a une stratégie gagnante pour GG sur un graphe G depuis s

1. Montrer que GG est dans PSPACE.

2. Prouver que GG est PSPACE-dur via une réduction depuis QBF.

Exercice 3. *tic-tac-toe (morpion)*

Le tic-tac-toe, aussi appelé « morpion », est un jeu de réflexion se pratiquant à deux joueurs au tour par tour sur une grille de taille $n \times n$ dont le but est de créer le premier un alignement de k symboles.
Les deux joueurs doivent remplir chacun à leur tour une case de la grille avec le symbole qui leur est attribué : X (pour le joueur 1) ou O (pour le joueur 2). Le gagnant est celui qui arrive à aligner k symboles identiques, horizontalement, verticalement ou en diagonale. Le joueur jouant 1 commence la partie.

> **TIC-TAC-TOE**
> *entrée :* une grille de taille $n \times n$ partiellement remplie et un entier k codé en binaire
> *question :* En supposant que ce soit au tour du joueur 1 de jouer, a-t-il une stratégie gagnante ?

1. Combien de tour maximum avant que la partie ne se termine ?
2. En combien d'espace peut-on représenter une grille de taille $n \times n$ partiellement remplie ?
3. Proposer un algorithme récursif et déterministe de haut-niveau pour résoudre ce problème. En utilisant les questions précédentes, borner la taille de l'espace utilisé.
4. En conclure que ce problème est dans PSPACE.
5. Similairement proposer une idée d'algorithme (en quelques phrases) pour le jeu d'échecs généralisé et donner une classe de complexité pour ce problème.
6. Pourquoi on ne peut pas en conclure que cet autre problème est dans PSPACE ?