M1 Info - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Cours 2 - Algorithmes Probabilistes

Coupe Minimum

Semestre Automne 2020-2021 - Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@inria.fr

département Informatique
Faculté des Sciences et Technologies
Université Claude Bernard Lyon 1

* Merci a A. Parreau et E. Duchene pour le materiel pedagogique ayant servi de base a ces slides.

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !
  - Aleatoire $\neq$ quelconque ! ! !

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !
  - Aleatoire $\neq$ quelconque ! ! !
    - souvent : aleatoirement **uniformement**
    - pas toujours, par ex. : choix aleatoire d'un sommet proportionnellement au degre

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !
  - Aleatoire $\neq$ quelconque ! ! !
    - souvent : aleatoirement **uniformement**
    - pas toujours, par ex. : choix aleatoire d'un sommet proportionnellement au degre
- **Qu'est-ce qu'on perd ?**

  $\rightarrow$ on obtient pas toujours l'optimum

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !
  - Aleatoire $\neq$ quelconque ! ! !
    - souvent : aleatoirement **uniformement**
    - pas toujours, par ex. : choix aleatoire d'un sommet proportionnellement au degre
- **Qu'est-ce qu'on perd ?**

  $\rightarrow$ on obtient pas toujours l'optimum
- **Qu'est-ce qu'on gagne ?**

  $\rightarrow$ la complexite de l'algo baisse
  - par exemple : exponentiel $\rightarrow$ polynomial
  - ici : $O(n^3 m^2) \rightarrow O(n^4 \log^2 n)$

Algorithmes probabilistes

- **Algos probabilistes :**
  - font des choix de maniere aleatoire

    Rq : algo deterministes font aussi des choix !
  - Aleatoire $\neq$ quelconque ! ! !
    - souvent : aleatoirement **uniformement**
    - pas toujours, par ex. : choix aleatoire d'un sommet proportionnellement au degre
- **Qu'est-ce qu'on perd ?**

  $\rightarrow$ on obtient pas toujours l'optimum
- **Qu'est-ce qu'on gagne ?**

  $\rightarrow$ la complexite de l'algo baisse
  - par exemple : exponentiel $\rightarrow$ polynomial
  - ici : $O(n^3 m^2) \rightarrow O(n^4 \log^2 n)$
- **Pourquoi ca marche ?**

  tout depend de la probabilite d'obtenir l'optimum $\rightarrow$ pas trop faible

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Entrée :** un multigraphe non oriente (aretes multiples possibles pour un couple de sommet)

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Entrée :** un multigraphe non oriente (aretes multiples possibles pour un couple de sommet)
- **Sortie :** une coupe (U, U') de G (=bipartition de $V(G)$) ayant le nombre minimum d'aretes qui traversent

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Entrée :** un multigraphe non oriente (aretes multiples possibles pour un couple de sommet)
- **Sortie :** une coupe (U, U') de G (=bipartition de $V(G)$) ayant le nombre minimum d'aretes qui traversent

Differences avec precedemment :

- **ni puits ni source**
- graphe non oriente (cas particulier de graphe oriente)
- aretes multiples (equiv. capacites entieres)

Une version un peu differente de coupe minimum

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**
  $n(n-1)/2$ fois l'algo d'EK, avec toutes les paires $\{source, puits\}$ possibles

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**
  $n(n-1)/2$ fois l'algo d'EK, avec toutes les paires $\{source, puits\}$ possibles

- **Complexite ?**

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**
  $n(n-1)/2$ fois l'algo d'EK, avec toutes les paires $\{source, puits\}$ possibles

- **Complexite ?**
  $O(n^3 m^2)$
  ($O(n^3 m)$ avec le meilleur algo connu pour le flot max, qui est en $O(nm)$)

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**
  $n(n-1)/2$ fois l'algo d'EK, avec toutes les paires $\{source, puits\}$ possibles

- **Complexite ?**
  $O(n^3 m^2)$
  ($O(n^3 m)$ avec le meilleur algo connu pour le flot max, qui est en $O(nm)$)

- **Algo probabiliste :**
  - On va faire un algo probabiliste en $O(n^4 \log^2 n)$
    (le meilleur algo proba est en $O(n^2 \log^2 n)$)

Une version un peu differente de coupe minimum

- **Solution ?**
  $n(n-1)/2$ fois l'algo d'EK, avec toutes les paires $\{source, puits\}$ possibles

- **Complexite ?**
  $O(n^3m^2)$
  ($O(n^3m)$ avec le meilleur algo connu pour le flot max, qui est en $O(nm)$)

- **Algo probabiliste :**
  - On va faire un algo probabiliste en $O(n^4 \log^2 n)$
    (le meilleur algo proba est en $O(n^2 \log^2 n)$)
  - et en plus d'une simplicite deconcertante !

