TD1 - Flot maximum et coupe minimum

Optimisation et Recherche Operationnelle

M1 Info - semestre d'automne 2020-2021

Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle `christophe.crespelle@inria.fr`

Eric Duchêne `eric.duchene@univ-lyon1.fr`

Aline Parreau `aline.parreau@univ-lyon1.fr`

Le sujet est prevu pour occuper deux seances d'1h30. Il n'est pas indispensable que vous traitiez tous les exercices pendant les seances, mais il est recommande que vous utilisiez ceux que vous n'avez pas eu le temps de faire comme entrainement en vue de l'examen final (ce qui ne veut pas dire que tous les exercices soient du niveau de ceux poses a l'examen, en particulier, les exercices nommes "pour aller plus loin" sont de difficulte superieure). Les exercices les plus importants sont les 1, 2, 4, 5, 6 et 7a.

Exercice 1. *Max ou pas max ?*

a. Le flot donne sur la Figure 1 - gauche est-il maximum ? Comment le prouver ?

Solution. Non, il ne l'est pas. Pour le prouver, il faut exhiber un chemin augmentant. Pour cela, la clef est de passer par le reseau residuel (voir figure 1 bas-gauche). Dans le residuel, on fait un parcours a partir de la source et on voit si on peut atteindre le puit. Dans ce cas oui, il y a donc un chemin augmentant. Un chemin augmentant possible (il peut y en avoir plusieurs) de s a t, avec flot de 1, est s,a,d,b,f,h,t.

b. Le flot donne sur la Figure 1 - droite est-il maximum ? Comment le prouver ?

Solution. Oui, il l'est. Pour le prouver, il faut exhiber une coupe saturee. Pour cela, la clef est la meme : passer par le reseau residuel (voir figure 1 bas-droit). Dans le residuel, on fait un parcours a partir de la source et si on n'atteint pas le puit, l'ensemble des sommets qu'on peut atteindre definit une demi-coupe, qui est saturee. Dans ce cas, cela donne la demi-coupe $\{s, a, c, d, e\}$ qui est saturee : dans le residuel, il n'y a que des arcs entrant de l'exterieur vers l'interieur de cette demi-coupe. Dans le reseau de depart, cela se voit aussi mais moins facilement : tous les arcs qui sortent sont satures et tous ceux qui entrent ont un flot nul. En general, il peut y avoir d'autres coupes saturees que celle definie par les sommets atteignables a partir de s, elles se voient aussi sur le residuel.

Exercice 2. *Debit a credit*

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement). Les réserves journalières disponibles

