TD - Algorithmes d'approximation

Optimisation et Recherche Operationnelle

M1 Info - semestre d'automne 2020-2021

Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle `christophe.crespelle@inria.fr`
Eric Duchêne `eric.duchene@univ-lyon1.fr`
Aline Parreau `aline.parreau@univ-lyon1.fr`

Le TD est prevu pour 2h. Les exercices importants sont le 1 et, dans une moindre mesure, le 3.

optimal car = à la borne de la moyenne !

Exercice 1. *Au suivant !*

	makespan		
total :	16	14	16
	7		
	4	5	12
	5	9	4
	M1	M2	M3

a. Appliquer l'algo *List Scheduling* vu ~~en cours~~ pour l'equilibrage de charge sur les listes suivantes :
- — $L_1 = (\cancel{5}, \cancel{9}, \cancel{4}, \cancel{12}, \cancel{4}, \cancel{7}, \cancel{5})$ et 3 machines
- — $L_2 = (\cancel{4}, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{5}, \cancel{7}, \cancel{9}, \cancel{12})$ et 3 machines
- — $L_3 = (3, 5, 2, 4)$ et 2 machines
- — $L_4 = (1, 7, 8, 7, 2, 8)$ et 3 machines

Solution. Pour L_1, on obtient : $M_1(14) : [5, 4, 5]$, $M_2(16) : [9, 7]$, $M_3(16) : [4, 12]$.
Pour L_2, on obtient : $M_1(21) : [4, 5, 12]$, $M_2(11) : [4, 7]$, $M_3(14) : [5, 9]$.
Pour L_3, on obtient : $M_1(5) : [3, 2]$, $M_2(9) : [5, 4]$.
Pour L_4, on obtient : $M_1(16) : [1, 7, 8]$, $M_2(9) : [7, 2]$, $M_3(8) : [8]$.

b. Pour chacune des solutions obtenues, dites si elle est optimale ou non et prouvez le. Donnez le ratio d'approximation des solutions non optimales.

Solution. Pour L_1, la solution obtenue est optimale. Dans ce cas, c'est facile a prouver car elle atteint une des bornes inferieures vues en cours. Aucune solution ne peut etre meilleure que la moyenne des charges sur les trois machine. Ici, la moyenne est $46/3 > 15$. Donc aucune solution ne peut avoir un *makespan* inferieur a 16, ce qui est le cas de la solution obtenue, qui est donc optimale
Pour L_2, on est sur que la solution n'est pas otimale car les durees sont exactement les memes que pour L_1 (L_2 est un rearrangement dans un ordre different de L_1) et le nombre de machines est aussi le meme. Or, le *makespan* de la solution obtenue avec L_2 est de 21, contre 16 avec L_1 : la solution optenue avec L_2 n'est donc pas optimale et son ratio d'approximation est $21/16$. Remarque : si on nous avait pose la question pour L_2 sans nous donner L_1, on peut se douter que la solution obtenue avec L_2 n'est pas optimale car la charge des machines n'est pas tres equilibree. On aurait alors essaye de construire une meilleure solution pour prouver que celle obtenue avec L_2 n'est pas

TD - Algorithmes d'approximation

Optimisation et Recherche Operationnelle

M1 Info - semestre d'automne 2020-2021

Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle christophe.crespelle@inria.fr

Eric Duchêne eric.duchene@univ-lyon1.fr

Aline Parreau aline.parreau@univ-lyon1.fr

Le TD est prevu pour 2h. Les exercices importants sont le 1 et, dans une moindre mesure, le 3.

pas optimal car opt = 16 (vu avec L_1)

Ratio = $\frac{21}{16}$

makespan

Au suivant !

Exercice 1.

tot : 21 11 14

a. Appliquer l'algo *List Scheduling* vu en cours pour l'equilibrage de charge sur les listes suivantes :

— $L_1 = (5, 9, 4, 12, 4, 7, 5)$ et 3 machines
— $L_2 = (4, 4, 5, 5, 7, 9, 12)$ et 3 machines
— $L_3 = (3, 5, 2, 4)$ et 2 machines
— $L_4 = (1, 7, 8, 7, 2, 8)$ et 3 machines

M1	M2	M3
12		
5	7	9
4	4	5

Solution. Pour L_1, on obtient : $M_1(14) : [5, 4, 5]$, $M_2(16) : [9, 7]$, $M_3(16) : [4, 12]$.
Pour L_2, on obtient : $M_1(21) : [4, 5, 12]$, $M_2(11) : [4, 7]$, $M_3(14) : [5, 9]$.
Pour L_3, on obtient : $M_1(5) : [3, 2]$, $M_2(9) : [5, 4]$.
Pour L_4, on obtient : $M_1(16) : [1, 7, 8]$, $M_2(9) : [7, 2]$, $M_3(8) : [8]$.

8 8 7 7

b. Pour chacune des solutions obtenues, dites si elle est optimale ou non et prouvez le. Donnez le ratio d'approximation des solutions non optimales.