Algo probabiliste pour coupe minimum

- Algo probabiliste $\Rightarrow$ deux executions ne donnent pas le meme resultat !
- On l'execute plusieurs ($=$ beaucoup de) fois et on garde la meilleure solution

Algo probabiliste pour coupe minimum

- Algo probabiliste $\Rightarrow$ deux executions ne donnent pas le meme resultat !
- On l'execute plusieurs (= beaucoup de) fois et on garde la meilleure solution
- Deux questions :
  - Quelle est la proba d'obtenir une solution optimale ?
  - Il faut faire combien d'essais ?

Algo probabiliste pour coupe minimum

- Algo probabiliste $\Rightarrow$ deux executions ne donnent pas le meme resultat !
- On l'execute plusieurs (= beaucoup de) fois et on garde la meilleure solution
- Deux questions :
  - Quelle est la proba d'obtenir une solution optimale ?
  - Il faut faire combien d'essais ?
    - On veut proba $\rightarrow 1$ lorsque la taille de l'entree $\rightarrow +\infty$ (Waouh !)

Algo probabiliste pour coupe minimum

- Algo probabiliste $\Rightarrow$ deux executions ne donnent pas le meme resultat !
- On l'execute plusieurs ($=$ beaucoup de) fois et on garde la meilleure solution
- Deux questions :
  - Quelle est la proba d'obtenir une solution optimale ?
  - Il faut faire combien d'essais ?
    - On veut proba $\rightarrow 1$ lorsque la taille de l'entree $\rightarrow +\infty$ (Waouh !)
    - ... en fait, ca suffit que la proba soit une constante.

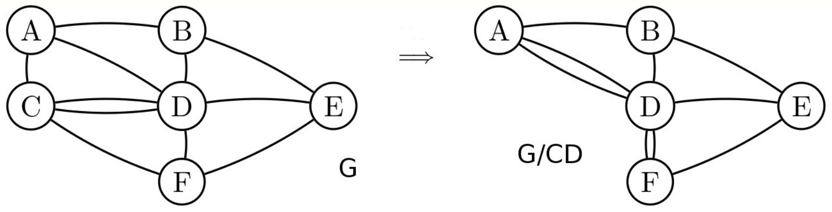
Algo probabiliste pour coupe minimum

Cas des graphes non connexes

Algo probabiliste pour coupe minimum

Définition (contraction d'arete)

Soit $G = (V, E)$ un multigraphe sans boucle et uv une arete de G. Le raphe contracte de G selon l'arete uv, note G/uv, est defini par $G/uv = (V \setminus \{u\}, E \setminus \{\!\{ux \mid x \in N(u)\}\!\} \cup \{\!\{vx \mid ux \in E \text{ et } x \neq v\}\!\})$.



Algo probabiliste pour coupe minimum

Algorithme 1 : Algorithme Contraction Aleatoire

```
pour tout v ∈ V faire
    S(v) ← {v}
fin
tant que |V| > 2 faire
    choisir une arete uv de G uniformement aleatoirement;
    G ← G/uv;
    S(v) ← S(v) ∪ S(u);
fin
retourner la coupe (S(x), S(y)) ;     (ou {x, y} = V)
```

Exemple

Analyse de l'algo de Contraction Aleatoire

- l'algo fait toujours $n - 2$ contractions, pour finir avec un graphe a 2 sommets
- on note k la taille d'une coupe minimum de G
- on fixe une coupe minimum $C = (X, Y)$ de G et on calcule la proba que l'algo retourne la coupe C
- Rq. : l'algo retourne C ssi il ne contracte aucune arete traversant C

Analyse de l'algo de Contraction Aleatoire

Analyse de l'algo de Contraction Aleatoire

- A la premiere contraction, la proba p de choisir une arete ne traversant pas C est $p = 1 - \frac{k}{m}$.
- on note E_j l'evenement suivant : "a la j^{eme} iteration de la boucle principale, l'arete uv selectionnee ne traverse pas C"
- on calcule la proba $p_j = Pr[E_j | \bigcap_{i=1}^{j-1} E_i]$
- G_j le graphe avant l'iteration j, dans l'evenement $\bigcap_{i=1}^{j-1} E_i$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- G_j a exactement $n - j + 1$ sommets et la coupe minimum de G_j a taille k

proba d'obtenir la coupe minimum C

- G_j a exactement $n - j + 1$ sommets et la coupe minimum de G_j a taille k
- ainsi, le degre minimum dans G_j est au moins k, et donc G_j a au moins $k(n - j + 1)/2$ aretes.