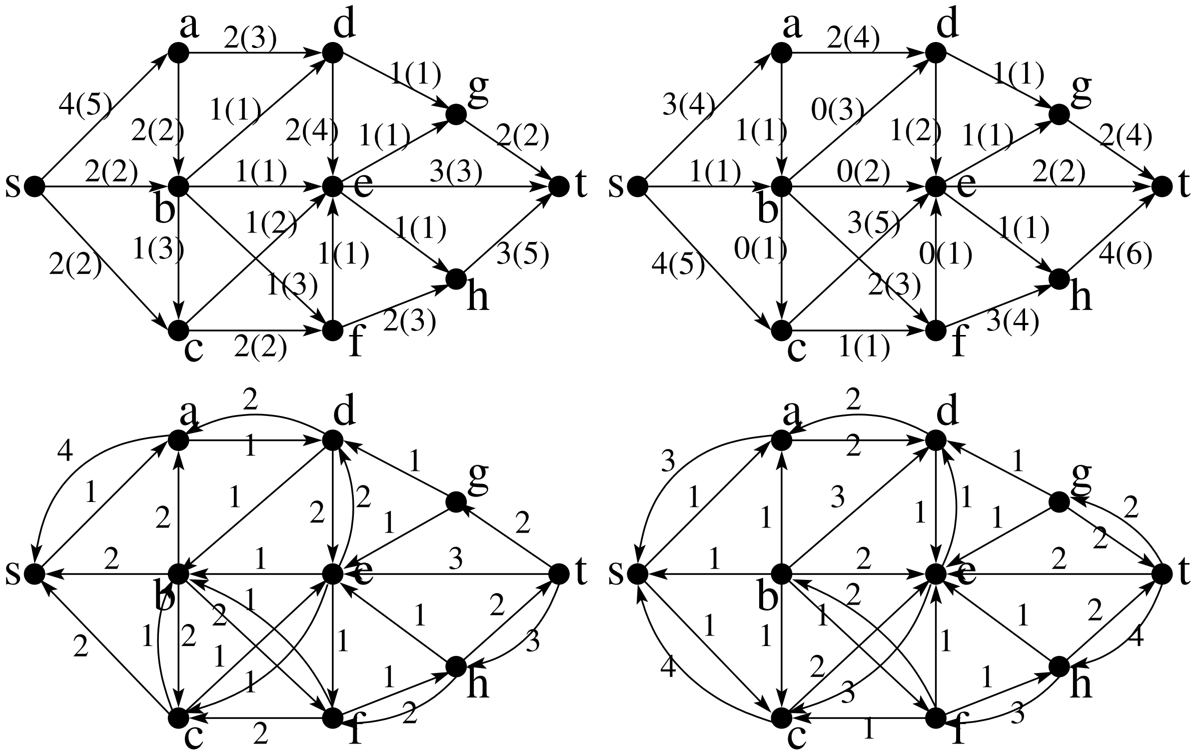


FIGURE 1 – Haut : Deux reseaux de flot, avec source s et puits t, chacun donne avec un flot. Les arcs sont etiquetes par deux nombres $a(b)$: celui entre parentheses, b, est la capacite de l'arc et celui qui precede les parentheses, a, est la valeur du flot a travers cet arc. Exemple : l'etiquette 2(3) signifie que la capacite de l'arc est 3 et que la valeur du flot sur cet arc est de 2. Bas : Les deux reseaux residuels correspondant.

sont de 15 milliers de m^3 pour A, 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe de la figure 2 (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3/jour).
Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20 et 15 pour la ville L.

a. Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.

Solution.

Tout d'abord, il s'agit ici d'un probleme de flot a sources et puits multiples. Comme vu en cours, on se ramene au cas d'une source et d'un puits uniques en introduisant une nouvelle source s que l'on relie aux anciennes par des arcs sortant de s et un nouveau puits t que l'on relie aux anciens par des arcs entrant dans t. Les capacites de ces arcs sont donnes dans l'enonce : il s'agit pour les sources des capacites de "production" du flot et pour les puits, des "demandes" en flot. Une fois ces modifications faites, on

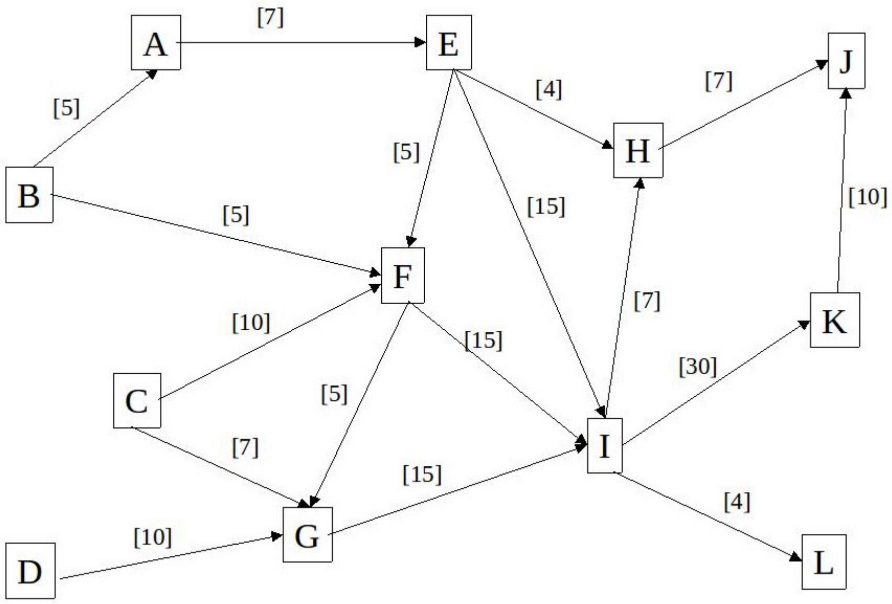


FIGURE 2 – Un reseau d'alimentation en eau.

peut resoudre le probleme d'optimisation sur le nouveau graphe forme, qui est alors un probleme de flot a source et puits uniques.

L'important ici n'est pas tant la valeur maximale du flot que la methode pour la trouver et pour etre sur qu'on a bien trouve le maximum. On peut envisager trois types de methodes. La troisieme qui marche toujours en dernier ressort est d'appliquer l'algo du cours, les deux autres permettent parfois de trouver plus vite une solution optimale.

Premiere methode : on construit un flot par essais/erreurs/corrections en prenant soin de bien respecter la contrainte de conservativite. Il n'y a aucune garantie que l'on trouve le maximum sauf... si on est capable d'exhiber une coupe saturee ! Si c'est le cas (et que le flot construit est bien conservatif et respecte les capacites des aretes), c'est gagne. Sinon, on bascule vers une des deux autres methodes.

Deuxieme methode : on trouve des chemins augmentants directement sur le graphe (sans construire le graphe residuel). L'interet de cette approche est justement d'eviter la construction du graphe residuel qui peut etre fastidieuse. On cherche des chemins dans le graphe original selon lesquels on peut envoyer du flot de la source au puits. On reitere jusqu'a ce qu'on ne voit plus de telle possibilite. Cela ne veut pas dire qu'il n'y en a plus, juste qu'elles ne sont peut etre pas faciles a visualiser directement sur le graphe. Pour etre sur, la encore, une seule methode : trouver une coupe saturee. Si on en voit une, c'est gagne, sinon on bascule sur la derniere methode qui marche toujours, celle qui utilise le graphe residuel.

