M1 Info - Graphes et programmation dynamique

Cours 3 - Plus courts chemins (suite)

Bellman-Ford et Floyd-Warshall

Semestre d'Automne 2022-2023 - Université Côte D'azur

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr

UNIVERSITÉ CÔTE D'AZUR

DIGITAL SYSTEMS FOR HUMANS
GRADUATE SCHOOL AND RESEARCH

Graphes orientes avec poids negatifs

Un petit probleme avec les poids negatifs

- Les plus courts chemins ne sont plus necessairement **simples**

Un petit probleme avec les poids negatifs

- Les plus courts chemins ne sont plus necessairement **simples**

- En fait, il n'existe plus toujours de plus court chemin ! ! !

Un petit probleme avec les poids negatifs

- Les plus courts chemins ne sont plus necessairement **simples**

- En fait, il n'existe plus toujours de plus court chemin ! ! !

$\Longrightarrow$ **il faut interdire les cycles de poids negatifs**

Un petit probleme avec les poids negatifs

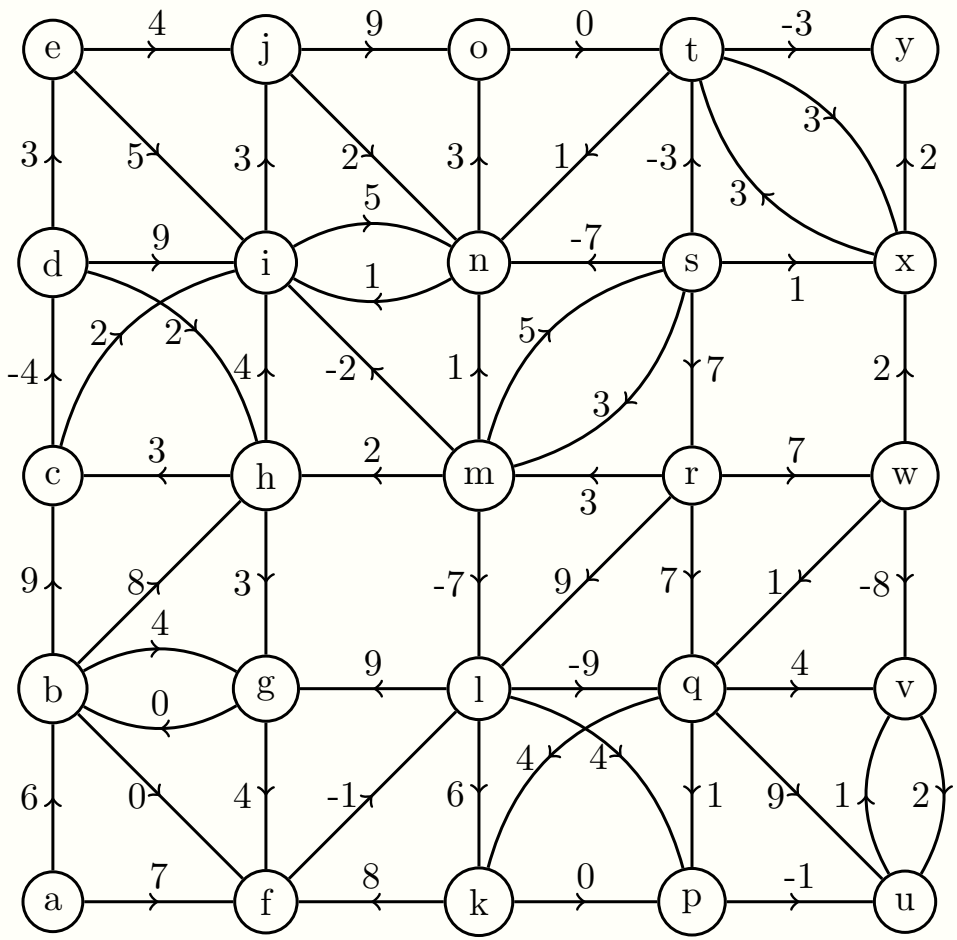
- Les plus courts chemins ne sont plus necessairement **simples**

- En fait, il n'existe plus toujours de plus court chemin ! ! !