proba d'obtenir la coupe minimum C

- G_j a exactement $n - j + 1$ sommets et la coupe minimum de G_j a taille k
- ainsi, le degre minimum dans G_j est au moins k, et donc G_j a au moins $k(n - j + 1)/2$ aretes.
- on obtient
  $$1 - p_j = Pr[\overline{E_j} | \bigcap_{i=1}^{j-1} E_i] \leq k/(k(n - j + 1)/2) = 2/(n - j + 1)$$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- G_j a exactement $n - j + 1$ sommets et la coupe minimum de G_j a taille k
- ainsi, le degre minimum dans G_j est au moins k, et donc G_j a au moins $k(n - j + 1)/2$ aretes.
- on obtient
  $$1 - p_j = Pr[\overline{E_j} | \bigcap_{i=1}^{j-1} E_i] \leq k/(k(n - j + 1)/2) = 2/(n - j + 1)$$
- d'ou $p_j \geq 1 - 2/(n - j + 1) = (n - j - 1)/(n - j + 1)$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- comme $Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \times Pr[B]$, on obtient
  $p = Pr[\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i] = \prod_{i=1}^{n-2} p_j$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- comme $Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \times Pr[B]$, on obtient
  $p = Pr[\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i] = \prod_{i=1}^{n-2} p_j$
- ainsi la proba d'obtenir la coupe minimum C par l'algo est

$$p \geq \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- comme $Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \times Pr[B]$, on obtient
  $p = Pr[\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i] = \prod_{i=1}^{n-2} p_j$
- ainsi la proba d'obtenir la coupe minimum C par l'algo est

$$p \geq \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$$

- on fait maintenant t iterations de l'algo de contraction, chacune ayant une proba de succes p

proba d'obtenir la coupe minimum C

- comme $Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \times Pr[B]$, on obtient $p = Pr[\bigcap_{i=1}^{n-2} E_i] = \prod_{i=1}^{n-2} p_j$
- ainsi la proba d'obtenir la coupe minimum C par l'algo est

$$p \geq \frac{n-2}{n} \times \frac{n-3}{n-1} \times \frac{n-4}{n-2} \times \cdots \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{n(n-1)}$$

- on fait maintenant t iterations de l'algo de contraction, chacune ayant une proba de succes p
- Comment choisir t pour avoir une proba constante de trouver la coupe C dans au moins une des t iterations ?

proba d'obtenir la coupe minimum C

- la proba de ne trouver C dans aucune des t executions est $p_{echec} = (1 - p)^t$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- la proba de ne trouver C dans aucune des t executions est $p_{echec} = (1-p)^t$
- maths $\Rightarrow (1-p)^{\frac{1}{p}} \leq 1/e$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- la proba de ne trouver C dans aucune des t executions est $p_{echec} = (1-p)^t$
- maths $\Rightarrow (1-p)^{\frac{1}{p}} \leq 1/e$
- on fait donc $t = \frac{\log n}{p}$ executions de l'algo et on obtient $p_{echec} \leq (1/e)^{\log n} = 1/n$

proba d'obtenir la coupe minimum C

- la proba de ne trouver C dans aucune des t executions est $p_{echec} = (1-p)^t$
- maths $\Rightarrow (1-p)^{\frac{1}{p}} \leq 1/e$
- on fait donc $t = \frac{\log n}{p}$ executions de l'algo et on obtient $p_{echec} \leq (1/e)^{\log n} = 1/n$
- c'est a dire que la proba de trouver une coupe minimum C fixee apres $\frac{n(n-1)\log n}{2}$ executions de l'algo contraction est au moins $1 - \frac{1}{n} \to 1$ quand $n \to +\infty$

Analyse de complexite de l'algo proba pour coupe minimum

- soit $f(n)$ la complexite de l'algo de contraction, la complexite totale de l'algo proba pour coupe minimum est $O(f(n) \cdot n^2 \log n)$
- Complexite de Contraction ?
  - boucle principale : $O(n)$ fois
  - ligne 5 : $O(1)$
  - ligne 6 : $O(n)$
  - ligne 7 : $O(n)$

  complexite totale : $O(n^2)$

Conclusion de l'algo proba pour coupe minimum

- Algo avec proba de succes $p \geq 1 - \frac{1}{n}$ et complexite $O(n^4 \log n)$
- rien n'empeche de :
  - ne faire que $t = \frac{n(n-1)}{2}$ executions : $p \geq 1 - \frac{1}{e}$ et complexite $O(n^4)$
  - faire $t = \log 1000 \frac{n(n-1)}{2}$ executions : $p \geq 1 - \frac{1}{1000}$ et complexite $O(n^4)$ (la cte=$\log 1000$ est cachee dans le $O(.)$)
  - faire $t = n \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ executions : $p \geq 1 - \frac{1}{e^n}$ et complexite $O(n^5)$

Questions subsidiaires :

- Mq il y a au plus $O(n^2)$ coupe minimum dans un graphe
- Mq il peut y avoir $\Omega(2^n)$ s, t-coupe minimum dans un graphe

Conclusion de l'algo proba pour coupe minimum

Questions subsidiaires :

- Mq il y a au plus $O(n^2)$ coupe minimum dans un graphe
- Mq il peut y avoir $\Omega(2^n)$ s, t-coupe minimum dans un graphe

Une autre implementation de l'algo (peridurale)