Troisieme methode : l'algo de cours (Edmonds-Karp, ou Ford-Fulkerson si les capacites sont entieres). Dans ce cas, ce qui fait qu'on trouve toujours c'est qu'on travaille sur le graphe residuel, tel que defini en cours, c'est l'objet clef. On forme donc le residuel du flot et on fait un parcours a partir de la source :

— si on n'atteint pas le puits : gagne ! Le flot est deja max et maintenant on a une coupe saturee a exhiber : la premiere partie est s avec tous les sommets qu'on peut atteindre depuis s dans le reseau residuel, la deuxieme partie est le reste des sommets (qui contient t),

— si on atteint le puits, alors on a un chemin augmentant de la source vers le puit qu'on peut utiliser pour augmenter le flot (on prend un plus court chemin, comme dans EK, si on veut eviter les problemes de terminaison, mais ces problemes n'existent pas lorsque les capacites sont entieres). On actualise le residuel apres le changement du flot et on recommence : soit on trouve une coupe saturee, soit un chemin augmentant, et ainsi de suite.

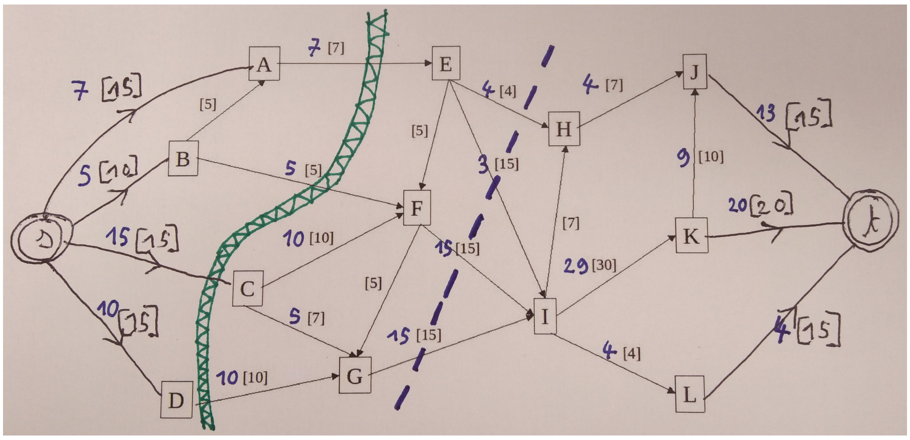


FIGURE 3 – Un flot max, en bleu, avec une coupe saturee, marquee par la separation verte.

Un flot maximum obtenu avec la premiere methode (sans les ratures dues aux essais/erreurs/corrections) est donne sur la Figure 3, avec une coupe saturee $(\{s, A, B, D\}, \{C, E, F, G, H, I, J, K, L, t\})$ qui atteste que le flot est bien maximum. Verifiez qu'il s'agit bien d'un flot, c'est a dire que les capacites des arcs sont respectees et que le flot est conservatif sur **chaque** sommet du graphe. Verifiez aussi que la coupe donnee est bien saturee et qu'elle separe s de t (s, t-coupe).

b. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

Solution. Pour repondre a la question, il est bon de voir d'emblee de combien au plus on peut esperer augmenter le flot (qui est pour l'instant de 37) ? On ne souhaite pas l'augmenter au dela de 50 puisque c'est la somme des demandes et qu'il y a, pour cette raison, une coupe $(V \setminus \{t\}, \{t\})$ de capacite 50 dans le graphe, qui ne sera pas modifiee par des changements de canalisations. Il y a meme une coupe assez facile a reperer, la coupe $(\{s, A, B, C, D, E, F, G\}, \{H, I, J, K, L, t\})$ (materialisee par les pointilles bleus sur la figure 3) qui est de capacite 49 et qui n'est traversee par aucune canalisation sur lesquelles des travaux sont envisages (AE et IL). On peut donc esperer augmenter le flot courant d'au plus 12. Cela exige alors d'augmenter la capacite de la coupe saturee qu'on a exhibee d'au moins 12. Faisons cela, c'est a dire augmentons la capacite de AE de 7 a 19, et voyons si on peut augmenter d'autant le flot en jouant aussi sur IL. On peut bien faire arriver 12 de flot supplementaire en E en envoyant du flot suppllentaire depuis s : 8 selon l'arc sA et 4 selon le chemin s,B,A, par exemple. Ce flot se retrouve alors en E ou il peut traverser la coupe limitante de capacite 49, par l'arc EI, pour arriver en I. On a alors un flot supplementaire entrant sur I de 12. Pour augmenter la capacite de IL le moins possible, essayons d'acheminer ce flot supplementaire de I vers t sans augmenter IL. Sans changer la capacite de IL, on peut envoyer au plus 2 de flot supplementaire jusqu'a t car le flot traversant la coupe $(V \setminus \{L,t\}.\{L,t\})$ est de 37 alors que la capacite de la coupe est de 39. Et on peut bien en effet acheminer ce flot supplementaire de 2 de I a t en passant par exemple par le chemin I,H,J,t. Il nous reste donc un flot supplementaire de 10 en I, que l'on peut tout acheminer vers t par le chemin I,L,t si on augmente la capacite de IL de 10. L'augmentation maximale qu'on peut atteindre pour le flot est donc de 12 (et le flot total de 49) et les augnentations minimales des capacites de AE et IL qu'il faut faire pour y parvenir sont de respectivement 12 et 10.

c. Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseaux ?