Solution. Pour L_1, la solution obtenue est optimale. Dans ce cas, c'est facile a prouver car elle atteint une des bornes inferieures vues en cours. Aucune solution ne peut etre meilleure que la moyenne des charges sur les trois machine. Ici, la moyenne est $46/3 > 15$. Donc aucune solution ne peut avoir un *makespan* inferieur a 16, ce qui est le cas de la solution obtenue, qui est donc optimale
Pour L_2, on est sur que la solution n'est pas otimale car les durees sont exactement les memes que pour L_1 (L_2 est un rearrangement dans un ordre different de L_1) et le nombre de machines est aussi le meme. Or, le *makespan* de la solution obtenue avec L_2 est de 21, contre 16 avec L_1 : la solution optenue avec L_2 n'est donc pas optimale et son ratio d'approximation est $21/16$. Remarque : si on nous avait pose la question pour L_2 sans nous donner L_1, on peut se douter que la solution obtenue avec L_2 n'est pas optimale car la charge des machines n'est pas tres equilibree. On aurait alors essaye de construire une meilleure solution pour prouver que celle obtenue avec L_2 n'est pas

$L3 = (3, 5, 2, 4)$ 2 ma.

$L4 = (1, 7, 8, 7, 2, 8)$ 3 ma.

$m = 3$

$L_1 = (5, 9, 4, 12, 4, 7, 5)$

ordre décroissant. $12, 9, 7, 5, 5, 4, 4$

t_1, t_2, t_3, t_4 — $t_3 = 7$, $t_4 = 5$

L_3 :

M1	M2
4	
2	
3	5
9	5

pas opt — makespan 9

opt = 7

ratio : $\frac{9}{7}$

une meilleure affectation optimale (atteint la borne inf de la moy.)

M1	M2
4	2
3	5
$\boxed{7}$	$\boxed{7}$

L_4 :

M1	M2	M3
8		
7	2	
1	7	8
16	9	8

pas opt — makespan — $\frac{16}{14} = \frac{8}{7}$

opt = 14

M_1	M_2	M_3
14	10	9
7	2	8
7	8	1

atteint la borne de $t_m + t_{m+1}$

3 bornes inférieures sur le makespan :

Calculable en temps poly

- makespan $\geq$ plus longue tâche
- makespan $\geq$ moy. des charges des machines (16) 15,33...
- makespan $\geq t_m + t_{m+1}$ (où m = # machines)

L_1	L_2	L_3	L_4
12	12	5	8
$\frac{46}{3}$	$46/3$	7	11
12	12	7	$\boxed{14}$

L_1 :

optimale.

Pour L_3, justement, on voit que dans la solution obtenue, la charge sur chacune des deux machines n'est pas tres equilibree : 5 et 9. On a envie d'essayer de construire une solution meilleure, ce qui est assez facile : $M_1(7) : [4, 3]$, $M_2(7) : [5, 2]$. Cette derniere solution est clairement optimale car toutes les machines ont la meme charge (la borne inferieure de la charge moyenne des machines est donc atteinte). La solution obtenue avec L_3 n'est donc pas optimale et son ratio d'approximation est 9/7.

Pour L_4, on obtient un makespan de 16. On soupconne qu'on pourrait faire mieux car les charges des machines ne sont pas tres equilibrees : 16, 9 et 8. On peut deja essayer l'algo *Longest Processing* (en triant les taches de la liste par ordre decroissant de duree) pour voir le makespan obtenu. On obtient : $M_1(10) : [8, 2]$, $M_2(9) : [8, 1]$, $M_3(14) : [7, 7]$ et donc un makespan de 14. Cela est encore assez loin de la borne inferieure donnee par la charge moyenne $\frac{10+9+14}{3} = 11$ et de plus, les charges des machines, 10, 9, 14 paraissent assez pauvrement equilibrees. C'est pourtant le makespan optimum ! Pour le montrer, on peut utiliser le raisonnement suivant, qui fait intervenir le principe du pigeonnier ;) Il y a 4 taches de duree superieure ou egale a 7 et 3 machines : dans n'importe quelle affectation, il y donc necessairement au moins une machine qui recoit au moins deux taches de duree superieure ou egale a 7. Ainsi, cette machine a une charge d'au moins 14 et le makespan de toute affectation est au moins 14. Comme on a trouve une affectation de makespan 14, c'est le makespan minimum. L_1, L_2

l'ensemble

On note Π_1 le probleme donne par [redacted] de duree des taches $T = \{\!\{5, 9, 4, 12, 4, 7, 5\}\!\}$ et 3 machines ; on note Π_2 le probleme donne par $T = \{\!\{3, 5, 2, 4\}\!\}$ et 2 machines.

L_3

c. Pour chacun des deux problemes Π_1 et Π_2 donnez deux listes qui produisent respectivement le meilleur et le pire resultat pour l'algo *List Scheduling*. Donnez le ratio d'approximation de chacune de ces solutions.

d. Prouvez que vos reponses a la question precedente sont bien les meilleurs et les pires resultats pour l'algo *List Scheduling*.

