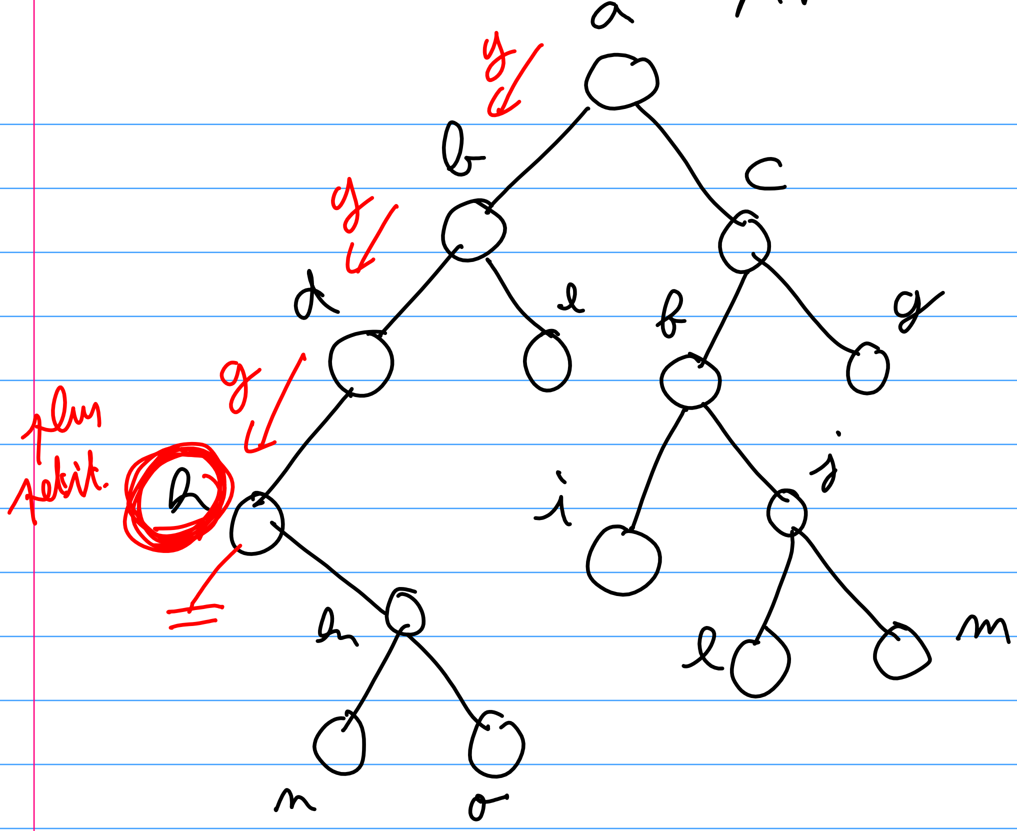
TD12 : Arbre binaire

Exercice 1 : Parcours préfixé itératif d'un arbre binaire

Ecrire en langage C++ la procédure membre **itérative** du parcours **préfixé** dans un arbre binaire qui affiche les éléments de l'arbre.

Exercice 2 : Suppression dans un ABR

Ecrire en langage algorithmique la procédure de suppression d'un élément dans un arbre binaire de recherche.


ABR
a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o
g
g
g
plus petit

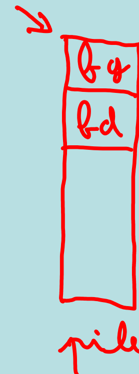
TD12 : Arbre binaire

Exercice 1 : Parcours préfixé itératif d'un arbre binaire

Ecrire en langage C++ la procédure membre **itérative** du parcours **préfixé** dans un arbre binaire qui affiche les éléments de l'arbre.