Solution. Si on ne commence pas par AE, la coupe dessinee en vert reste saturee et il n'y a pas d'augmentation du flot. Il faut donc commencer par AE.

d. Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux ?

Solution. Lorsqu'on augmente la capacite de AE de 12 sans modifier celle de IL, on augmente la valeur du flot max de 2, comme explique precedemment. On ne peut pas faire mieux comme en atteste la coupe $(V \setminus \{L,t\}.\{L,t\})$ pour laquelle le flot qui la traverse est seulement inferieur de 2 a sa capacite.

e. Le conseil intercommunal decide finalement d'augmenter les capacites de AE et IL de respectivement 13 et 11. Il souhaite maintenant modifier encore la capacite d'une seule arete pour permettre de satisfaire pleinement la demande des trois villes. Quelles sont toutes les aretes qui permettraient de realiser cet objectif ? De combien faut-il augmenter la capacite de l'arete choisie ?

Solution. Il faut forcement modifier la capacite d'une arete de la coupe en pointilles bleus, car elle est saturee apres les travaux sur AE et IL et l'augmentation de 12 du flot qui en resulte. N'importe laquelle des quatres aretes traversantes convient car pour chacune de ces aretes si on augmente leur capacite de 1, on peut acheminer un flot supplementaire de 1 de E a I : si on augmente la capacite de EH, en passant par E,H,I (comme il y a un flot de 2 de I a H, qu'on diminue de 1), si on augmente la capacite de EI, directement par EI, si on augmente la capacite de FI, en passant par E,F,I, et si on augmente la capacite de GI, en passant par E,F,G,I.

Exercice 3.

Pour mieux comprendre.

a. Donnez un exemple de reseau et un flot ayant au moins une coupe saturee et au moins une coupe non saturee.

Solution. C'est le cas general pour un flot maximum, toutes les coupes ne sont pas forcement saturees. Un exemple simple a trois sommets et trois arcs, avec le formalisme utilise sur la figure 1 :
s 1(1) t
s 1(1) u
u 1(2) t.
La coupe $(\{s\}, \{u, t\})$ est saturee, la coupe $(\{s, u\}, \{t\})$ ne l'est pas.

b. Donnez un exemple de reseau et un flot dans lequel toutes les coupes sont saturees.

Solution. Cela peut arriver en effet. Un exemple tres simple est celui qui suit, mais on peut en imaginer des plus sophistiques :
— le reseau : un chemin de s a t avec tous les arcs ayant capacite 1
— le flot : flot 1 sur chaque arc.

c. Peut-on toujours augmenter la valeur du flot maximum en augmentant la capacite d'une seule arete ?

Solution. Non, pas toujours. Il suffit qu'il y ait au moins deux coupes saturees qui ne partagent pas d'arc traversant pour que ce ne soit pas possible : en augmentant la valeur d'un seul arc, une des deux coupes reste saturee, donc le flot est encore maximum et n'augmente pas. Exemple simple :
s 1(1) u
s 1(1) v
u 1(1) t.
v 1(1) t.
Remarquez que tous les arcs sont incident soit a s soit a t. Si on augmente la capacite d'un arc incident a s, la coupe $(\{s, u, v\}, \{t\})$ reste saturee, donc le flot maximum est inchange. Et si on augmente plutot la capacite d'un arc incident a t, la coupe $(\{s\}, \{u, v, t\})$ reste saturee, donc le flot maximum est inchange, dans tous les cas.

d. Peut-on toujours reduire la valeur du flot maximum en reduisant la capacite d'une seule arete ?

Solution. Oui, il suffit de prendre un arc sortant qui traverse une coupe saturee et de baisser sa capacite. Cela baisse la capacite de la coupe, par definition, et comme le flot maximum est toujours au plus egal a la capacite de n'importe quelle coupe (voir cours) alors la valeur du flot maximum a diminue.

Exercice 4. *Coupes minimum*

a. Donnez un exemple de reseau G dans lequel la coupe minimum est aussi petite qu'on veut devant le degre minimum de G.

> **Indication.** Remarquez que dans cette question on parle de coupe quelconque, pas de s, t-coupe.

Solution. Commencez par remarquer que la coupe minimum est toujours au moins egale au degre minimum, car on peut toujours definir une coupe qui isole le sommet de degre minimum. Pour repondre a la question, il faut construire un graphe dans lequel le degre minimum est grand et la coupe minimum est petite. Un exemple simple est celui de deux cliques (ensemble de sommets tous relies deux a deux par une arete) a n sommets avec une arete entre les deux cliques. Le degre minimum est $n-1$, c'est celui des sommets dans la clique, et la coupe minimum est de 1, c'est celle qui met chaque clique d'un cote de la coupe.

b. Donnez un exemple de graphe G et de couple (s,t) pour lequel la s,t-coupe minimum est aussi grande qu'on veut devant la coupe minimum de G.

