M1 Info - Optimisation et Recherche Opérationnelle

Cours 1 - Algorithmes Polynomiaux

Flot Maximum et Coupe Minimum

Semestre Automne 2021-2022 - Université Claude Bernard Lyon 1

Christophe Crespelle

christophe.crespelle@univ-lyon1.fr

département Informatique

Faculté des Sciences et Technologies

Université Claude Bernard Lyon 1

* Merci a A. Parreau et E. Duchene pour le materiel pedagogique ayant servi de base a ces slides.

Optimisation et Recherche Operationnelle

- Qu'est-ce que c'est ?
  - **Recherche operationnelle (wiki) :** recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
  - **Optimisation combinatoire :** recherche de la meilleure solution (fonction objectif) a un probleme qui admet un grand nombre (fini) de solutions possibles

Optimisation et Recherche Operationnelle

- Qu'est-ce que c'est ?
  - **Recherche operationnelle (wiki) :** recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
  - **Optimisation combinatoire :** recherche de la meilleure solution (fonction objectif) a un probleme qui admet un grand nombre (fini) de solutions possibles
- A quoi ca sert ?
  - gagner plus d'argent. ex : maximiser la production, minimiser les ressources utilisees
  - ameliorer la qualite d'un service. ex : ou placer les points de services, recommander des contenus, minimiser le temps de reponse
  - reconstruire des donnees manquantes. ex : sequencer le genome

Optimisation et Recherche Operationnelle

- Qu'est-ce que c'est ?
  - **Recherche operationnelle (wiki) :** recherche du meilleur choix dans la façon d'opérer en vue d'aboutir au résultat visé ou au meilleur résultat possible.
  - **Optimisation combinatoire :** recherche de la meilleure solution (fonction objectif) a un probleme qui admet un grand nombre (fini) de solutions possibles
- A quoi ca sert ?
  - gagner plus d'argent. ex : maximiser la production, minimiser les ressources utilisees
  - ameliorer la qualite d'un service. ex : ou placer les points de services, recommander des contenus, minimiser le temps de reponse
  - reconstruire des donnees manquantes. ex : sequencer le genome
- Domaines et contextes d'application :
  - gestion de projets
  - industrie
  - finance
  - energie
  - informatique

Exemple 1 : implantation d'hopitaux

- **Donnee :** une densite de population, *k* hopitaux a placer

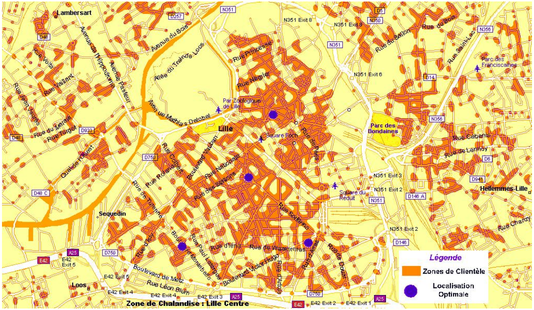


FIGURE – Un probleme d'implantation avec 4 hopitaux.

- **Probleme 1 :** placer les 4 hopitaux de sorte a minimiser la distance *maximale* d'un foyer de population a l'hopital le plus proche

Exemple 1 : implantation d'hopitaux

- **Donnee :** une densite de population, k hopitaux a placer

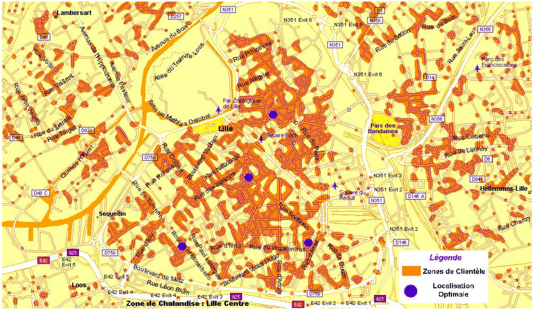


FIGURE – Un probleme d'implantation avec 4 hopitaux.

- **Probleme 1 :** placer les 4 hopitaux de sorte a minimiser la distance *maximale* d'un foyer de population a l'hopital le plus proche
- **Probleme 2 :** minimiser la distance *moyenne* d'un foyer de population a l'hopital le plus proche

Exemple 2 : equilibrage de charges

- **Donnee :** un ensemble de taches $T_1, T_2, \ldots, T_n$, chacune avec une duree $d(T_i)$, et k postes de travail

FIGURE – Un probleme d'equilibrage de charges avec 12 taches et 4 postes de travail.

- **Probleme :** trouver une affectation des taches sur les postes qui minimise le temps de fin d'execution

Objectifs du cours

- **Differents types de problemes d'optimisation**
  flot maximum, coupe minimum, stable maximum, voyageur de commerce, equilibrage de charges, sac a dos, couverture par sommets, selection de k centres
- **Techniques algorithmiques generales pour les resoudre**
  - algorithmes polynomiaux — solution exacte
  - algorithmes probabilistes — solution **souvent** optimale
  - branching — solution exacte
  - programmation dynamique — solution exacte
  - algorithmes d'approximation — solution **proche** de l'optimal
  - programmation lineaire et en nombre entiers — solution exacte
  - *(meta-)heuristiques* — **"bonne"** solution

Objectifs du cours

- **Differents types de problemes d'optimisation**
  flot maximum, coupe minimum, stable maximum, voyageur de commerce, equilibrage de charges, sac a dos, couverture par sommets, selection de k centres
- **Techniques algorithmiques generales pour les resoudre**
  - algorithmes polynomiaux
  - algorithmes probabilistes
  - branching
  - programmation dynamique
  - algorithmes d'approximation
  - programmation lineaire et en nombre entiers
  - *(meta-)heuristiques*

Complexite polynomiale : traite de grandes instances
Complexite exponentielle : traite seulement de petites instances

Organisation pratique du cours

Volume :

- CM : 15h
- TD : 9h
- TP : 6h

Evaluation (en controle continu partiel) : NON CONTRACTUEL ;)

- examen final : 1/2
- tests intermediares (2) : 1/6 chacun
- evaluation des TP : 1/6
  - un rendu en fin de seance
  - *un rendu en fin de semestre (mini-projet=finir le TP1)*

Emploi du temps :

`https://perso.ens-lyon.fr/christophe.crespelle/enseignements.html`

- tout en presentiel (youpi !) ⇒ gestes barrieres stricts
- CM en amphi 6 Marie Curie (sauf le dernier)
- TD et TP au nautibus

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

- Poser des questions en CM

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

- Poser des questions en CM
- Poser des questions en CM

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

- Poser des questions en CM
- Poser des questions en CM
- Revoir les notions de base dans *Introduction a l'algorithmique*, Cormen et al.

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

- Poser des questions en CM
- Poser des questions en CM
- Revoir les notions de base dans *Introduction a l'algorithmique*, Cormen et al.
- Retravailler les CM a posteriori

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

- Poser des questions en CM
- Poser des questions en CM
- Revoir les notions de base dans *Introduction a l'algorithmique*, Cormen et al.
- Retravailler les CM a posteriori
- Travailler les corrections des TD

Reussir l'UE

Comment reussir l'UE ?