Solution. On traite les deux questions ensemble. Remarquez que les deux problemes proposes sont les memes que ceux etudies aux questions precedentes.

Pour Π_1 on sait donc deja que l'algo *List Scheduling* est capable de trouver une solution optimale, qui a un *makespan* de 16. Il nous reste donc a trouver le plus grand *makespan* qu'on peut obtenir par l'algo *List Scheduling* et a prouver que c'est bien le plus grand. Pour trouver un grand *makespan*, il faut essayer de faire une repartition des charges la plus desequilibree possible, avec par exemple la tache la plus longue 12 qui arrive a la fin lorsque le reste etait deja assez equilibre. Par exemple, si on applique l'algo *List Scheduling* sur la liste $(5, 7, 9, 5, 4, 4, 12)$ on obtient l'affectation suivante qui realise un *makespan* de 22 : $M_1(22) : [5, 5, 12]$, $M_2(11) : [7, 4]$, $M_3(13) : [9, 4]$. Il y a plusieurs facon de montrer que 22 est le plus grand *makespan* qu'on puisse obtenir par l'algo *List Scheduling*, plus ou moins simples et plus ou moins concises. En voici une relativement simple et assez concise.

D'abord, remarquez que si t est la duree de la derniere tache recue par la machine de plus grande charge dans l'algo *List Scheduling* et S est la somme des durees de toutes les taches, alors le makespan M obtenu verifie $M \le f(t)$, avec $f(t) = t + \frac{S-t}{m}$. En effet,

4 4 5 5 7 9 12 — 22 — 4 5

21 11 14 — 12 — 2 3

12 — 8

5 7 9 — 4 4 5

4 4 5 — 9 7 5 — $L = (9, 7, 5, 5, 4, 4, 12)$

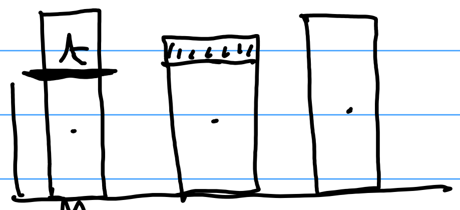
9 11 14 — 13 11 10

	meilleur makespan List Sched.	pire makespan List Sched.
Π_1	16	22
Π_2	7	9

S : somme des durées de toutes les tâches

t : durée de la dernière tâche affectée sur la machine la plus chargée

$$\text{makespan} \leq \underbrace{t + \frac{S-t}{m}}_{f(t)} = t\left(1-\frac{1}{m}\right) + \frac{S}{m}$$



au moment où M reçoit t :

la charge totale des machines $\leq S - t$

M était la moins chargée

$\text{charge}_t(M) \leq \frac{S-t}{m}$

la borne la plus grande c'est $f(t^*)$

$$f(12) = 12 + \frac{46-12}{3} = 12 + \frac{34}{3} = 12 + 11 + \frac{1}{3} = 23 + \frac{1}{3}$$

pire makespan par List Schedule $\leq 23 + \frac{1}{3}$

mais : toutes les tâches ont des durées entières

$\leq \underline{23}$ on a trouvé $\underline{22}$

le pire c'est soit 22 soit 23

si la dernière tâche reçue par la machine la plus chargée $t < 12$

makespan $\leq f(9) = 9 + \frac{46-9}{3} = 21 + \frac{1}{3}$ $\quad t \leq 9$

si $t < 12$ alors makespan ≤ 21

si il y a une sol à 23 c'est forcément avec $t = 12$

$$\frac{12}{\begin{matrix} 4 \\ 7 \\ 11 \end{matrix} \quad \boxed{9,\ 4,\ 5,\ 5}} = \frac{23}{2} = 11 + \frac{1}{2}$$

10 avg

donc une machine qui a une charge $\leq 11 \Rightarrow$ 10, 9

une seule façon de faire 11 avec les tâches données : $7 + 4$

$\Rightarrow$ conclusion impossible de faire <u>23</u>

On a fait <u>22</u> : le pire par l'algo de Kristo Schedu.

avant de recevoir la tache de duree t, la machine qui la recoit etait la moins chargee et avait donc une charge d'au plus la moyenne des charges de toutes les machines a ce moment la. Ensuite, remarquez que la fonction $f(t) = \frac{m-1}{m}t + \frac{S}{m}$ est croissante avec t. Applique au probleme Π_1, les deux plus grande valeur de $f(t)$ sont donc obtenues pour $t = 12$, $f(12) = 23 + \frac{1}{3}$, et pour $t = 9$, $f(9) = 21 + \frac{1}{3}$. Ainsi, comme toutes les taches sont de durees entieres, on obtient que le plus grand makespan qu'on peut obtenir par l'algo *List Scheduling* est soit 22 (le makespan de la solution qu'on a produite ci-dessus) soit 23 et qu'on ne peut l'obtenir que lorsque la tache de duree 12 est la derniere tache recue par la machine de plus grande charge.