Solution. Ici, on cherche a faire la distinction entre une coupe du graphe, qui est une bipartition quelconque de ses sommets, et une s,t-coupe qui est une bipartition avec contrainte : s et t ne doivent pas se trouver du meme cote de la bipartition (on dit que la coupe *separe* s et t). On peut alors reprendre l'exemple precedent pour repondre a la question. On a dit que la coupe minimum du graphe est 1. Par contre, si on choisit s et t dans la meme clique K, toute coupe qui les separe va avoir au moins $n_s \cdot n_t$ aretes qui la traverse, ou n_s est le nombre de sommets de K qui se trouvent du cote de s dans la coupe (y compris s) et n_t est le nombre de sommets de K qui se trouvent du cote de t dans la coupe (y compris t). On a donc $n_s + n_t = n$, avec n fixe. Or les mathematiques nous apprennent que la valeur minimum de $n_s \cdot n_t$ dans ce cas est obtenue pour $n_s = 1$ ou $n_t = 1$. Ainsi, la valeur de la s,t-coupe minimum est au moins $n-1$, alors que la valeur de la coupe minimum dans tout le graphe est 1.

Exercice 5. *Pour que le courant passe, encore faut-il être au courant*

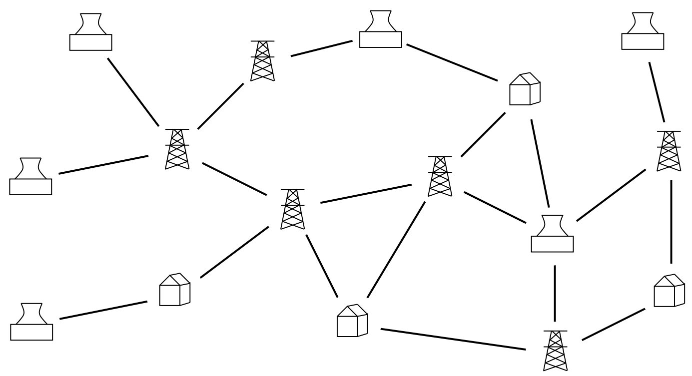


FIGURE 4 – Un reseau electrique. Les usines electriques sont representees par des pylones haute tension, les sites industriels sont representes par des cheminees et les autres points d'interconnexion du reseau par des batiments.

Un réseau électrique relie un certain nombre d'usines de production électrique (representees par des pylones haute tension sur la Figure 4) à un certain nombre de sites industriels à alimenter (representes par des cheminees sur la Figure 4). Le tout est modélisé par un graphe non orienté où usines et sites sont positionnés sur différents sommets, les autres sommets représentant des points d'interconnexion du réseau (representees par des batiments sur la Figure 4). L'électricité peut transiter par tous les sommets et chaque usine a le pouvoir d'alimenter tous les sites. Donner un algorithme qui calcule le nombre minimum de liens (donc ici d'arêtes) tel que, s'ils sont rompus, plus aucun site n'est alimenté. Analysez la complexité de votre algorithme.

Indication. Modeliser le probleme comme un probleme de coupe minimum dans un graphe bien choisi que vous formerez, puis utilisez les algorithmes de flot vu en cours pour resoudre ce probleme.

Solution. Il s'agit d'un probleme qui ressemble a celui de la s,t-coupe minimum mais avec plusieurs sources (les usines electriques) et plusieurs puits (les sites industriels a alimenter). En effet, deconnecter toutes les usines de tous les sites en retirant des aretes du graphe revient a trouver une coupe qui separe les usines des sites et a retirer les aretes qui la traversent. On cherche donc une telle coupe qui ait un nombre minimum d'aretes qui la traverse. S'il n'y avait qu'une usine et qu'un site, ce serait exactement le probleme de la s,t-coupe minimum. Pour prendre en compte la multiplicite des sources et des puits, on peut faire comme en cours pour les flots a sources et puits multiples. C'est a dire qu'on va changer le graphe pour se ramener au cas d'une source et d'un puits uniques. L'idee est d'ajouter un nouveau sommet qui sera la source et qui est relie par une arete a chaque usine, et un autre nouveau sommet qui sera le puits et qui est relie par une arete a chaque site industriel. Il reste ensuite a definir des poids sur chacune des aretes du nouveau graphe ainsi forme. Toutes les aretes du reseau original sont de cout de deconnexion identique et recoivent donc le meme poids, disons 1. Le poids que l'on va definir pour les aretes qu'on a ajoute entre la source s et les usines et entre le puits t et les sites industriels doit garantir que la s,t-coupe minimum du nouveau graphe forme ne contienne aucune des aretes incidentes a la nouvelle source et au nouveau puits, de sorte que cette coupe soit la coupe minimum qui separe les usines des sites dans le graphe original. Pour cela, il suffit de prendre pour les nouvelles aretes un poids assez grand pour garantir qu'aucune d'entre elles ne traversera la s,t-coupe minimum dans le nouveau graphe. Par exemple on peut leur attribuer un poids de $m+1$ (ou un poids infini, mais ca pose la question de comment le representer en machine), ou m est le nombre d'aretes dans le graphe original. Ainsi, la coupe minimum du nouveau graphe n'est traversee que par des aretes du graphe original car si une seule nouvelle arete la traverse, son poids est d'au moins $m+1$ alors qu'il existe des coupes de poids au plus m : mettre s et toutes les usines d'un cote, t et tous les sites de l'autre, et les autres sommets du graphe de n'importe quel cote.