- Apprendre les CM par coeur
- Finir les 2 TP
- Savoir faire les TD (corrections integrales fournies)

Que faire si vous etes perdu ?

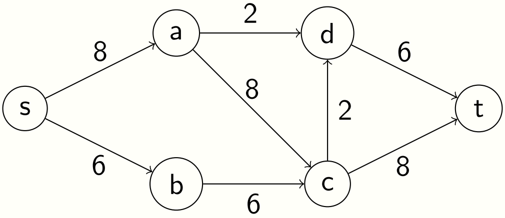
- Poser des questions en CM
- Poser des questions en CM
- Revoir les notions de base dans *Introduction a l'algorithmique*, Cormen et al.
- Retravailler les CM a posteriori
- Travailler les corrections des TD
- Consultez les passages de livre sur le cours (versions electroniques)
  - *Introduction a l'algorithmique*, Cormen *et al.*
  - *Algorithm Design*, Kleinberg et Tardos
  - *Exact Exponential Algorithms*, Fomin et Kratsch

I. Problème du flot maximum

- **Entrée :**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$

I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{ccc} A & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$
    s est la source, t est le puits (*tank* en anglais)



I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{ccc} A & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts ($s \neq t$)
    s est la source, t est le puits (*tank* en anglais)

Définition (flot et valeur d'un flot)

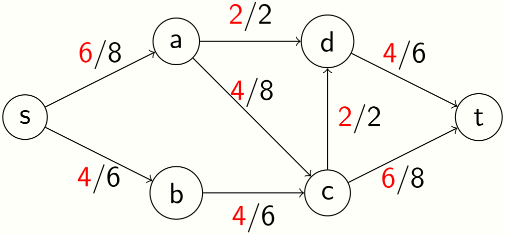
Un *flot* est une fonction $f : A(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui satisfait les deux conditions suivantes :

- **Contraintes de capacite :** $\forall (u, v) \in A, 0 \leq f(u, v) \leq c(u, v)$
- **Conservation :**
  $\forall u \in V \setminus \{s, t\}, \sum_{v \in N^-(u)} f(v, u) = \sum_{v \in N^+(u)} f(u, v)$

La *valeur d'un flot* f, notee $|f|$, est la quantité relative de flot qui sort de s : $|f| = \sum_{v \in N^+(s)} f(s, v) - \sum_{v \in N^-(s)} f(v, s)$.
Ou de maniere equivalente $|f| = \sum_{v \in N^-(t)} f(v, t) - \sum_{v \in N^+(t)} f(t, v)$.

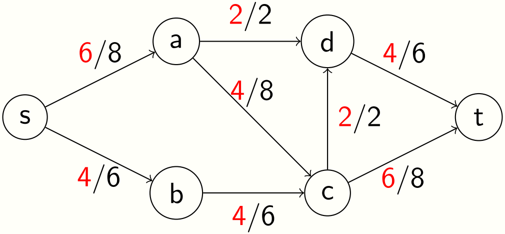
I. Problème du flot maximum

Un flot f



I. Problème du flot maximum

Un flot f



de valeur $|f| = 10$.

I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$

I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$
- **Sortie :** un flot sur G de valeur maximum

I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{rcl} A & \rightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$
- **Sortie :** un flot sur G de valeur maximum

On notera $|f^*|$ la valeur maximum d'un flot et f^* un flot qui realise cette valeur.

I. Problème du flot maximum

- **Entrée : un reseau de flot (flow network en anglais)**
  - un graphe orienté $G = (V, A)$ **sans arcs symetriques**
  - une fonction de capacite $c : \begin{array}{rcl} A & \to & \mathbb{R}^{+*} \\ (u, v) & \mapsto & c(u, v) \end{array}$
  - un couple $(s, t) \in V^2$ de sommets distincts $(s \neq t)$
- **Sortie :** un flot sur G de valeur maximum

On notera $|f^*|$ la valeur maximum d'un flot et f^* un flot qui realise cette valeur.

Question : $|f^*|$ (et donc f^*) est elle correctement definie ?

Existence d'un flot de valeur maximum ?

- Le maximum de *quelque chose* n'est pas toujours bien defini.
  - ex : le max des entiers premiers ?

Existence d'un flot de valeur maximum ?

- Le maximum de *quelque chose* n'est pas toujours bien defini.
  - ex : le max des entiers premiers ?
- Dans les entiers, si la valeur est bornee alors le max est bien defini.
  - ex : le max des puissances de 2 strictement inferieures a 7843 ?

Existence d'un flot de valeur maximum ?

- Le maximum de *quelque chose* n'est pas toujours bien defini.
  - ex : le max des entiers premiers ?
- Dans les entiers, si la valeur est bornee alors le max est bien defini.
  - ex : le max des puissances de 2 strictement inferieures a 7843 ?
- Dans les reels ca ne suffit pas : il y a encore une **infinite** de valeurs.
  - ex : le max des reels strictements plus petits que 1 ?

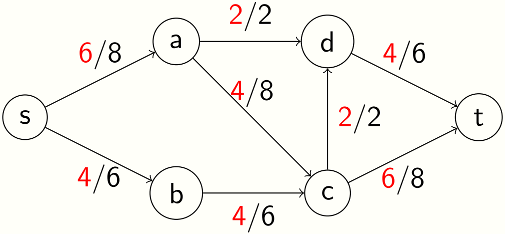
Existence d'un flot de valeur maximum ?

- Le maximum de *quelque chose* n'est pas toujours bien defini.
  - ex : le max des entiers premiers ?
- Dans les entiers, si la valeur est bornee alors le max est bien defini.
  - ex : le max des puissances de 2 strictement inferieures a 7843 ?
- Dans les reels ca ne suffit pas : il y a encore une **infinite** de valeurs.
  - ex : le max des reels strictements plus petits que 1 ?

$\Rightarrow$ pour le flot on est dans ce cas la : il est borne **mais** il y a une infinite de valeurs possibles pour un flot... il faut plus d'arguments pour garantir l'existence de la valeur max.

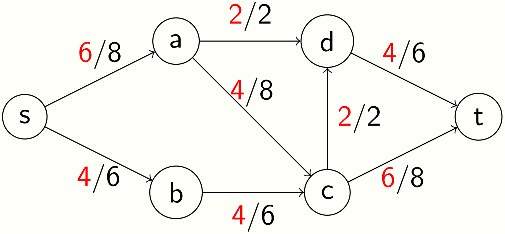
I. Problème du flot maximum

f est-il un flot maximum ?