Il reste a savoir si c'est possible d'obtenir un makespan de 23. On prouve que non par l'absurde : supposons qu'on obtienne un makespan de 23, on sait que la machine M_i de plus grande charge est alors celle qui a recu comme derniere tache celle de duree 12. Par consequent, elle avait juste avant une charge d'exactement 11. Il n'y a qu'une facon de faire 11 avec les taches restantes, qui sont de durees $9, 7, 5, 5, 4, 4$: avec 7 et 4. Donc, au moment ou M_i recoit la tache de duree 12, M_i a deja les taches de duree 7 et 4 qui lui sont affectees et les taches de duree $9, 5, 5, 4$ (qui somment a 23) sont reparties sur les deux autres machines. Par consequent, l'une de ces 2 autres machines, notee M_j, a une charge d'au plus 10 (la seule solution pour eviter cela serait d'avoir une machine de charge 11 et une de charge 12 mais cela est impossible a realiser avec les durees $9, 5, 5, 4$). Ainsi, M_j a une charge (au plus 10) strictement inferieure a celle de M_i (exactement 11) : c'est une contradiction, car dans ce cas c'est M_j qui aurait du recevoir la charge de duree $t = 12$ par l'algo *List Scheduling*. Cela montre qu'il n'existe pas de solution avec un makespan de 23, comme nous l'avions initialement suppose. Ainsi, la solution que nous avons exhibee realise le maximum du *makespan* qu'il est possible d'obtenir par l'algo *List Scheduling*.

Pour Π_2, on sait que l'optimum est 7 et qu'on peut obtenir 9 par l'algo *List Scheduling*. Peut-on obtenir l'optimum par l'algo *List Scheduling* ? Oui, avec la liste $L = (5, 4, 3, 2)$ par exemple. 9 est-il le *makespan* maximum qu'on peut obtenir par l'algo *List Scheduling* ? On soupconne que oui, prouvons le. En utilisant le raisonnement precedent, c'est direct : la plus grande tache a une duree de 5 et $f(5) = 5 + \frac{9}{2} = 9 + \frac{1}{2}$. Le makespan obtenu par la'go de liste est donc toujours au plus $9 + \frac{1}{2}$ et comme toutes les taches sont de durees entieres, il est d'au plus 9.

Dans ce cas, on aurait pu le montrer sans utiliser $f(t)$ en faisant une disjonction de cas, qui n'est pas tres longue car il y a peu de taches. Si deux taches sont affectees a chacune des deux machines, alors 9 est clairement le maximum qu'on peut obtenir car les durees des deux plus longues taches (5 et 4) somment a 9. La seule facon d'obtenir eventuellement un plus grand *makespan* serait de mettre plus de deux taches sur une des machines. Il doit etre clair que par l'algo *List Scheduling* on ne peut pas avoir une machine qui reste sans tache (des lors qu'il y a au moins autant de taches que de machines, comme c'est le cas ici) car cette machine a la charge minimum a tout moment de l'algo *List Scheduling*. La seule chose qui pourrait arriver dans l'algo *List Scheduling* pour qu'une machine M_i recoive au moins 3 taches serait qu'elle en recoive exactement 3 et que l'autre machine M_j en recoive exactement 1. Dans ce cas lorsque la machine M_i recoit sa troisieme tache, la somme des durees deux premieres taches qu'elle a recues n'excede pas la duree de la tache affectee a l'autre machine (qui a

4 3 4
6 5
M1 M2
10 12

necessairement deja recu une tache). La seule solution avec les quatre taches fournies est que les deux taches deja affectees a M_i soient celles de duree 2 et 3 et que celle affectee a M_j soit celle de duree 5. La derniere tache, de duree 4, peut alors etre affectee a M_i. De cette facon, on obtient bien une machine avec 3 taches et une avec une seule tache, mais le *makespan* est encore de $9 = 2 + 3 + 4$. Un *makespan* de 9 est donc le maximum (=le pire) qu'on peut obtenir par l'algo *List Scheduling*.

e. Pour chacun des deux problemes Π_1 et Π_2 quelle est la solution obtenue en appliquant l'algo *List Scheduling* sur la liste triee par ordre decroissant de duree des taches ? Cette solution est elle optimale ?

Solution. Pour Π_1, on obtient : $M_1(16) : [12, 4]$, $M_2(14) : [9, 5]$, $M_3(16) : [7, 5, 4]$. D'apres ce qui precede, il s'agit bien de l'optimal.
Pour Π_2, on obtient : $M_1(7)$: $[5, 2]$, $M_2(7) : [4, 3]$. Il s'agit encore de l'optimum.

f. Donnez un exemple de probleme sur deux machines tel que l'algo *List Scheduling* qui recoit en entree la liste triee par ordre decroissant de duree des taches ne fournit pas la solution optimale au probleme.

Longest Processing

Solution. Pour le probleme Π donne par $T = \{\!\{6, 5, 4, 4, 3\}\!\}$ et 2 machines ; avec l'algo *List Scheduling* sur la liste par ordre decroissant, on obtient un *makespan* de 12 : $M_1(10) : [6, 4]$, $M_2(12) : [5, 4, 3]$. Alors que l'optimum est 11 : $M_1(11) : [6, 5]$, $M_2(11) : [4, 4, 3]$.