Comme aucune nouvelle arete ne traverse la s,t-coupe minimum, toutes les usines sont du cote de s et tous les sites du cote de t, ce qui est ce que l'on cherche. La s,t-coupe minimum est alors exactement la coupe minimum du graphe original qui separe toutes les usines de tous les sites.

L'algorithme est le suivant :

1. former le nouveau graphe $\tilde{G}$ en ajoutant une source s reliee a toutes les usines avec un poids $m+1$ et un puits relie a tous les sites avec un poids $m+1$
2. lancer l'algorithme d'Edmonds-Karp (ou n'importe quel autre algo de flot, ici Ford-Fulkerson marche aussi car les poids sont entiers) pour trouver la valeur du flot maximum dans G, qui est aussi la valeur de la coupe minimum par le theoreme du cours

La premiere etape demande de recopier le graphe en y ajoutant les deux nouveaux sommets et se fait en $O(n+m)$ et l'algorithme d'EK a une complexite de $O(nm^2)$, qui est donc aussi la complexite totale de l'algorithme presente ici.

Question subsidiaire : comment augmenter l'algorithme pour obtenir non seulement la valeur de la coupe minimum mais aussi une telle coupe ?

Exercice 6. *Gestion de crise*

A la suite d'une catastrophe naturelle, les secours ont identifié en différents lieux n individus blessés qui doivent rapidement être évacués vers les hôpitaux de la région. Il y a p hôpitaux en tout, et pour chaque blesse, en fonction de son état et de sa localisation, les options d'évacuations sont réduites à un sous-ensemble fixé d'hôpitaux.

Vous devez organiser l'évacuation en affectant chaque blesse à un hôpital parmi ses options, sans surcharger les services de soins : chaque hôpital h, $1 \leq h \leq p$, peut admettre au plus n_h individus.

Connaissant pour chaque individu la liste des hôpitaux où l'évacuation est possible, donnez un algorithme efficace pour déterminer si tout le monde va pouvoir être évacué dans les conditions souhaitées. Analysez sa complexité.

Indication. Modeliser le probleme comme un probleme de flot dans un graphe bien choisi, puis utilisez l'algorithme de flot vu en cours.

Indication. Utilisez une formulation du probleme du flot un peu differente, qui requiert que les valeurs du flot sur chaque arc soit des entiers. Montrez que l'algorithme d'Edmonds-Karp permet de resoudre cette variante du probleme de flot dans le cas ou les capacites sont entieres.

Solution. Comme a l'exercice precedent, on peut se ramener a utiliser un algo de flot max/coupe min en modelisant la situation de facon adequate. Pour modeliser ce genre de probleme d'offre et de demande, on peut utiliser un graphe biparti, c'est une approche classique a retenir. D'un cote les blesses, de l'autre les hopitaux. On se ramene a un probleme de flot en construisant un graphe G dans lequel on ajoute une source unique reliee a chaque blesse par une arete et un puits relie a chaque hopital. Les aretes entre la source et les blesses recoivent une capacite de 1 car elles correspondent chacune a un blesse. Les aretes entre les blesses et les hopitaux ont aussi une capacite de 1 car elles correspondent a l'affectation d'un blesse a un hopital. Les aretes entre le puits et les hopitaux ont chacune une capacite qui correspond a la capacite d'acceuil de l'hopital en question. On cherche alors a calculer un flot entre s et t qui soit a valeurs entieres (c'est a dire que la valeur du flot sur chaque arc est un entier) et de valeur maximum possible avec cette condition.

Pourquoi est-ce que cela repond a la question ? La valeur maximale d'un flot entier est exactement le nombre maximum de blesses que peuvent prendre en charge les hopitaux avec les contraintes materielles posees. Pour s'assurer de cela il faut voir d'une part qu'une affectation valide (respectant les contraintes) de b blesses vers les hopitaux definit un flot de valeurs b dans le graphe G et d'autre part, que reciproquement, un flot de valeurs b dans le graphe G donne une affectation valide de b blesses dans les hopitaux.

Commencons par considerer une affectation valide de b blesses dans les hopitaux. On peut construire un flot de valeur b comme suit. Il suffit de mettre le flot a 1 sur les aretes entre la source et chaque blesse pris en charge, le flot a 1 sur l'arete entre chaque blesse pris en charge et l'hopital qui le prend en charge et le flot entre l'hopital h et le puits a la valeur b_h, ou b_h est le nombre de blesses pris en charge par l'hopital b. Comme la capacite de cette derniere arete a ete definie precisement comme le nombre maximum de blesses que peut accueillir l'hopital h, ce flot (qui est un entier) respecte les capacites des aretes et est donc bien un flot entier valide.