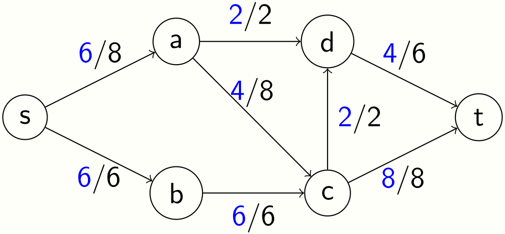
I. Problème du flot maximum

f est-il un flot maximum ? $\longrightarrow$ NON



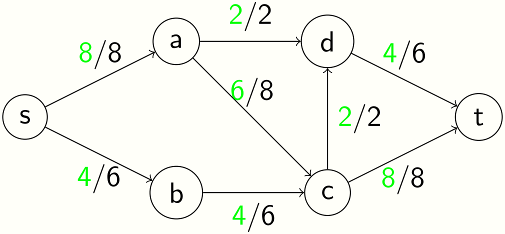
I. Problème du flot maximum

f est-il un flot maximum ? $\longrightarrow$ NON
f' est maximum ($|f'| = 12$).



I. Problème du flot maximum

f est-il un flot maximum ? $\longrightarrow$ NON
f' est maximum ($|f'| = 12$).
f'' est aussi maximum ($|f''| = 12$).



Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ?

Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ? (au fait, utile ?)

Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ? (au fait, utile ?)
- Graphes non orientes ?

Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ? (au fait, utile ?)
- Graphes non orientes ?
- Capacites nulles ?

Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ? (au fait, utile ?)
- Graphes non orientes ?
- Capacites nulles ?
- Sources et puits multiples ?

Cadre plus general pour l'entree

- Arcs symetriques ? (au fait, utile ?)
- Graphes non orientes ?
- Capacites nulles ?
- Sources et puits multiples ?

Questions : Quel temps de calcul prennent ces transformations ?
Penalisent elles la complexite de l'algorithme ?

II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

Définition (s, t-coupe et sa capacite)

Une *s, t-coupe* est une bipartition (S, T) de V telle que $s \in S$ et $t \in T$.

La *capacite* de la coupe (S, T) est $C(S, T) = \sum_{(u,v) \in (S \times T) \cap A} c(u, v)$

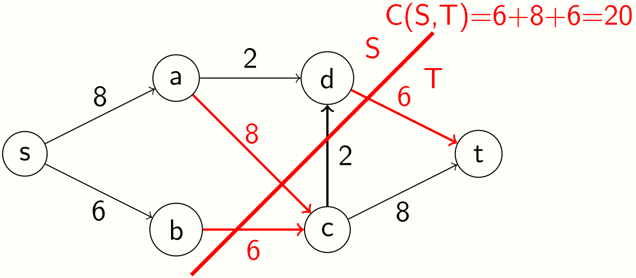
II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

Définition (s, t-coupe et sa capacite)

Une *s, t-coupe* est une bipartition (S, T) de V telle que $s \in S$ et $t \in T$.

La *capacite* de la coupe (S, T) est $C(S, T) = \sum_{(u,v) \in (S \times T) \cap A} c(u, v)$



II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

- **Sortie :** une s, t-coupe de G de capacite minimum

II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

- **Sortie :** une s, t-coupe de G de capacite minimum

Question : la capacite *minimum* d'une s, t-coupe est elle correctement definie ?

Existence d'une coupe de valeur minimum ?

- La valeur d'un coupe est bornee : ≥ 0.

Existence d'une coupe de valeur minimum ?

- La valeur d'un coupe est bornee : ≥ 0.
- Mais elle est reelle...

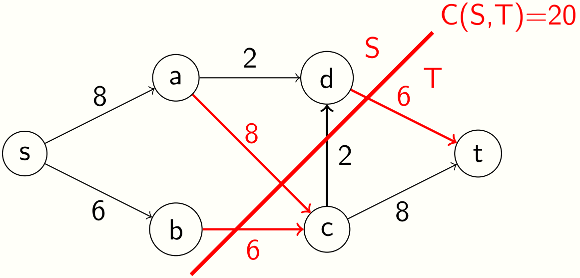
Existence d'une coupe de valeur minimum ?

- La valeur d'un coupe est bornee : ≥ 0.
- Mais elle est reelle...
- Heureusement, il y a un nombre fini de s, t-coupes : exactement 2^{n-2}.

II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)
- **Sortie :** une s, t-coupe de G de capacite minimum

(S,T) est-elle une coupe minimum ?

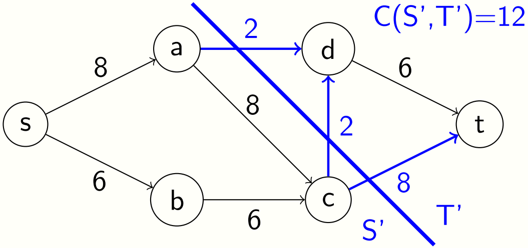


II. Probleme de la coupe minimum

- **Entrée :** un reseau de flot $G = (V, A)$ avec une source s et un puit t (exactement comme precedemment)

- **Sortie :** une s, t-coupe de G de capacite minimum

(S,T) est-elle une coupe minimum ? $\longrightarrow$ NON
(S',T') a capacite 12.



III. Le theoreme flot maximum / coupe minimum

Théorème

Soit G un reseau de flot ayant pour source s et pour puits t. La capacite minimum d'une s, t-coupe de G est egale a la valeur maximum d'un flot entre s et t dans G.

Remarque

L'enonce du theoreme sous-entend qu'il existe un flot de valeur maximum, la preuve devra l'etablir.

Reseau residuel

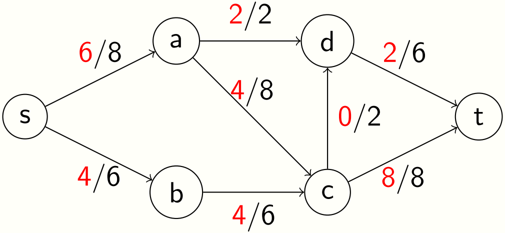
Définition (* Reseau residuel d'un flot f)**

C'est un reseau de flot, note $G_f = (V_f, A_f)$, avec **possibilite d'arcs symetriques**, defini comme suit :

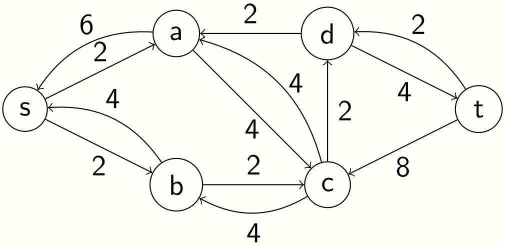
- $V_f = V$, meme source s et puits t que G
- $\forall (u, v) \in A \cup A^r$,
  $$c_f(u, v) = \left| \begin{array}{ll} c(u, v) - f(u, v) & \text{si } (u, v) \in A \\ f(v, u) & \text{si } (v, u) \in A \end{array} \right.$$
- $A_f = \{(u, v) \in A \cup A^r \mid c_f(u, v) > 0\}$

Exemple de residuel

Un reseau de flot G et un flot f



Le residuel G_f de f



Flot dans le residuel

Remarque

La definition d'un flot dans un reseau sans arcs symetriques est valide aussi avec possibilite d'arcs symetriques : on l'adopte pour faire des flots dans le reseau residuel.

Flot dans le residuel

Remarque

La definition d'un flot dans un reseau sans arcs symetriques est valide aussi avec possibilite d'arcs symetriques : on l'adopte pour faire des flots dans le reseau residuel.