L'astuce consiste à utiliser une pile pour garder en mémoire les nœuds en attente de traitement.

```
void Arbre::parcoursPrefixeIteratif () {
   if (adRacine != NULL) {
      Pile p;
      Noeud * n;
      p.empiler(adRacine);
      while (!p.estVide()) {
         n = p.consulterSommet();
         p.depiler();
         afficherElementA(n->info);
         if (n->fd != NULL) p.empiler(n->fd);
         if (n->fg != NULL) p.empiler(n->fg);
         /* On met le fils gauche en dernier sur la pile,
            pour qu'il soit le premier traité au passage suivant */
      }
   }
}
```



Exercice 2 : Suppression dans un ABR

Ecrire en langage algorithmique la procédure de suppression d'un élément dans un arbre binaire de recherche.

Dans cette solution, on supprime la première occurrence rencontrée de l'élément.
La marche à suivre dépend du nombre de fils du nœud concerné (cf. CM).
(0) Si l'élément n'est pas dans l'arbre, la procédure n'a aucun effet.
(a) Si n n'a pas de fils (c'est une feuille), il suffit de le supprimer.
(b) Si n n'a qu'un seul fils, on court-circuite n (on attache le fils de n au père de n), puis on supprime n.
(c) Si n a deux fils, on le remplace par son plus proche successeur (le nœud le plus à gauche du sous-arbre droit). Plus précisément, on copie l'élément du plus proche successeur de n dans n, puis on supprime le nœud du plus proche successeur. Remarque : on pourrait aussi remplacer n par son prédécesseur le plus proche (le nœud le plus à droite du sous-arbre gauche).

SOLUTION I (la plus compacte) : On utilise un « lien sur lien sur Noeud » (adresse d'une adresse de Noeud) pour mémoriser l'adresse de la case mémoire qui contient l'adresse du noeud contenant e (ie. l'adresse de fd ou fg du nœud parent).

Procédure supprimerElementABR (e : ElementA, a : Arbre)
Précondition : a est un ABR non vide,
Postcondition : la première occurrence de e dans a est supprimée de l'arbre, a est toujours un ABR
Paramètres en mode donnée : e
Paramètres en mode donnée-résultat : a
Variables locales :
  n, successeur : lien sur Noeud
  pere, pere_successeur : lien sur lien sur Noeud
  trouve : booléen
Début
  {On commence par rechercher le Noeud qui contient l'élément, et on mémorise au passage l'adresse de la case

```
 mémoire qui contient l'adresse de ce Noeud (ie. l'adresse de fd ou fg du nœud parent)}
    n ← a.adRacine
    pere ← &a.adRacine
    trouve ← faux
    Tant que (n ≠ NIL) et non(trouve) Faire
        Si estEgal(n↑.info, e) Alors
            trouve ← vrai
        Sinon
            Si estInferieur(e, n↑.info) Alors
                pere ← &(n↑.fg)  {adresse du champ fg du Noeud n}
                n ← n↑.fg
            Sinon
                pere ← &(n↑.fd)
                n ← n↑.fd
            FinSi
        FinSi
    FinTantQue

    Si (trouve) Alors  {si on a trouvé l'élément, pas de sinon car cas(0) pas d'effet}
        Si (n↑.fg = NIL) et (n↑.fd = NIL) Alors  {cas (a) : pas de fils, on supprime}
            pere↑ ← NIL
            libérer n
        Sinon
            Si (n↑.fg ≠ NIL) et (n↑.fd = NIL) Alors  {cas (b1) : 1 fg, on court-circuite et supprime}
                pere↑ ←  n↑.fg
                libérer n
            Sinon
                Si (n↑.fg = NIL) et (n↑.fd ≠ NIL) Alors  {cas (b2) : 1 fd, on court-circuite et supprime}
                    pere↑ ←  n↑.fd
                    libérer n
                Sinon
                    {cas (c) : deux fils. On recherche le plus proche successeur de n  = nœud,
le plus à gauche du sous-arbre droit}
                    successeur ← n↑.fd
                    pere_successeur ← &(n↑.fd)
                    Tant que (successeur↑.fg ≠ NIL) Faire
                        pere_successeur  ← &(successeur↑.fg)
                        successeur  ←  successeur↑.fg
                    FinTantQue
                    n↑.info ← successeur↑.info {pas besoin de changer fg et fd, juste l'info}
                    pere_successeur↑ ← successeur↑.fd {on court-circuite le successeur}
                    libérer successeur
                FinSi
            FinSi
        FinSi
    FinSi
Fin supprimerElementABR
```