Reciproquement, soit un flot a valeur entiere de valeur b. Comme le flot est a valeur entiere, chaque blesse recoit de la source un flot de 1 ou 0. Par conservation du flot, ceux qui recoivent un flot de 1 envoient aussi un flot de 1 a excatement un hopital. On affecte chacun des b blesses qui recoivent un flot de 1 de la source a l'unique hopital auquel ils envoient un flot de 1. Cela donne une affectation valide car chaque hopital h recoit un flot de 1 de la part de b_h blesses, avec b_h qui est au plus la capacite de l'arete entre l'hopital h et le puits (car le flot est conservatif, respecte les capacites des aretes, et la capacite de l'arete entre l'hopital h et le puits a ete fixee exactement a la capacite d'accueil de l'hopital h).

Ainsi, il y a une bijection entre les flots a valeur entieres dans G et les affectations valides des blesses : une affectation qui prend en charge le maximum possible de blesses est donc un flot a valeur entieres de valeur maximum dans G. En cours, nous n'avons pas vu d'algorithme qui determine le flot maximum a valeurs entieres... mais en fait si ! L'algorithme d'Edmonds-Karp ou de Ford-Fulkerson par exemple. A chaque etape, ces algorithmes modifient le flot sur chaque arc en faisant des additions et soustractions de la valeur courante du flot et des capacites. Comme les capacites sont ici entieres et que le flot initial dans l'algorithme est a valeur entieres (il s'agit du flot nul), le flot sur chaque arc a chaque etape de l'algorithme est a valeurs entieres. Ainsi, le flot maximum retourne a la fin est a valeur entiere. Cela montre en fait plus generalement que si les capacites sont entieres, il existe toujours un flot maximum qui est a valeur entiere. Dans notre cas, on applique donc l'algo d'EK ou de FF pour trouver un flot maximum et on sait que le flot renvoye sera a valeur entieres : c'est donc un flot entier maximum. Remarquez que l'on peut appliquer FF lorsque les capacites ont entieres, car il n'y a alors pas de probleme de terminaison.

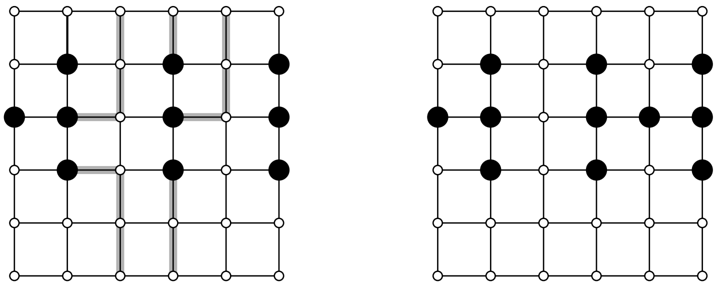
L'algorithme est donc le suivant :

1. on forme le graphe G en mettant une arete entre chaque blesse et ses hopitaux d'affectation possibles et on ajoute la source et le puits avec les aretes les reliants aux blesses et aux hopitaux, affectees de la bonne capacite (voir ci-dessus). Si on note n le nombre total de blesses plus d'hopitaux et m le nombre de possibilites d'affectation entre tous les blesses et tous les hopitaux, on obtient un graphe de taille $O(n+m)$ et cela prend un temps $O(n+m)$ de le construire.
2. on applique l'algo d'EK au graphe G ainsi forme, cela prend $O(nm^2)$
3. on obtient ainsi le nombre maximum de blesses qu'on peut affecter aux hopitaux en respectant les contraintes donnees (c'est la valeur du flot maximum retourne par EK)
4. si ce nombre est n on repond oui (il existe une affectation possible de tous les blesses) sinon on repond non.

La complexite totale est donc $O(n+m) + O(nm^2) = O(nm^2)$. Et si on veut une affectation des blesses, on en obtient directement une en prenant les aretes entre blesses et hopitaux dont le flot est a 1 dans le resultat retourne par EK. cela prend un temps $O(n+m)$ et n'augmente donc pas la complexite totale de l'algorithme.

Exercice 7. *Sauve qui peut !... mais sans pousser.*

Soit G une grille de $n \times n$ points et P un sous-ensemble de p points parmi les n^2. Le problème de l'évacuation consiste à déterminer s'il est possible de relier chacun des p points au bord de la grille par des chemins sans sommets communs.



Grille où il existe une solution — Grille sans solution

FIGURE 5 – Une grille.

a. On considère l'extension du problème du flot maximum où à la fois les arcs et les sommets ont une capacité maximum (le flot total transitant par un sommet doit être inférieur à sa capacité). Comment se ramener à un problème où seuls les arcs ont des capacités ?

Solution. L'idee est de former un graphe modifie $\tilde{G}$ en remplacant chaque sommet u de G par deux sommets u_{in} et u_{out} dans $\tilde{G}$, avec un arc de u_{in} a u_{out}. Tous les arcs entrant sur u dans G deviennent alors entrant sur u_{in} dans $\tilde{G}$ et tous les arcs sortant de u deviennent alors sortant de u_{out}. La capacite du sommet u est reportee sur l'arc (u_{in}, u_{out}) et les sommets u_{in} et u_{out} eux memes n'ont pas de capacite, seulement les arcs de $\tilde{G}$ en ont, s_{in} est la source dans $\tilde{G}$ et t_{out} le puits. On peut montrer (faites le) que le flot maximum entre s_{in} et t_{out} dans $\tilde{G}$ est egal au flot maximum entre s et t dans G. De plus, il est aise de transformer un flot dans $\tilde{G}$ en un flot dans G et vice-versa.

b. Comment résoudre le problème initial ?