$\Longrightarrow$ **il faut interdire les cycles de poids negatifs**

- **Nouveau cadre :** graphes orientes, ponderes sans cycles de poids negatifs

Exemple

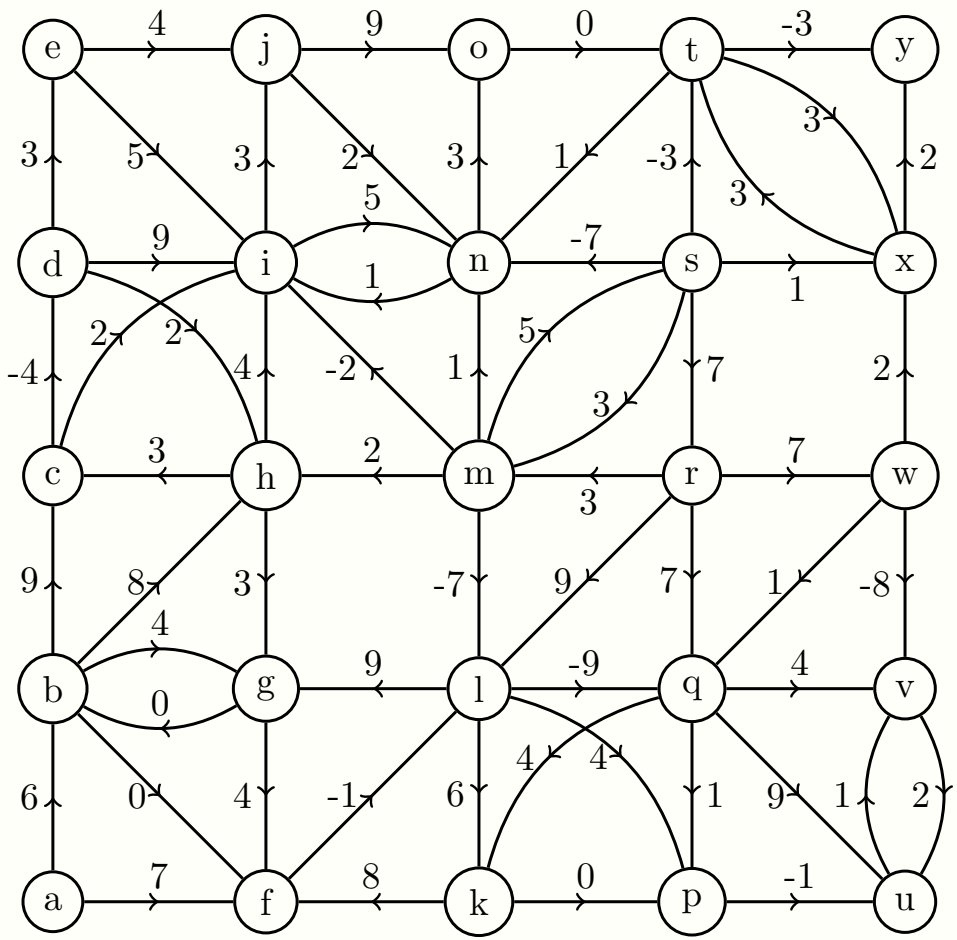


Algorithme : Bellman-Ford

Algorithme 1 : Bellman-Ford(G,s)

```
1  Deux tableaux dist et pere de taille n;
2  pour u de 0 a n − 1 faire
3  |   dist[u] ← +∞ ; pere[u] ← ⊥;
4  fin
5  dist[s] ← 0;
6  pour k = 1 a n − 1 faire
7  |   pour uv ∈ A faire
8  |   |   si dist[v] > dist[u] + w(u, v) alors
9  |   |   |   dist[v] ← dist[u] + w(u, v) ; pere[v] ← u;
10 |   |   fin
11 |   fin
12 fin
13 pour uv ∈ A faire
14 |   si dist[v] > dist[u] + w(u, v)
15 |       alors retourner "cycle de poids negatif";
16 fin
```

Exemple d'execution de Bellman-Ford



Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Bellman-Ford(G,s) est correct.

Lemme 1 : Si G ne contient pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, alors apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, on a $\forall u \in V, dist[u] = dist(s,u)$.

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Bellman-Ford(G,s) est correct.

Lemme 1 : Si G ne contient pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, alors apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, on a $\forall u \in V, dist[u] = dist(s,u)$.

Remarque 1 : Apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, tous les sommets u accessibles depuis s ont une valeur $dist[u]$ finie.

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Bellman-Ford(G,s) est correct.

Lemme 1 : Si G ne contient pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, alors apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, on a $\forall u \in V, dist[u] = dist(s,u)$.

Remarque 1 : Apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, tous les sommets u accessibles depuis s ont une valeur $dist[u]$ finie.

Remarque 2 : Au cours de l'algo, $\forall u \in V$, si $dist[u] < +\infty$, alors $\exists$ un chemin de s a u de longueur $dist[u]$. D'ou $dist[u] \geq dist(s,u)$.