Lemme

Soit f' un flot du reseau residuel G_f de f et soit $f + f'$ defini par $\forall (u, v) \in A, (f + f')(u, v) = f(u, v) + f'(u, v) - f'(v, u)$.
(en considerant $f'(x, y) = 0$ si l'arc (x, y) n'existe pas dans G_f)
Alors, $f + f'$ est un flot sur G et sa valeur est $|f| + |f'|$.

Démonstration.

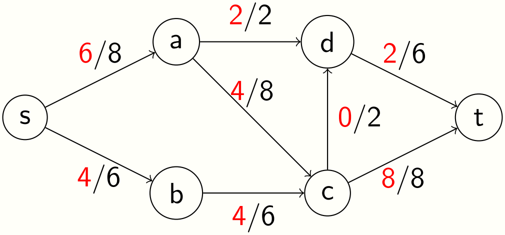
Verifier :

- contraintes de capacite
- conservation
- valeur

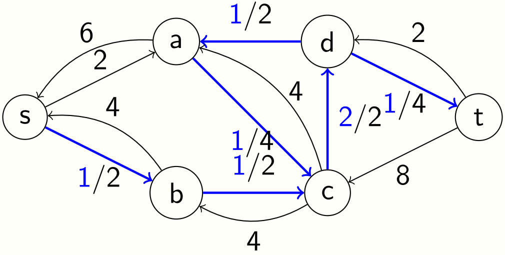
$\square$

Flot dans le residuel

Un flot f dans G

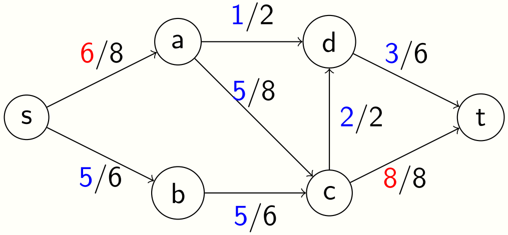


Un fot f' dans le residuel G_f

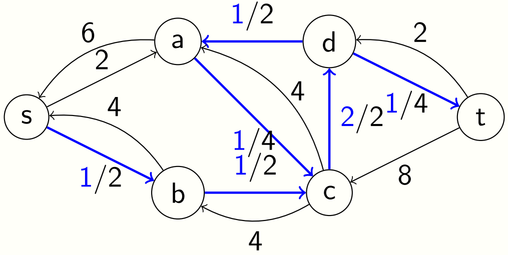


Flot dans le residuel

Le flot $\tilde{f} = f + f'$ dans G



Un fot f' dans le residuel G_f



Chemin augmentant dans G_f et sa capacite residuelle

Définition

Soit G un reseau de flot, f un flot sur G et G_f le residuel de f. Un chemin augmentant P est un chemin de s a t dans G_f. La capacite residuelle de P est defini par $c_f(P) = \min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in P\}$.

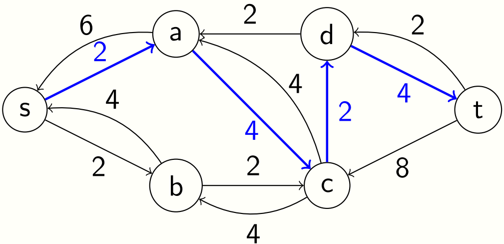
Remarque

Soit P un chemin augmentant dans G_f et soit f_P defini par

$$\forall (u,v) \in A_f, \;\; f_P(u,v) = \left| \begin{array}{ll} c_f(P) & \text{si } (u,v) \in P \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right. .$$

Alors, f_P est un flot dans G_f et sa valeur est $|f_P| = c_f(P)$.

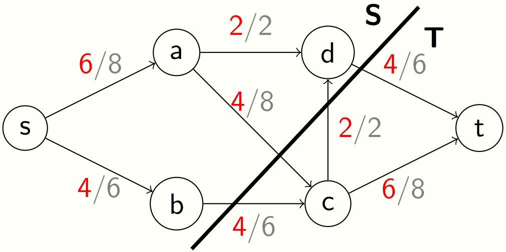
Exemple de residuel :



Flot net a travers une s, t-coupe

Définition

Soit $G = (V, A)$ un reseau de flot relache et (S, T) une s, t-coupe de G. Le flot net a travers (S, T) est defini par
$f(S, T) = \sum_{(u,v) \in (S \times T) \cap A} f(u, v) - \sum_{(v,u) \in (T \times S) \cap A} f(v, u).$

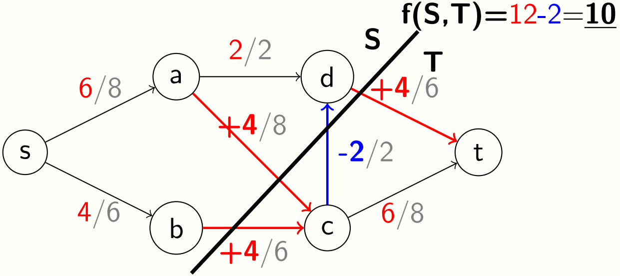


Flot net a travers une s, t-coupe

Définition

Soit $G = (V, A)$ un reseau de flot relache et (S, T) une s, t-coupe de G. Le flot net a travers (S, T) est defini par

$$f(S, T) = \sum_{(u,v) \in (S \times T) \cap A} f(u, v) - \sum_{(v,u) \in (T \times S) \cap A} f(v, u).$$



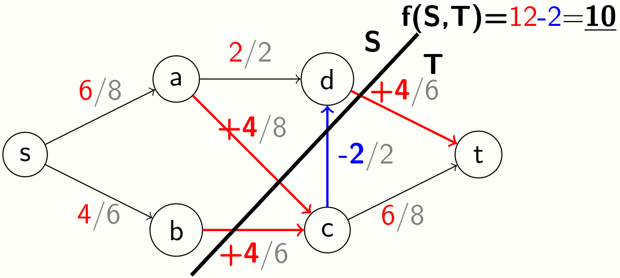
Flot net a travers une s, t-coupe

Définition

Soit $G = (V, A)$ un reseau de flot relache et (S, T) une s, t-coupe de G. Le flot net a travers (S, T) est defini par
$f(S, T) = \sum_{(u,v)\in(S\times T)\cap A} f(u, v) - \sum_{(v,u)\in(T\times S)\cap A} f(v, u)$.

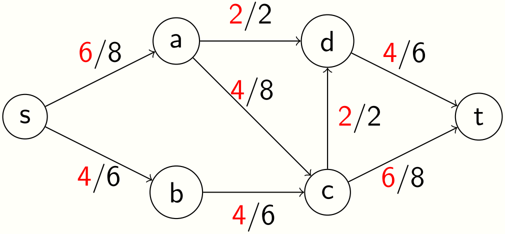
Remarque (***)

On a toujours $f(S, T) \leq C_G(S, T)$.



Recapitulatif

Capacite d'une s, t-coupe et flot net a travers la coupe.