SOLUTION 2 : Plus longue, mais sans lien sur lien. A la place, on mémorise l'adresse du Noeud parent (lien « simple ») et un booléen pour savoir si l'élément à supprimer se trouve dans le fils gauche ou dans le fils droit de ce noeud. On doit aussi traiter différemment la racine, c'est-à-dire les cas où l'on doit modifier a.adRacine et non fd ou fg.

Procédure supprimerElementABR(e : ElementA, a : Arbre)
Précondition : a est un ABR non vide,

```
Postcondition : la première occurrence de e dans a est supprimée de l'arbre, a est toujours un ABR
Paramètres en mode donnée : e
Paramètres en mode donnée-résultat : a
Variables locales :
        n, nouveau_n : lien sur Noeud
        pere, nouveau_pere : lien sur Noeud
        trouve, explorer_gauche, e_dans_racine : booléen
Début
    {On commence par rechercher le Noeud qui contient l'élément et on mémorise l'adresse du noeud parent}
    n ← a.adRacine
    pere ← NIL
    trouve ← faux
    Tant que (n ≠ NIL) et non(trouve) Faire
        Si estEgal(n↑.info, e) Alors
            trouve ← vrai
        Sinon
            pere ← n
            Si estInferieur(e, n↑.info) Alors
                explorer_gauche ← vrai
                n ← n↑.fg
            Sinon
                explorer_gauche ← faux
                n ← n↑.fd
            FinSi
        FinSi
    FinTantQue

    Si (trouve) Alors  {si on a trouvé l'élément}
        Si (n↑.fg = NIL) et (n↑.fd = NIL) Alors  {cas (a) : n est une feuille}
            Si (n = a.adRacine) Alors a.adRacine ← NIL
            Sinon {on vient de la gauche ou de la droite}
                Si (explorer_gauche) Alors pere↑.fg ← NIL Sinon pere↑.fd ← NIL FinSi
            FinSi
            libérer n
        Sinon
            Si (n↑.fg ≠ NIL) et (n↑.fd = NIL) Alors  {cas (b1) : n a seulement un fils gauche}
                Si (n = a.adRacine) Alors a.adRacine ← n↑.fg
                Sinon
                    Si (explorer_gauche) Alors pere↑.fg ← n↑.fg Sinon pere↑.fd ← n↑.fg FinSi
                FinSi
                libérer n
            Sinon
                Si (n↑.fg = NIL) et (n↑.fd ≠ NIL) Alors  {cas (b2) : n a seulement un fils droit}
                    Si (n = a.adRacine) Alors a.adRacine ← n↑.fd
                    Sinon
                        Si (explorer_gauche) Alors pere↑.fg ← n↑.fd Sinon pere↑.fd ← n↑.fd FinSi
                    FinSi
                    libérer n
                Sinon
                    {cas (c) : n a deux fils. On recherche le plus proche successeur de n  = nœud,
                    le plus à gauche du sous-arbre droit}
                    successeur ← n↑.fd
                    pere_successeur ← n
                    Tant que (successeur↑.fg ≠ NIL) Faire
```

```
                    pere_successeur ← successeur
                    successeur ← successeur↑.fg
                FinTantQue
                n↑.info ← successeur↑.info {pas besoin de changer fg et fd}
                Si (pere_successeur = n) Alors
                    {le sous-arbre droit était réduit à une seule feuille, on n'est pas rentré dans le
                    TantQue, il faut changer le fd de n}
                    pere_successeur↑.fd ← successeur↑.fd
                Sinon
                    {on est passé au moins une fois dans le TantQue, c'est le fg d'un des noeuds
                    du sous-arbre droit qu'il faut changer}
                    pere_successeur↑.fg ← successeur↑.fd {on court-circuite le successeur}
                FinSi
                libérer successeur
            FinSi
        FinSi
    FinSi
FinSi

Fin supprimerElementABR
```