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Bellman-Ford(G,s) est correct.

Lemme 1 : Si G ne contient pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, alors apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, on a $\forall u \in V, dist[u] = dist(s,u)$.

Remarque 1 : Apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, tous les sommets u accessibles depuis s ont une valeur $dist[u]$ finie.

Remarque 2 : Au cours de l'algo, $\forall u \in V$, si $dist[u] < +\infty$, alors $\exists$ un chemin de s a u de longueur $dist[u]$. D'ou $dist[u] \geq dist(s,u)$.

Preuve du Lemme 1.

Soit u accessible depuis s.
Comme il n'y a pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, $\exists$ un plus court chemin $P = su_1u_2 \cdots u_k$ de s a $u = u_k$ et il est simple.

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Bellman-Ford(G,s) est correct.

Lemme 1 : Si G ne contient pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, alors apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, on a $\forall u \in V, dist[u] = dist(s,u)$.

Remarque 1 : Apres les $n-1$ iterations de la boucle ligne 6, tous les sommets u accessibles depuis s ont une valeur $dist[u]$ finie.

Remarque 2 : Au cours de l'algo, $\forall u \in V$, si $dist[u] < +\infty$, alors $\exists$ un chemin de s a u de longueur $dist[u]$. D'ou $dist[u] \geq dist(s,u)$.

Preuve du Lemme 1.

Soit u accessible depuis s.
Comme il n'y a pas de cycle de poids negatif accessible depuis s, $\exists$ un plus court chemin $P = su_1u_2 \cdots u_k$ de s a $u = u_k$ et il est simple.
Il contient au plus $n-1$ aretes et apres l'iteration i, $1 \leq i \leq k$, $dist[u_i] = dist(s,u_i)$.

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

□

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

- $\forall uv \in A$, test ligne 14 faux $\Longrightarrow$ pas de cycle de poids negatif

□

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

- $\forall uv \in A$, test ligne 14 faux $\Longrightarrow$ pas de cycle de poids negatif

Soit C un cycle accessible depuis s.

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

- $\forall uv \in A$, test ligne 14 faux $\Longrightarrow$ pas de cycle de poids negatif

Soit C un cycle accessible depuis s.
Si $\forall (u, v) \in A(C), dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$, alors

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

- $\forall uv \in A$, test ligne 14 faux $\Longrightarrow$ pas de cycle de poids negatif

Soit C un cycle accessible depuis s.
Si $\forall (u, v) \in A(C), dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$, alors
$\sum_{u \in V(C)} d[v] \leq \sum_{u \in V(C)} d[u] + \sum_{uv \in A(C)} w(u, v)$.

Preuve de correction de l'algorithme

Lemme 2 : L'algorithme Bellman-Ford(G,s) retourne "cycle de poids negatif" ssi il existe un cycle de poids negatif dans G qui est accessible depuis s.

Démonstration.

- pas de cycle de poids negatif $\Longrightarrow \forall uv \in A$, test ligne 14 faux

Si G ne contient pas de cycle negatif accessible depuis s, alors d'apres le lemme 1, on a $dist[u] = dist(s, u)$ pour tous les sommets u accessibles.
L'inegalite triangulaire donne alors $dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$.

- $\forall uv \in A$, test ligne 14 faux $\Longrightarrow$ pas de cycle de poids negatif

Soit C un cycle accessible depuis s.
Si $\forall (u, v) \in A(C), dist[v] \leq dist[u] + w(u, v)$, alors
$\sum_{u \in V(C)} d[v] \leq \sum_{u \in V(C)} d[u] + \sum_{uv \in A(C)} w(u, v)$.
D'ou $\sum_{uv \in A(C)} w(u, v) \geq 0$.

□

Analyse de complexite de l'algorithme

- Toutes les instructions s'executent en temps $O(1)$
- Boucle ligne 6 : $n - 1$ fois
- Boucle ligne 7 : m fois
- Boucle ligne 14 : m fois
- Total : $O(nm)$

Graphes orientes ponderes sans cycle de poids negatif

Plus courts chemins entre toutes paires

- **Nouveau probleme :** plus courts chemins entre toutes paires
- **Meme cadre :** graphes orientes ponderes sans cycle de poids negatif