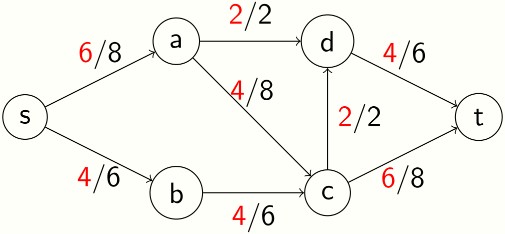
Toutes les s, t-coupes ont le meme flot net !

Lemme (***)

Soit (S, T) une s, t-coupe de G et soit f un flot sur G. Alors, le flot net qui traverse (S, T) vaut $f(S, T) = |f|$.

Toutes les s, t-coupes ont le meme flot net !

Vraiment ? ? ?



Toutes les s, t-coupes ont le meme flot net !

Lemme (***)

Soit (S, T) une s, t-coupe de G et soit f un flot sur G. Alors, le flot net qui traverse (S, T) vaut $f(S, T) = |f|$.

Démonstration.

Soit $u \in S \setminus \{s\}$, montrez que $f(S \setminus \{u\}, T \cup \{u\}) = f(S, T)$.

Comment conclure ?

$\square$

Toutes les s, t-coupes ont le meme flot net !

Lemme (***)

Soit (S, T) une s, t-coupe de G et soit f un flot sur G. Alors, le flot net qui traverse (S, T) vaut $f(S, T) = |f|$.

Démonstration.

Soit $u \in S \setminus \{s\}$, montrez que $f(S \setminus \{u\}, T \cup \{u\}) = f(S, T)$.

Comment conclure ?

□

Corollaire

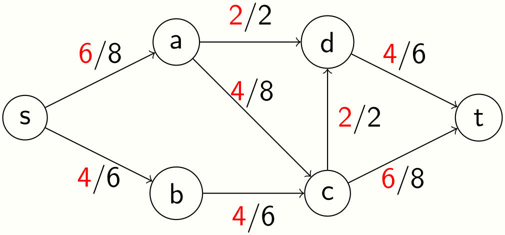
Pour toute s, t-coupe (S, T) et tout flot f, on a $|f| \leq C(S, T)$.

Démonstration.

Par definition de $C(S, T)$ et de $f(S, T)$, on a directement $f(S, T) \leq C(S, T)$. Le lemme ci-dessus conclut. □

Question

Que vaut le flot net a travers une coupe qui ne separe pas s et t ?



Capacite d'une coupe dans le residuel

Remarque

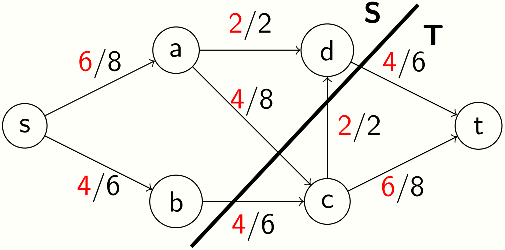
La capacite de la s, t-coupe (S, T) dans le reseau residuel G_f verifie $C_{G_f}(S, T) = C_G(S, T) - f(S, T)$.

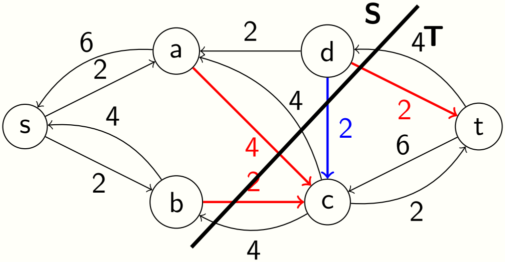
Démonstration.

$\square$

Capacite d'une coupe dans le residuel

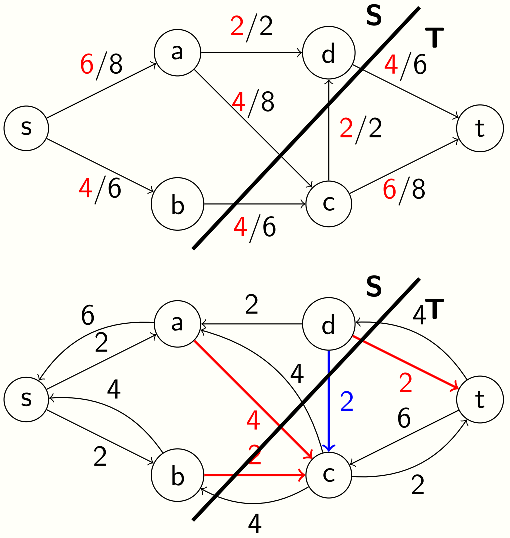
$$C_G(S,T) - f(S,T) = C_G(S,T) - (f_{out}(S,T) - f_{in}(S,T))$$





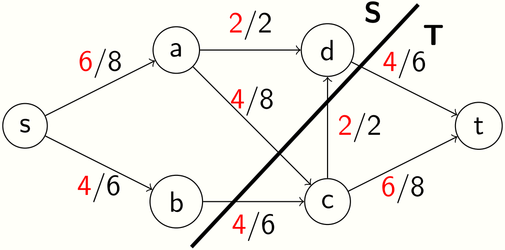
Capacite d'une coupe dans le residuel

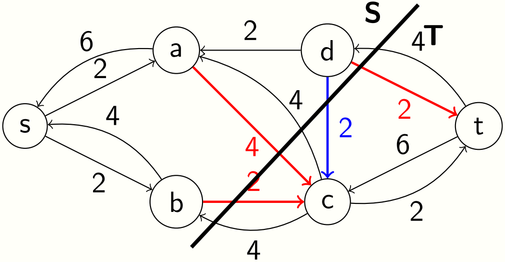
$$\begin{aligned} C_G(S,T) - f(S,T) &= C_G(S,T) - (f_{out}(S,T) - f_{in}(S,T)) \\ &= (C_G(S,T) - f_{out}(S,T)) + f_{in}(S,T) \end{aligned}$$



Capacite d'une coupe dans le residuel

$$C_{G_f}(S,T) = C_G(S,T) - f(S,T) = C_G(S,T) - (f_{out}(S,T) - f_{in}(S,T))$$
$$= ({\color{red}C_G(S,T) - f_{out}(S,T)}) + {\color{blue}f_{in}(S,T)}$$





Le theoreme flot maximum / coupe minimum

Théorème (***)

Soit G un reseau de flot et f un flot sur G. Les trois conditions suivantes sont equivalentes :

1. *f est un flot maximum de G*
2. *le residuel G_f de f ne contient pas de chemin augmentant*
3. *$\exists$ une s, t-coupe (S, T) telle que $|f| = C(S, T)$*

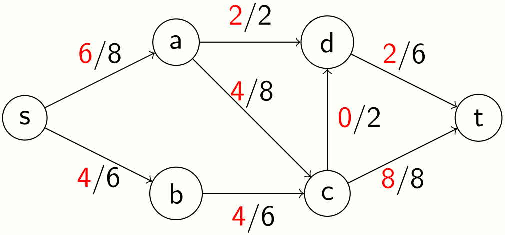
Démonstration.