Exercice 2.

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe toujours une liste qui, fournie en entree a l'algo *List Scheduling*, resulte en une affectation des taches realisant le makespan minimum. On note $\mathcal{T}$ l'ensemble des n taches et $\mathcal{M}$ l'ensemble des m machines d'une instance du probleme d'equilibrage de charges. Soit A une affectation des taches de $\mathcal{T}$ aux machines de $\mathcal{M}$, c'est a dire une application de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{M}$, qui a chaque tache associe une et une seule machine. Pour une machine $M \in \mathcal{M}$, on note $\mathcal{T}_A(M)$ l'ensemble des taches affectees a M dans A.
De plus, on definit le profil d'une affectation A, note $p(A)$, comme la sequence decroissante des charges des m machines dans A. Un profil p est donc une sequence de m reels que l'on note $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ avec $p_1 \geq p_2 \geq \cdots \geq p_m$. L'ordre lexicographique defini un ordre total sur les profils. C'est a dire que pour deux profils $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ et $p' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_m)$, avec $p \neq p'$, en notant i le plus petit indice dans $[\![1, m]\!]$ tel que $p_i \neq p'_i$, on a $p < p'$ ssi $p_i < p'_i$.

a. Soit A une affectation dont le profil est minimum pour l'ordre lexicographique. Montrez que A realise le makespan minimum.

Solution. Soit A' une affectation qui realise le makespan minimum. On note $p' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_m)$ le profil de A' et $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ le profil de A. Remarquez que le makespan d'une affectation n'est autre que le premier element de son profil. On a donc $makespan(A') = p'_1$ et $makespan(A) = p_1$. Comme le profil de A est minimum pour l'ordre lexicographique, on a $p_1 \leq p'_1$, et donc $makespan(A) \leq makespan(A')$. Comme A' realise le makespan minimum, cela implique que $makespan(A) = makespan(A')$ et que A realise le makespan minimum.

b. Soit A une affectation dont le profil est minimum pour l'ordre lexicographique. Soit $S \subsetneq \mathcal{T}$ un sous-ensemble strict des taches et soit $A[S]$ l'affectation obtenue en restreignant A aux taches de S. Montrez que l'ensemble $R_{min} \subseteq \mathcal{M}$ des machines dont la charge est minimum dans $A[S]$ contient au moins une machine M telle que $\mathcal{T}_{A[S]}(M) \neq \mathcal{T}_A(M)$.

Solution. Supposons pour contradiction que ce n'est pas le cas : toutes les machines de R_{min} ont dans l'affectation $A[S]$ les memes taches que dans l'affectation A. Comme S ne contient pas toutes les taches de $\mathcal{T}$, il existe au moins une machine $M \in \mathcal{M}$ qui n'a pas recu dans $A[S]$ toutes les taches qui lui sont affectees dans A. Par notre supposition, cette machine M n'est donc pas de charge minimum dans $A[S]$. Soit $M' \in R_{min}$, c'est a dire M' de charge minimum dans $A[S]$. On peut former une nouvelle affectation A' en affectant a M' toutes les taches qui sont affectees a M dans A et qui ne lui sont pas affectees dans $A[S]$. Pour obtenir une contradiction, montrons que $p(A') < p(A)$. Entre A et A' seules les charges de M et M' different. De plus, comme la charge de M' dans $A[S]$ est strictement superieure a celle de M, on a $\max\{charge_{A'}(M), charge_{A'}(M')\} < charge_A(M') = \max\{charge_A(M), charge_A(M')\}$. On a donc (prouvez le !), $p(A') < p(A)$: ce qui contredit que A est une affectation dont le profil est minimum pour l'ordre lexicographique. En consequent, contrairement a notre supposition, il existe une machine de R_{min} qui n'a pas les memes taches dans l'affectation $A[S]$ que dans l'affectation A : $\mathcal{T}_{A[S]}(M) \neq \mathcal{T}_A(M)$.

c. Montrez que pour toute instance du probleme d'equilibrage de charges, il existe toujours une liste qui, fournie en entree a l'algo *List Scheduling*, donne la solution optimale au probleme sur cette instance.

> **Indication.** Considerez une affectation A dont le profil est minimum pour l'ordre lexicographique et construisez, tache par tache, une liste L telle que lorsque L est donnee en entree a l'algo *List Scheduling*, il existe une execution de l'algorithme qui donne exactement l'affectation A.