Solution. La resolution de cette question reprends plusieurs des idees que nous avons vu dans les exercices precedents. On modelise d'abord le probleme comme un probleme de flot entier avec capacites sur les arcs et les sommets. Tous les sommets du bord de la grille sont des puits et tous les points donnes sont des sources. Tous les arcs ont capacite 1 (ils pourraient avoir une capacite plus grande, voire infinie, ca conviendrait aussi) et tous les sommets ont capacite 1 (ca c'est la clef). On veut trouver un flot entier (c'est a dire 0 ou 1 sur chaque arc ou sommet) de valeur maximum et savoir si cette valeur est au moins p, le nombre de points donnes. Si oui, on peut evacuer les p points donnes en respectant les contraintes, sinon on ne peut pas. On se ramene a un probleme a source et puits uniques en faisant la transformation usuelle et en attribuant une capacite de p a la nouvelle source et au nouveau puits. On fait ensuite la transformation decrite a la question precedente pour se ramener au cas ou on a des capacites seulement sur les arcs. On cherche ensuite un flot entier maximum avec l'algo d'Edmonds-Karp. Le graphe de la grille a $O(n^2)$ sommets et $O(n^2)$ aretes. Toutes les transformations necessaires peuvent etre faites en temps $O(n^2)$ et la complexite d'EK sur le graphe forme s'exprime comme $O(n^6)$, ce qui contrairement aux apparences est plus efficace que le cas general car ici le nombre de sommets est $\theta(n^2)$, la complexite est donc seulement cubique en le nombre de sommets (ce n'est pas specifique a la grille, c'est vrai pour tout graphe dont le nombre d'aretes est lineaire en le nombre de sommets).

Exercice 8. *Couplage maximum dans les graphes bipartis*

Un couplage d'un graphe G est un ensemble M d'aretes de G tel que tout sommet de G est incident a au plus une arete de M. Un couplage maximum est un couplage dont le nombre d'aretes $|M|$ est maximum parmi tous les couplages de G.
Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionne en deux parties (L, R) et qui ne contient aucune arete entre deux sommets de L, ni aucune arete entre deux sommets de R. Autrement dit, toutes les aretes du graphe biparti ont une extremite dans L et une dans R.

a. Expliquer comment modéliser le problème du calcul d'un couplage de cardinal maximum dans un biparti sous forme d'un problème de flot maximum.

Indication. Comme a l'exercice 6, vous pourrez utiliser un probleme de flot entier plutot qu'un flot classique, c'est a dire que les capacites sont des entiers et que l'on requiert que la valeur du flot sur chaque arc soit aussi un entier.

Solution. Pas de correction. Tout est dit dans les indications et on a fait ca plusieurs fois dans les corrections des exercices precedents.

b. En déduire un algorithme polynomial pour calculer un couplage max dans un biparti. Précisez sa complexité.

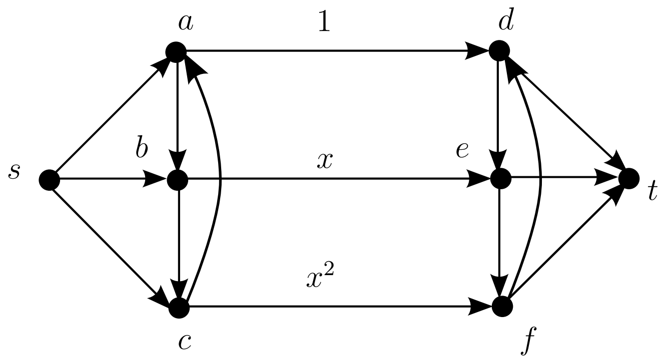
Indication. Comme a l'exercice 6, montrez que les algorithmes d'Edmonds-Karp et de Ford-Fulkerson vus en cours permettent aussi de resoudre le probleme du flot entier maximum.

Solution. Pas de correction. Tout est dit dans les indications et on a fait ca plusieurs fois dans les corrections des exercices precedents.

Exercice 9. *Pour aller plus loin : non-terminaison de la méthode de Ford-Fulkerson dans $\mathbb{R}$*

Pour un réseau de flot à capacités dans $\mathbb{Q}_+$, la méthode de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum termine en temps fini. On va montrer que ce n'est pas toujours le cas si les capacités sont dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, et le réseau suivant (les arcs où rien n'est indiqué ont pour capacité $+\infty$) :



a. Exhibez une suite infinie de chemins améliorants de s à t pour l'exemple ci-dessus.

Solution. Voir wikipedia **en anglais** : cherchez "Ford-Fulkerson wiki".

b. En général, si la méthode de Ford-Fulkerson ne termine pas, le flot trouvé tend-il quand même vers un flot maximum ?

Solution. Wikipedia **en anglais** repond aussi a la question : non. Sur l'exemple precedent, la valeur du flot converge en croissant mais ne tend pas vers la valeur maximum ! ! !