SOLUTION 3 : Version récurvise, avec lien en mode donnée-résultat. Dans cette version, une fonction récursive est utilisée pour se déplacer sur l'élément à supprimer ainsi que pour se déplacer (et supprimer) le plus proche successeur. Pour simplifier l'écriture nous utiliserons une fonction supplémentaire qui retourne le noeud contenant le minimum d'un (sous-)arbre.

```
Fonction minApartirDeNoeud(n : lien sur Noeud) : lien sur Noeud
Précondition : le noeud pointé par n existe
Postcondition : l'arbre commençant à n est inchangé
Résultat : le lien sur le noeud contenant la valeur minimum de l'arbre commençant à n
Paramètres en mode donnée : n
Variables locales :
    minNoeud : lien sur Noeud
Début
    minNoeud ← n
    Tant que (minNoeud↑.fg ≠ NIL) faire   {recherche du min dans l'arbre = parcourir les fg}
        minNoeud ← minNoeud↑.fg
    Fin TantQue
    retourner minNoeud
Fin minApartirDeNoeud

Procédure supprimerElementABR(e : ElementA, a : Arbre)
Précondition : a est un ABR non vide,
Postcondition : la première occurrence de e dans a est supprimée de l'arbre, a est toujours un ABR
Paramètres en mode donnée : e
Paramètres en mode donnée-résultat : a
Variables locales :
Début
    supprimerElementABRApartirDeNoeud(e,a.adRacine)   {appel à la fonction récursive de suppression}
Fin supprimerElementABR

Procédure supprimerElementABRApartirDeNoeud(e : ElementA, n : lien sur Noeud)
Précondition : le noeud pointé par n existe
Postcondition : la première occurrence de e à partir de n est supprimée de l'arbre, n contient le nouveau sous-arbre qui est
toujours un sous-arbre d'un ABR
```

```
Paramètres en mode donnée : e
Paramètres en mode donnée-résultat : n
Variables locales :
        aDetruire, successeur : lien sur Noeud
        valeurEchangee : ElementA
Début
        Si (n↑.info > e) Alors supprimerElementABRApartirDeNoeud(e, n↑.fg)          {on cherche à gauche}
        Sinon Si (n↑.info < e) Alors supprimerElementABRApartirDeNoeud(e, n↑.fd)    {on cherche à droite}
        Sinon
            {on a trouvé le noeud à supprimer}
            {on sauvegarde le noeud à détruire}
            aDetruire ← n
            {on regarde les différents cas, en fonction des fils existants}
            Si (n↑.fg = NIL) Alors    {pas de fg, on court-circuite le fd}
                n ← n↑.fd
                libérer aDetruire
            Sinon Si (n↑.fd = NIL) Alors  {pas de fd, on court-circuite le fg}
                n ← n↑.fg
                libérer aDetruire
            Sinon  {le noeud a deux fils}
                {on cherche son plus proche successeur, c'est-à-dire le minimum du sous-arbre droit}
                successeur ← minApartirDeNoeud(n↑.fd)
                {on sauvegarde la valeur à échanger}
                valeurEchangee ← successeur↑.info
                {on supprime le successeur grâce à la procédure de suppression => appel récursif}
                supprimerElementABRApartirDeNoeud(valeurEchangee, n)
                {on échange les valeurs}
                n↑.info ← valeurEchangee
Fin supprimerElementABR
```