Plus courts chemins entre toutes paires

- **Nouveau probleme :** plus courts chemins entre toutes paires

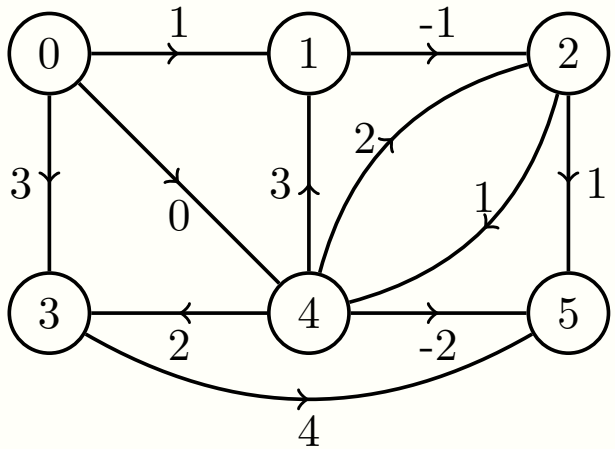
- **Meme cadre :** graphes orientes ponderes sans cycle de poids negatif

- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$ non oriente et non pondere, un sommet $s \in V$
  - G represente par sa matrice d'adjacence ponderee W

Plus courts chemins entre toutes paires

- **Nouveau probleme :** plus courts chemins entre toutes paires
- **Meme cadre :** graphes orientes ponderes sans cycle de poids negatif
- **Entrée :** un graphe $G = (V, E)$ non oriente et non pondere, un sommet $s \in V$
  - G represente par sa matrice d'adjacence ponderee W
- **Sortie :** la distance $dist(s, u)$ pour tous les couples de sommets $u, v \in V$
  - Une matrice de distance D avec d_{uv} la distance de u a v
  - Une matrice de predecesseur Π avec π_{uv} le predecesseur de v sur un plus court chemin de u a v

Exemple



Solution avec plus courts chemins a origine unique

- Graphes non ponderes : BFS depuis chaque sommet
  - temps $O(nm)$

Solution avec plus courts chemins a origine unique

- Graphes non ponderes : BFS depuis chaque sommet
  - temps $O(nm)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

Solution avec plus courts chemins a origine unique

- Graphes non ponderes : BFS depuis chaque sommet
  - temps $O(nm)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)
- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Bellman-Ford depuis chaque sommet
  - temps $O(n^2 m)$

Solution avec plus courts chemins a origine unique

- Graphes non ponderes : BFS depuis chaque sommet
  - temps $O(nm)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)
- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Bellman-Ford depuis chaque sommet
  - temps $O(n^2 m)$

Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif

- Solution basee programmation dynamique : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$

Idee : programmation dynamique

- Pas de cycle negatif $\Longrightarrow$ plus courts chemins simples

Idee : programmation dynamique

- Pas de cycle negatif $\Longrightarrow$ plus courts chemins simples
- Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $d^{[k]}(u, v)$ la longueur du plus court chemin de u a v qui est
  - **simple** et
  - qui n'utilise **que les sommets [0,k] comme intermediaire**

Idee : programmation dynamique

- Pas de cycle negatif $\Longrightarrow$ plus courts chemins simples

- Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $d^{[k]}(u, v)$ la longueur du plus court chemin de u a v qui est
  - **simple** et
  - qui n'utilise **que les sommets [0,k] comme intermediaire**

  Par convention, $d^{[-1]}(u, v) = w(u, v)$ si $uv \in A$ et $d^{[-1]}(u, v) = +\infty$ sinon.

Idee : programmation dynamique

- Pas de cycle negatif $\Longrightarrow$ plus courts chemins simples
- Pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, on note $d^{[k]}(u, v)$ la longueur du plus court chemin de u a v qui est
  - **simple** et
  - qui n'utilise **que les sommets [0,k] comme intermediaire**

  Par convention, $d^{[-1]}(u, v) = w(u, v)$ si $uv \in A$ et $d^{[-1]}(u, v) = +\infty$ sinon.
- On a la formule de recurrence suivante $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$

$$d^{[k]}(u, v) = \min\{d^{[k-1]}(u, v), d^{[k-1]}(u, k) + d^{[k-1]}(k, v)\}$$

Algorithme : Floyd-Warshall

Algorithme 2 : Floyd-Warshall(W)

