TD - Programmation lineaire

Optimisation et Recherche Operationnelle

M1 Info - semestre d'automne 2020-2021

Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@inria.fr

Eric Duchêne
eric.duchene@univ-lyon1.fr

Aline Parreau
aline.parreau@univ-lyon1.fr

Le TD est prevu pour 2h. Les exercices importants sont le 1 et le 2.

Exercice 1. *Il faut parfois savoir couper les cables en 4.*

Une usine produit des cables de cuivre de 5mm et de 10mm de diametre, sur lesquels le benefice est de respectivement 2 et 7 euros au metre. Le cuivre dont dispose l'usine permet de produire 20 km de cable de 5 mm de diametre par semaine. La production de cable de 10 mm demande 4 fois plus de cuivre que celle de cable de 5mm. Pour des raisons de demande, la production hebdomadaire de cable de 5mm ne doit pas depasser 15 km et pour des raisons de logistique la production de cable de 10 mm ne doit pas representer plus de 40% de la production totale.

a. Ecrivez un programme lineaire ayant pour objectif de maximiser le benefice hebdomadaire de l'usine, en supposant que dans les contraintes enoncees, tout se qui est produit est vendu.

b. Mettez le programme lineaire en forme standard.

c. Resolvez ce programme lineaire a la main, en manipulant les inegalites et la fonction objectif.

d. Resolvez ce programme lineaire par la methode graphique.

e. Comment changer les prix de vente pour qu'il y ait toujours une unique solution optimale mais differente de la precedente ?

f. Comment fixer les prix de vente pour qu'il y ait une infinite de solutions ?

Exercice 2. *Beaucoup, a la folie... pas du tout.*

On donne les 3 programmes lineaires suivants.

Π_1 : maximiser $x + 2y$ sous conditions :

$$
\begin{array}{lrrcr}
\text{(a)} & & -y & \leq & -1 \\
\text{(b)} & -x & +y & \leq & 1 \\
\text{(c)} & 2x & +3y & \leq & 10 \\
\text{(d)} & -2x & -y & \leq & -9 \\
\multicolumn{5}{l}{x, y \geq 0}
\end{array}
$$

Π_2 : maximiser $x + y$ sous conditions :

(a)	$-3x$	$+y$	$\leq$	-1
(b)	x	$-4y$	$\leq$	1
(c)	$-2x$	$-3y$	$\leq$	-6
(d)	$-x$		$\leq$	-1

$x, y \geq 0$

Π_3 : maximiser $-4x + y$ sous conditions :

(a)	$-3x$	$+y$	$\leq$	-1
(b)	x	$-4y$	$\leq$	1
(c)	$-2x$	$-3y$	$\leq$	-6
(d)	$-x$		$\leq$	-1

$x, y \geq 0$

a. Resolvez graphiquement les 3 problemes proposes.

b. Quelles sont leurs particularites ?

Exercice 3. *Le voyageur de commerce*

On se propose d'ecrire un programme lineaire en nombre entiers pour resoudre le probleme du voyageur de commerce. On a donc un ensemble X de villes et on note $\mathcal{P}_2(X)$ l'ensemble des paires de X. A chaque paire $uv \in \mathcal{P}_2(X)$ est associee une distance d_{uv} entre u et v. Pour ecrire un programme lineaire en nombre entiers, on introduit une variable binaire $b_{uv} \in \{0,1\}$ pour chaque paire $uv \in \mathcal{P}_2(X)$ de villes, avec $b_{uv} = 1$ ssi la paire uv est selectionnee dans le tour, c'est a dire si u et v aparaissent consecutivement dans le tour.

a. Ecrivez la fonction objectif a minimiser.

Il faut en plus encoder par des contraintes lineaires le fait que l'ensemble des paires selectionnees forment un cycle passant par tous les sommets.

b. Donnez l'ensemble de contraintes, appelees contraintes de parite, qui garantissent que chaque ville appartient a exactement 2 paires selectionnees dans le tour.

A ce stade, on obtient la fomulation suivante pour le programme lineaire en nombres entiers que l'on est en train de construire, note P :

P : minimiser $\sum_{uv \in \mathcal{P}_2(X)} d_{uv} b_{uv}$ sous contraintes :

(A) $\forall u \in X, \quad \sum_{v \in X \setminus \{u\}} b_{uv} = 2$

$\forall uv \in \mathcal{P}_2(X), b_{uv} \in \{0,1\}$

c. Donnez un exemple dans lequel chaque ville appartient a exactement 2 paires selectionnees dans P (c'est a dire pour lesquelles $b_{uv} = 1$) mais l'ensemble de ces paires ne forme pas un tour. Caracterisez tous les cas ou cela se produit.

Soit maintenant un graphe non oriente $G = (V, E)$, avec $|V| = n$, et le programme lineaire suivant associe a G. On introduit une variable $x_{(u,v)}$ pour chaque couple (u, v) de sommets adjacents dans G. Attention, couple $\neq$ paire : il y a deux fois plus de couples que de paires car les paires uv et vu sont identiques alors que les couples (u, v) et (v, u) sont differents. Le programme lineaire propose, note Π_G, s'ecrit alors, en notant $N(u)$ le voisinage d'un sommet u dans G :

$$\begin{array}{llrcl}
\multicolumn{5}{l}{\Pi_G \text{ : maximiser } \textit{rien} \text{ sous contraintes :}} \\
\hline
\text{(a)} & \forall uv \in E, & x_{(u,v)} + x_{(v,u)} & = & 2 \\
\text{(b)} & \forall u \in V, & \sum\limits_{v \in N(u)} x_{(u,v)} & \leq & 2 - \frac{2}{n} \\
\multicolumn{5}{l}{\forall u, v \in V^2 \text{ et } u \neq v,\ x_{uv} \in \mathbb{R}_+}
\end{array}$$

d. Montrez que si G contient un cycle, alors le programme lineaire Π_G ci-dessus n'admet pas de solution faisable.

e. Montrez que si G est un chemin, alors le programme lineaire ci-dessus admet au moins une solution faisable.

Soit w une ville quelconque de l'instance donnee du voyageur de commerce.

f. Montrez que si l'ensemble des paires selectionnees dans le programme lineaire P forme un tour alors le graphe $\tilde{G}$ forme par les paires selectionnees qui ne contiennent pas w est un chemin, et que sinon $\tilde{G}$ contient un cycle.

g. Completez le programme lineaire en nombre entier P en ajoutant en plus des contraintes de parite, un ensemble adequat de contraintes pour que les solutions optimales de P soient les solutions optimales au probleme de voyageur de commerce.