Solution. Suivons l'indication en formant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ une liste $L_i = (T_1, T_2, \ldots, T_i)$ de taches telle que lorsque L_i est donnee en entree a l'algo *List Scheduling*, il existe une execution de l'algorithme qui produit l'affectation $A[L_i]$.
Pour $i = 1$, n'importe quelle tache T_1 convient. En effet, l'algo *List Scheduling* applique sur une liste a une seule tache peut placer cette tache sur n'importe quelle machine, qui sont toutes de charge nulle, et donc il existe une execution qui la place sur la machine que l'on souhaite, celle a laquelle elle est affectee dans A.
Lorsqu'on a construit la liste L_i, avec $i < n$, on choisit la tache suivante T_{i+1} a mettre dans la liste de la facon suivante. On considere l'affectation $A[L_i]$ obtenue en restreignant A aux taches de L_i. D'apres la question 2, il existe une machine M de charge minimum dans $A[L_i]$ qui n'a pas recu toutes les taches qui lui sont affectees dans A. On prend pour T_{i+1} n'importe quelle tache dans $\mathcal{T}_A(M) \setminus \mathcal{T}_{A[L_i]}(M)$. Lorsqu'on applique l'algo *List Scheduling* a la liste L_{i+1} ainsi formee, par notre hypothese de recurrence, il existe une execution qui affecte chaque tache de L_i comme dans l'affectation $A[L_i]$. Et comme M est de charge minimum dans $A[L_i]$, il existe une execution qui affecte T_{i+1} a M a l'etape suivante. Ainsi, dans cette execution, toutes les taches de L_{i+1} sont affectees comme dans l'affectation $A[L_{i+1}]$ obtenue en restreignant l'affectation A aux

taches de L_{i+1}.
En conclusion, pour $i = n$, on obtient une liste L_n pour laquelle il existe une execution de l'algo *List Scheduling* qui produit exactement l'affectation $A[L_n] = A$.

d. Si les n taches ont des durees deux a deux distinctes, combien y a-t-il de listes distinctes sur les durees des taches ? L'algorithme qui consiste a essayer toutes les listes possibles en entree de l'algorithme de liste est-il un algorithme efficace ? Comparez sa complexite a celle de l'algorithme *brute force* vu en cours.

Solution. Si les n taches ont des durees distinctes il y a exactement autant de listes distinctes sur les durees des taches que de listes sur les taches : $n!$.
Du coup, considerer toutes les listes possibles sur les durees des taches donnerait une complexite de $n!$ dans le pire des cas, ce qui n'est pas du tout efficace.
Neanmoins, cela constitue parfois une amelioration de l'algorithme brute force, qui essaye toutes les affectations et dont la complexite est $O(m^n)$. Si m est tres petit devant n (ce qui est le plus souvent le cas en pratique, ou m est souvent bornee par une constante), l'algorithme brute force est meilleur ! Mais si le nombre de machines disponibles est tres grand, c'est a dire que m est de l'ordre de n, par exemple $m = \frac{n}{K}$, avec K une constante, l'algorithme qui essaye toutes les listes en entree de l'algo *List Scheduling* devient plus rapide.

Exercice 3. *k-center selection*

Dans ce probleme, on donne un ensemble S de n sites dans le plan euclidien (mais en toute generalite, n'importe quelle distance symetrique et qui verifie l'inegalite triangulaire permettrait d'obtenir les memes resultats) et on veut selectionner au plus k centres (pas necessairement sur les sites donnes en entree) ou placer des casernes de pompiers pour proteger au mieux les n sites. Le critere que l'on veut minimiser pour l'ensemble des k centres $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$ selectionnes est le rayon de couverture $r(C) = \max_{s \in S}\{d(s, C)\}$, ou $d(s, C) = \min_{c \in C}\{d(s, c)\}$. Le but de l'exercice est de concevoir un algorithme d'approximation du rayon de couverture minimum avec k centres, qui ait un ratio d'approximation de 2 sur le rayon de couverture et qui fournisse un ensemble de k centres realisant cet objectif.
Supposons pour commencer qu'on connaisse le rayon de couverture minimum r. On propose alors l'algorithme suivant.

Algorithme 1 : Algorithme de 2-approximation en connaissant le rayon de couverture minimum r.

1 $S' \leftarrow S$;
2 $C \leftarrow \varnothing$;
3 **tant que** $S' \neq \varnothing$ **faire**
4   Selectionner un $s \in S'$ quelconque;
5     $C \leftarrow C \cup \{s\}$;
6   Retirer de S' tous les sites qui sont a distance au plus $2r$ de s;
7 **si** $|C| \leq k$ **alors**
8   **retourner** C;
9 **sinon**
10   **retourner** "le rayon de couverture minimum est $> r$";

a. Que retourne l'algorithme ? Qu'est-ce qui est approxime ici ? Que retourne l'algorithme si le rayon r qui lui est fourni n'est pas le rayon de couverture minimum (contrairement a ce que nous supposons ici) ?

Solution. L'algorithme retourne un ensemble de centres C. Ce qui est approxime est le rayon de couverture. Le rayon de couverture $r(C)$ de l'ensemble de centres C retourne par l'algorithme n'est pas le rayon optimal r (que l'on suppose connaitre). Remarquez que l'algorithme utilise effectivement le rayon optimal r, qui doit donc lui etre fourni. Dans le cas ou il n'existe pas d'ensemble de centres ayant un rayon de couverture r (c'est a dire que le rayon r fourni a l'algorithme n'est pas correct, il est inferieur au rayon de couverture minimum), l'algorithme s'en apercoit et retourne "le rayon de couverture minimum est $> r$". Par contre, dans le cas ou le rayon r fourni a l'algorithme est superieur au rayon minimum, l'algorithme ne s'en apercoit pas et retourne un ensemble C qui realise une 2-approximation du rayon r fourni en entree a l'algorithme. Mais dans ce cas, ce n'est pas necessairement une 2-approximation du rayon de couverture minimum.

b. Quel est la complexite de cet algorithme ?