- **1 $\Rightarrow$ 2.** D'apres la remarque sur les chemins augmentant on a $\overline{2} \Rightarrow \overline{1}$.
- **2 $\Rightarrow$ 3.** Si 2 alors il existe une s, t-coupe (S, T) de capacite nulle dans G_f, ce qui implique $C_G(S, T) = |f|$ d'apres la remarque sur la capacite dans G_f des s, t-coupes.
- **3 $\Rightarrow$ 1.** D'apres le corollaire du slide 36, on a $|f^*| \leq C(S, T)$, donc $|f| = |f^*|$.

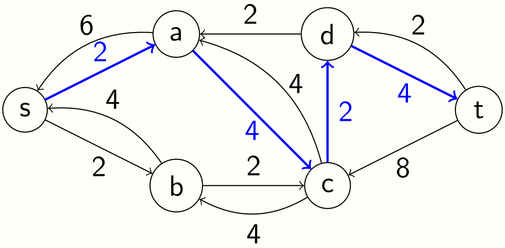
$\square$

Le theoreme flot maximum / coupe minimum

- $\overline{2} \Rightarrow \overline{1}$. ***

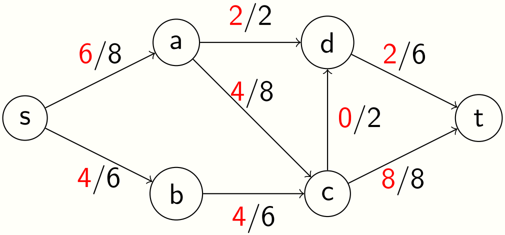


Le residuel G_f

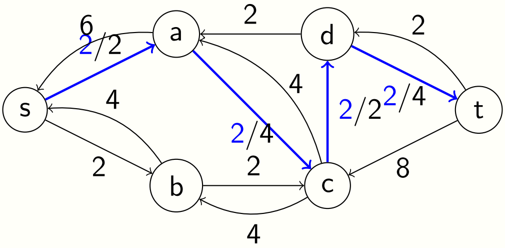


Le theoreme flot maximum / coupe minimum

- $\overline{2} \Rightarrow \overline{1}$. ***

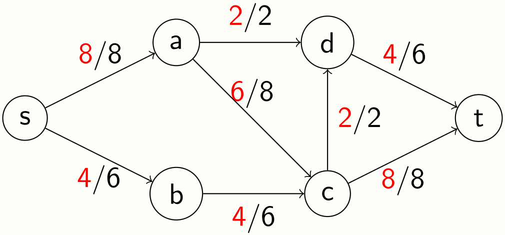


Le residuel G_f

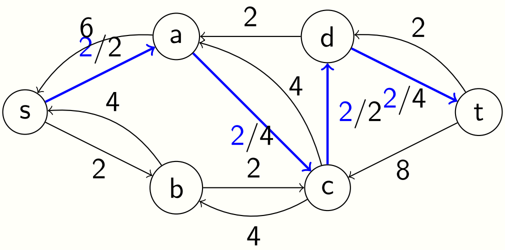


Le theoreme flot maximum / coupe minimum

- $\overline{2} \Rightarrow \overline{1}$. ***

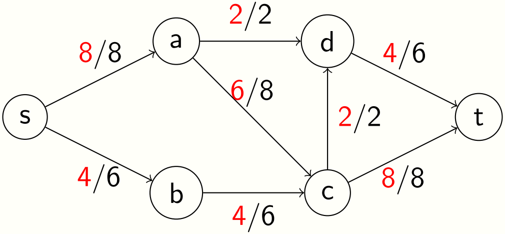


Le residuel G_f

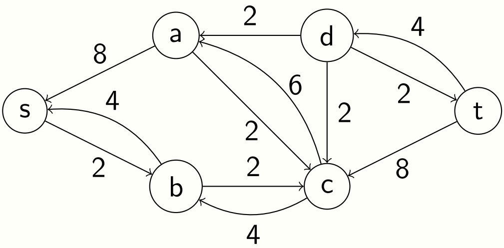


Le theoreme flot maximum / coupe minimum

- **2 ⇒ 3.** ***

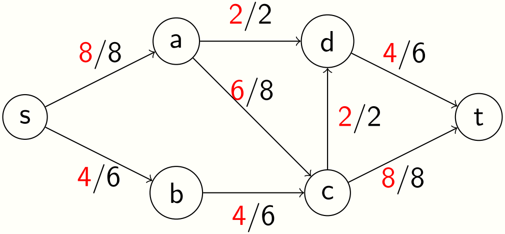


Le residuel G_f

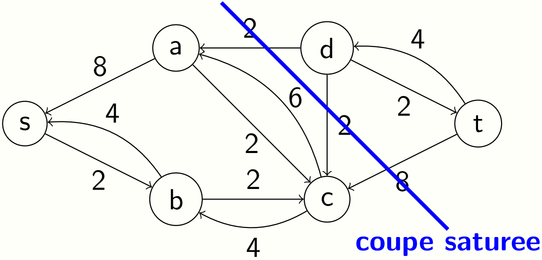


Le theoreme flot maximum / coupe minimum

- **2 ⇒ 3. *****



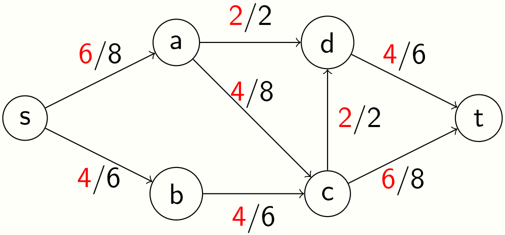
Le residuel G_f



flot max = coupe min

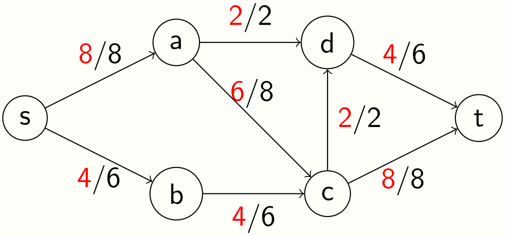
Reecriture du th **(***)** :

- le flot est maximum $\Longleftrightarrow$ $\exists$ une coupe saturee (= de capacite nulle dans le residuel)
- le flot n'est pas maximum $\Longleftrightarrow$ $\exists$ chemin augmentant dans le residuel

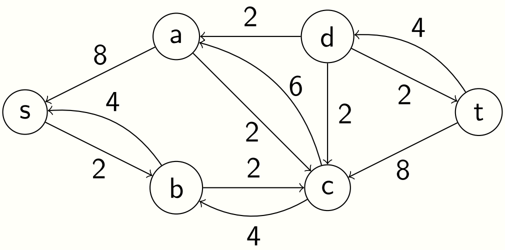


En pratique

- cas du flot maximum

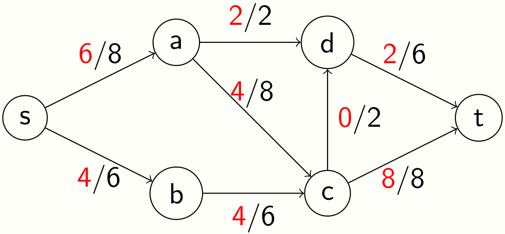


Le residuel G_f

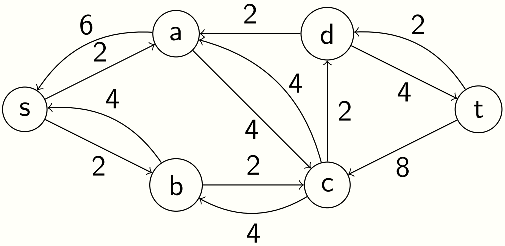


En pratique

- cas du flot NON maximum

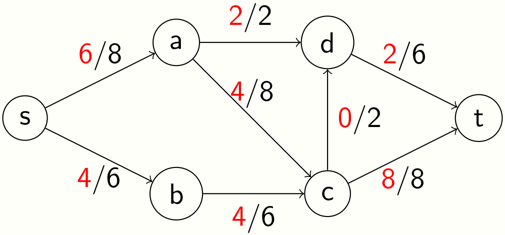


Le residuel G_f

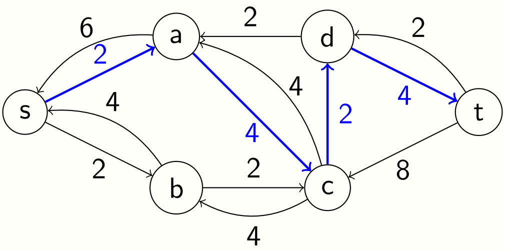


En pratique

- cas du flot NON maximum

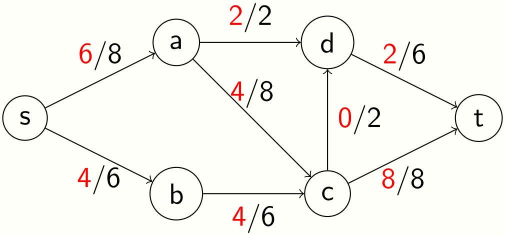


Le residuel G_f

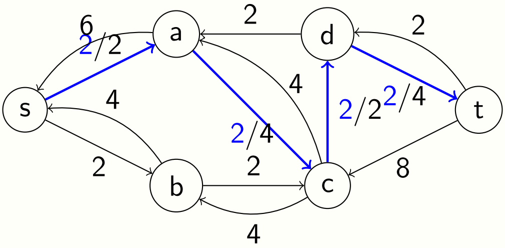


En pratique

- cas du flot NON maximum

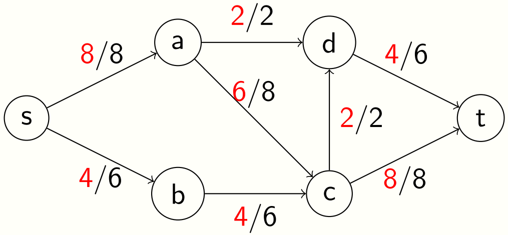


Le residuel G_f

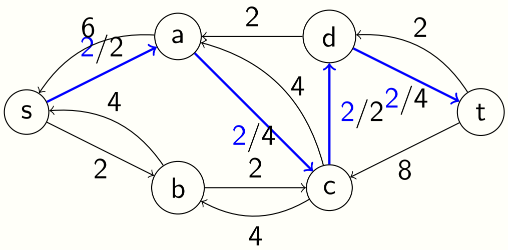


En pratique

- cas du flot NON maximum



Le residuel G_f



Le theoreme flot maximum / coupe minimum

Question : A-t-on demontre le theoreme initial ?

Théorème

Soit G un reseau de flot ayant pour source s et pour puits t. La capacite minimum d'une s, t-coupe de G est egale a la valeur maximum d'un flot entre s et t dans G.

Le theoreme flot maximum / coupe minimum

Question : A-t-on demontre le theoreme initial ?

Théorème

Soit G un reseau de flot ayant pour source s et pour puits t. La capacite minimum d'une s, t-coupe de G est egale a la valeur maximum d'un flot entre s et t dans G.

Remarque

L'enonce du theoreme sous-entend qu'il existe un flot de valeur maximum, la preuve devra l'etablir.

Le theoreme flot maximum / coupe minimum

Question : A-t-on demontre le theoreme initial ?

Théorème

Soit G un reseau de flot ayant pour source s et pour puits t. La capacite minimum d'une s, t-coupe de G est egale a la valeur maximum d'un flot entre s et t dans G.

Remarque

L'enonce du theoreme sous-entend qu'il existe un flot de valeur maximum, la preuve devra l'etablir.

Pas tout a fait ! On a montre que s'il existe un maximum a la valeur des flots, alors c'est la capacite minimum d'une coupe, mais c'est pas sur qu'il existe bien un flot qui sature une coupe... On va en faire une demonstration algorithmique, qui a le merite de construire un flot maximum au passage.

Algorithme de Ford-Fulkerson (ne marche pas toujours)

Algorithme 1 : Ford-Fulkerson(G, s, t).

```
pour chaque arc (u, v) ∈ A faire
    f(u, v) ← 0;
fin
tant que ∃ un chemin P de s a t dans le residuel G_f faire
    c_f(P) ← min{c_f(u, v) | (u, v) ∈ P};
    pour chaque arc (u, v) ∈ P faire
        si (u, v) ∈ A alors f(u, v) ← f(u, v) + c_f(P);
                      sinon f(v, u) ← f(v, u) − c_f(P);
    fin
fin
retourner f;
```

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

- **Capacites entieres**

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

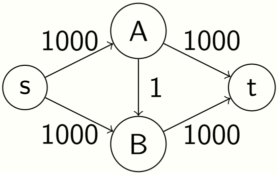
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$

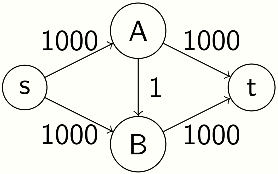
Domaine de validite de Ford-Fulkerson

- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



Domaine de validite de Ford-Fulkerson

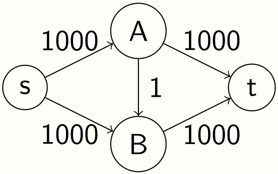
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

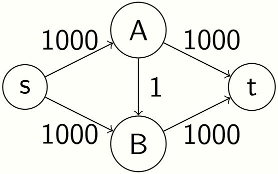
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**
  - Terminaison : se ramener aux capacites entieres en multipliant par le ppcm des denominateurs $c(u, v) \to \tilde{c}(u, v)$

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

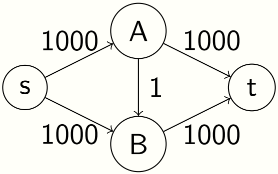
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**
  - Terminaison : se ramener aux capacites entieres en multipliant par le ppcm des denominateurs $c(u, v) \rightarrow \tilde{c}(u, v)$
  - Complexite : $O(|\tilde{f}^*|m)$