Solution. Le nombre d'iterations de la boucle tant que de la ligne 3 est au plus n. A chaque iteration, il faut scanner la liste de tous les sites restants dans S' pour en retirer ceux qui doivent l'etre, cela prend un temps $O(|S'|) = O(n)$ car le test de distance avec s (ligne 6) se fait en temps constant. La complexite de l'algorithme peut donc s'exprimer comme $O(n^2)$.

Le but des questions suivantes est de montrer que l'algorithme 1 est correct et realise un rapport d'approximation de 2 sur le rayon de couverture qui lui est fourni en entree. C'est a dire que s'il existe un ensemble d'au plus k centres qui a un rayon de couverture r, alors l'algorithme 1 termine avec $|S| \leq k$ et S realise un rayon de couverture d'au plus $2r$. Soit C^* une solution de rayon de couverture r. Soit C la solution retournee par l'algorithme.

c. Montrez que pour tout $c \in C$, il existe $c^* \in C^*$ tel que $d(c, c^*) \leq r$.

Solution. Une particularite de l'algorithme est que les centres qu'il selectionne appartiennet tous a S (ligne 4), on a donc $C \subseteq S$. Ainsi, comme $c \in C$ implique que $c \in S$, il existe un centre c^* de la solution optimale C^* qui est a distance au plus r de c, car le rayon de couverture de la solution C^* est r. On a donc $d(c, c^*) \leq r$.

d. Soit $c^* \in C^*$ tel qu'il existe $c \in C$ tel que $d(c, c^*) \leq r$. Montrez que quel que soit $c' \in C \setminus \{c\}$, $d(c', c^*) > r$.

Solution. Considerons le premier $c \in C$ selectionne par l'algorithme tel que $d(c, c^*) \leq r$. Pour tous les centres $c' \in C$ qui ont ete selectionnes avant c dans l'algorithme, on a donc par definition $d(c', c^*) > r$. Soit maintenant un centre $c' \in C$ qui a ete selectionne apres c par l'algorithme. Comme au moment ou c a ete selectionne, l'algorithme retire de S' tous les sites s' tels que $d(s', c) \leq 2r$, on a donc $d(c', c) > 2r$ (car tous les centres selectionnes apres c le sont parmi les sites de S^* qui ne fait que diminuer, au sens de l'inclusion, au cours de l'algorithme). Par l'inegalite triangulaire, on a $d(c', c) \leq d(c, c^*) + d(c', c^*)$ et donc $d(c', c^*) \geq d(c', c) - d(c, c^*)$. Comme $d(c', c) > 2r$ et $d(c, c^*) \leq r$ cela donne $d(c', c^*) > 2r - r = r$.

e. Montrez par l'absurde que si l'algorithme termine avec $|C| > k$ alors il n'existe pas d'ensemble d'au plus k centres qui ait un rayon de couverture r.

Solution. Supposons pour contradiction que l'algorithme termine avec $|C| > k$ et qu'il existe un ensemble C^*, avec $|C^*| \leq k$, qui realise un rayon de couverture de r. D'apres la question c, on peut associer a chaque centre $c \in C$ un centre $assoc(c) \in C^*$. De plus, d'apres la question d, si $c, c' \in C$ et $c \neq c'$ alors necessairement $assoc(c) \neq assoc(c')$. Autrement dit, $assoc$ est une application injective de C dans C^*. Par consequence, on a $|C^*| > |C|$, ce qui est une contradiction. On en conclut que si l'algorithme termine avec $|C| > k$ alors il n'existe pas d'ensemble d'au plus k centres qui ait un rayon de couverture r.

f. En deduire que s'il existe un ensemble d'au plus k centres qui a un rayon de couverture r, alors l'algorithme trouve un ensemble d'au plus k centres qui a un rayon de couverture au plus $2r$.

Solution. Par contraposee de la propriete montree a la question precedente on a que s'il existe un ensemble d'au plus k centres qui ait un rayon de couverture r alors l'algorithme termine avec $|C| \leq k$. Or, lorsque l'algorithme termine S^* est vide. De plus, comme on retire un site de S^* seulement lorsqu'il est a une distance au plus $2r$ d'un centre $c \in C$ selectionne par l'algorithme (ligne 6), C realise toujours un rayon de couverture d'au plus $2r$.

On veut maintenant faire un algorithme de 2-approximation sur le rayon de couverture sans connaitre le rayon de couverture optimal. Pour cela, on remarque qu'a la ligne 4 du precedent algo, on peut choisir n'importe quel site s qui ne soit pas encore couvert par les centres selectionnes auparavant avec un rayon de $2r$.

g. Lorsqu'il existe un site non couvert par les centres selectionnes auparavant dans l'algorithme avec un rayon $2r$, comment peut-on choisir un site s pour etre sur qu'il soit non couvert sans meme connaitre r ?

Solution. S'il existe un site s qui est a une distance strictement superieure a $2r$ de tous les centres C selectionnes jusqu'a lors par l'algorithme, alors le site s dont la distance $d(s, C)$ aux centres de C est maximum satisfait cette condition. Ainsi, dans l'algorithme si on selectionne toujours le site le plus loin des centres deja selectionnes, on est sur de faire un choix valide, s'il en existe un.

h. En utilisant le resultat de la question precedente, ecrivez un algorithme pour le probleme k-center selection qui retourne toujours un ensemble C d'exactement k centres (on supposera $n > k$ sinon le rayon de couverture minimum est 0) et qui garantisse un facteur d'approximation de 2 sur le rayon de couverture minimum, sans supposer cette fois aucune connaissance sur le rayon de couverture minimum.

Solution. En suivant l'idee de la question precedente, on peut eviter le critere de la ligne 6 de l'algorithme 1, qui utilisait r, en selectionnant a la ligne 4 non pas un site quelconque mais le site le plus eloigne des centres deja selectionnes. On ne peut plus non plus gerer l'ensemble S' dont le maintient (ligne 6) supposait la connaissance de r. Ce qui nous oblige a changer la condition d'arret de la boucle. A la place, on peut executer la boucle exactement k fois pour selectionner exactement k sites comme centres, a chaque fois le site le plus eloigne des centres jusqu'alors selectionnes. Le nouvel algorithme ainsi obtenu, qui n'a pas connaissance du rayon minimum de couverture r, est decrit dans l'algorithme 2.

Algorithme 2 : Algorithme de 2-approximation sans connaitre le rayon de couverture minimum.

$C \leftarrow \varnothing$;
tant que $|C| < k$ **faire**
    Selectionner $s \in S$ tel que $d(s, C)$ est maximum ; \\ si $C = \varnothing$, $d(s, C) = +\infty$
    $C \leftarrow C \cup \{s\}$;
retourner C;

Il se peut que l'algorithme 2 selectionne des centres "inutiles" pour realiser un rayon de couverture d'au plus $2r$ (ou r est le rayon minimum) car il se peut que ce rayon de couverture de $2r$ soit realise avant d'avoir selectionne les k centres. Mais ce n'est pas un probleme : les k centres selectionnes, meme trop nombreux, realisent quand meme un rayon de couverture de $2r$. L'algorithme 2 n'a pas la possibilite de s'en apercevoir avant car il ne connait pas r.

i. Quel est la complexite de l'algorithme que vous avez propose a la question precedente ?

Solution. La boucle s'execute toujours k fois. A l'interieur, pour chacun des n site s il faut calculer la distance de s a chacun des au plus k centres deja selectionnes, ce qui demande un temps $O(kn)$. Au total la complexite est donc $O(k^2 n)$. On peut facilement ameliorer l'implementation pour obtenir une complexite totale de $O(kn)$. Pour cela, on peut maintenir dans un tableau $dist[]$ de taille n la distance $dist[s] = d(s, C)$ de chaque site s a l'ensemble C des centres deja selectionnes. Au depart, $dist[s] = +\infty$ pour tout s et a chaque fois qu'on selectionne un nouveau centre c on actualise $dist[s]$ pour tous les sites selon la formule $dist[s] \leftarrow \min\{dist[s], d(s, c)\}$. Cela prend un temps $O(n)$ a chaque iteration de la boucle et la selection du nouveau centre c prends aussi $O(n)$. Comme la boucle s'execute k fois on obtient une complexite totale de $O(kn)$.

j. Prouvez que le rayon de couverture $\tilde{r}$ des k-centres retournes par votre algorithme est une 2-approximation du rayon de couverture minimum.

Solution. Pour prouvez le rapport d'approximation, on peut se ramener au rapport qu'on a prouve pour l'Algorithme 1. Executez l'algorithme 2 en maintenant en plus un ensemble S' comme dans l'algo 1 : on initialise S' a S au debut de l'algo 2 et a chaque fois que l'algo 2 selectionne un nouveau centre c, on retire de S' tous les sites qui sont a distance au plus $2r$ de c (comme dans l'algo 1), ou r est le rayon minimum de couverture. Comme nous l'avons remarque a la question g, le choix du nouveau centre qui est fait par l'algo 2 est aussi un choix valide pour l'algo 1, tant que S' n'est pas vide. Or, nous avons montre a la question f, que si r est bien le rayon de couverture minimum, l'algo 1 realise un rayon de couverture au plus $2r$ avec $k' \leq k$ centres. Ainsi, apres k' iterations dans l'algo 2, on a exactement les memes centres selectionnes et ils ont donc un rayon de couverture d'au plus $2r$. Le fait que l'algo 2 selectionne d'autres centres par la suite ne peut pas faire augmenter le rayon de couverture et a la fin de l'algo 2, le rayon de couverture de l'ensemble de centres C retourne est donc au plus $2r$.