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

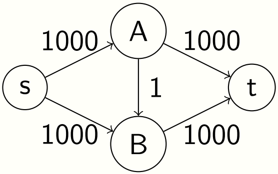
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**
  - Terminaison : se ramener aux capacites entieres en multipliant par le ppcm des denominateurs $c(u,v) \to \tilde{c}(u,v)$
  - Complexite : $O(|\tilde{f}^*|m)$
- **Capacites reelles (notre cadre d'etude initial)**

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

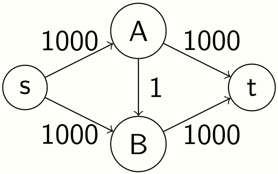
- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**
  - Terminaison : se ramener aux capacites entieres en multipliant par le ppcm des denominateurs $c(u, v) \to \tilde{c}(u, v)$
  - Complexite : $O(|\tilde{f}^*|m)$
- **Capacites reelles (notre cadre d'etude initial)**
  - Terminaison : NON (voir exemple wikipedia avec capacites irrationnelles)

Domaine de validite de Ford-Fulkerson

- **Capacites entieres**
  - Terminaison : OK
  - Complexite : $O(|f^*|m)$, avec $m = |A|$



- **Capacites rationnelles**
  - Terminaison : se ramener aux capacites entieres en multipliant par le ppcm des denominateurs $c(u,v) \rightarrow \tilde{c}(u,v)$
  - Complexite : $O(|\tilde{f}^*|m)$
- **Capacites reelles (notre cadre d'etude initial)**
  - Terminaison : NON (voir exemple wikipedia avec capacites irrationnelles)
  - Convergence : pas vers $|f^*|$... et meme aussi loin "qu'on veut" de $|f^*|$ (exemple wikipedia)

Capacites reelles : Ford-Fulkerson $\rightarrow$ Edmonds-Karp

- Ligne 4 de FF : un chemin $P \rightarrow$ un plus court chemin P (en nombre d'arcs)... c'est tout !

Capacites reelles : Ford-Fulkerson $\rightarrow$ Edmonds-Karp

- Ligne 4 de FF : un chemin $P \rightarrow$ un plus court chemin P (en nombre d'arcs)... c'est tout !
- Terminaison : garantie meme pour capacites irrationnelles

Capacites reelles : Ford-Fulkerson $\rightarrow$ Edmonds-Karp

- Ligne 4 de FF : un chemin $P \rightarrow$ un plus court chemin P (en nombre d'arcs)... c'est tout !
- Terminaison : garantie meme pour capacites irrationnelles
- Complexite : $O(nm^2)$, avec $n = |V|$ et $m = |A|$

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Lemme

Apres chaque augmentation du flot dans l'algo d'EK, pour tout sommet $v \in V$, la distance (en nombre d'arcs) de s a v dans le residuel ne decroit pas.

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Lemme

Apres chaque augmentation du flot dans l'algo d'EK, pour tout sommet $v \in V$, la distance (en nombre d'arcs) de s a v dans le residuel ne decroit pas.

Démonstration.

f et f' le flot avant et apres augmentation.
Par l'absurde : supposons $\exists v \in V, \delta_{G_f}(s, v) > \delta_{G_f'}(s, v)$.
Soit v un tel sommet dont la distance a s dans $G_{f'}$ est minimum.
Soit u le precedent de v sur un plus court chemin de s a v dans $G_{f'}$.

Proposition

$(u, v) \notin E_f$

Par consequent, le flot a ete augmente sur l'arc (v, u). On montre alors que $\delta_{G_f}(s, v) \leq \delta_{G_f'}(s, v) - 2$: contradiction. □

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Définition

Une arete du residuel est *critique* si elle se trouve sur le chemin P choisit par l'algorithme d'EK et que sa capacite dans G_f vaut precisement $c_f(P)$.

Lemme

Une arete ne peut devenir critique qu'au plus $n/2$ fois au cours de l'algorithme d'EK.

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Définition

Une arete du residuel est *critique* si elle se trouve sur le chemin P choisit par l'algorithme d'EK et que sa capacite dans G_f vaut precisement $c_f(P)$.

Lemme

Une arete ne peut devenir critique qu'au plus $n/2$ fois au cours de l'algorithme d'EK.

Démonstration.

Soit f le flot lorsque (u, v) est critique et f' le flot la prochaine fois que (v, u) est sur le chemin choisit par EK.
On peut montrer que $\delta_{G_{f'}}(s, u) \geq \delta_{G_f}(s, u) + 2$. Et comme $\delta(s, u)$ ne peut exceder $n - 2$, (u, v) ne peut devenir critique qu'au plus $n/2$ fois. $\square$

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Corollaire

La complexite de l'algorithme d'EK est $O(nm^2)$.

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Corollaire

La complexite de l'algorithme d'EK est $O(nm^2)$*.*

Démonstration.

D'apres le lemme precedent, le nombre de chemin augmentant dans l'algo d'EK ne peut exceder $mn/2$.
Trouver un plus court chemin augmentant prend un temps $O(n+m)$, par un BFS par exemple.
$\Rightarrow$ Complexite totale de $O(nm^2)$ pour l'algo d'EK. $\square$

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Corollaire

La complexite de l'algorithme d'EK est $O(nm^2)$.

Démonstration.

D'apres le lemme precedent, le nombre de chemin augmentant dans l'algo d'EK ne peut exceder $mn/2$.
Trouver un plus court chemin augmentant prend un temps $O(n+m)$, par un BFS par exemple.
$\Rightarrow$ Complexite totale de $O(nm^2)$ pour l'algo d'EK. $\square$

- **L'algorithme d'EK termine !** (meme avec capacites irrationnelles)

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Corollaire

La complexite de l'algorithme d'EK est $O(nm^2)$.

Démonstration.

D'apres le lemme precedent, le nombre de chemin augmentant dans l'algo d'EK ne peut exceder $mn/2$.
Trouver un plus court chemin augmentant prend un temps $O(n+m)$, par un BFS par exemple.
$\Rightarrow$ Complexite totale de $O(nm^2)$ pour l'algo d'EK. $\square$

- **L'algorithme d'EK termine !** (meme avec capacites irrationnelles)

Et comme il termine sur un flot f dont le reseau residuel n'a pas de chemin augmentant, d'apres le theoreme principal, f est maximum.

Validite et complexite de l'algorithme d'Edmonds-Karp

Corollaire

La complexite de l'algorithme d'EK est $O(nm^2)$.

Démonstration.

D'apres le lemme precedent, le nombre de chemin augmentant dans l'algo d'EK ne peut exceder $mn/2$.
Trouver un plus court chemin augmentant prend un temps $O(n+m)$, par un BFS par exemple.
$\Rightarrow$ Complexite totale de $O(nm^2)$ pour l'algo d'EK. $\square$

- **L'algorithme d'EK termine !** (meme avec capacites irrationnelles)

Et comme il termine sur un flot f dont le reseau residuel n'a pas de chemin augmentant, d'apres le theoreme principal, f est maximum.

- **L'algorithme d'EK est correct !**
  ... et le flot maximum existe toujours ! ;)

Tableau Blanc