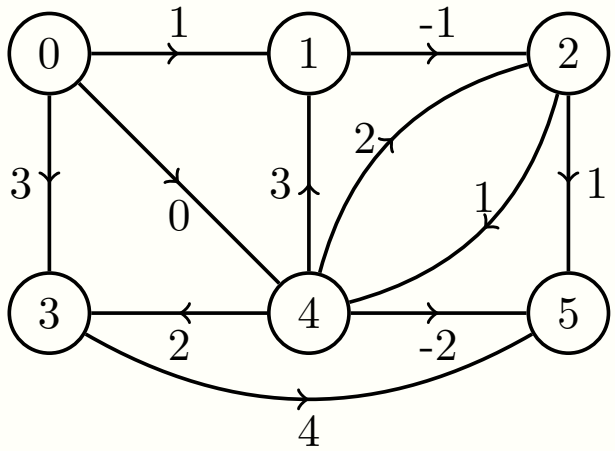
1 **reserver** une matrice $D^{[-1]}$ de taille $n \times n$;
2 **pour** $(u, v) \in V^2$ **faire**
3 | **si** $uv \in A$ **alors** $d^{[-1]}(u, v) = w(u, v)$;
4 | **sinon** $d^{[-1]}(u, v) = +\infty$;
5 **fin**
6 **pour** $k = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
7 | **Reserver** une matrice $D^{[k]}$ de taille $n \times n$
8 | **pour** $u = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
9 | | **pour** $v = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
10 | | | $d^{[k]}(u, v) \leftarrow \min\{d^{[k-1]}(u, v), d^{[k-1]}(u, k)+d^{[k-1]}(k, v)\}$;
11 | | **fin**
12 | **fin**
13 **fin**
14 **retourner** $D^{[n-1]}$;

Algorithme : Floyd-Warshall augmente

Algorithme 3 : Floyd-Warshall(W) augmente

1 **reserver** deux matrices $D^{[-1]}$ et $\Pi^{[-1]}$ de taille $n \times n$;
2 **pour** $(u, v) \in V^2$ **faire**
3 | **si** $uv \in A$ **alors** $d^{[-1]}(u, v) = w(u, v)$; $\pi^{[-1]}(u, v) = u$;
4 | **sinon** $d^{[-1]}(u, v) = +\infty$; $\pi^{[-1]}(u, v) = \perp$;
5 **fin**
6 **pour** $k = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
7 | **Reserver** deux matrice $D^{[k]}$ et $\Pi^{[k]}$ de taille $n \times n$
8 | **pour** $u = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
9 | | **pour** $v = 0$ *a* $n - 1$ **faire**
10 | | | **si** $d^{[k-1]}(u, k) + d^{[k-1]}(k, v) < d^{[k-1]}(u, v)$
11 | | | **alors** $d^{[k]}(u, v) \leftarrow d^{[k-1]}(u, k) + d^{[k-1]}(k, v)$;
12 | | | $\pi^{[k]}(u, v) \leftarrow \pi^{[k-1]}(k, v)$;
13 | | | **sinon** $d^{[k]}(u, v) \leftarrow d^{[k-1]}(u, v)$;
14 | | | $\pi^{[k]}(u, v) \leftarrow \pi^{[k-1]}(u, v)$;
15 | | **fin**
16 | **fin**
17 **fin**
18 **retourner** $(D^{[n-1]}, \Pi^{[n-1]})$;

Exemple d'execution de Floyd-Warshall



Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

- Pas de cycles negatif $\Longrightarrow$ plus court chemins simples

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

- Pas de cycles negatif $\Longrightarrow$ plus court chemins simples
- La formule de recurrence est correcte (deja prouvee)

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

- Pas de cycles negatif $\Longrightarrow$ plus court chemins simples
- La formule de recurrence est correcte (deja prouvee)
- $d^{[n-1]}(u, v)$ est la longueur d'un
  - plus court chemin **simple** de u a v
  - dont les **sommets intermediaires sont parmi** $[\![0, n-1]\!]$

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

- Pas de cycles negatif $\Longrightarrow$ plus court chemins simples
- La formule de recurrence est correcte (deja prouvee)
- $d^{[n-1]}(u, v)$ est la longueur d'un
  - plus court chemin **simple** de u a v
  - dont les **sommets intermediaires sont parmi** $[\![0, n-1]\!]$

$\Longrightarrow d^{[n-1]}$ est exactement la distance de u a v

Preuve de correction de l'algorithme

Theoreme : L'algorithme de Floyd-Warshall(W) est correct.

- Pas de cycles negatif $\Longrightarrow$ plus court chemins simples
- La formule de recurrence est correcte (deja prouvee)
- $d^{[n-1]}(u, v)$ est la longueur d'un
  - plus court chemin **simple** de u a v
  - dont les **sommets intermediaires sont parmi** $[\![0, n-1]\!]$

$\Longrightarrow d^{[n-1]}$ est exactement la distance de u a v

- Idem pour $\pi^{[n-1]}(u, v)$

Analyse de complexite de l'algorithme

- Toutes les instructions s'executent en temps $O(1)$
- Boucle ligne 2 : temps $O(n^2)$
- 3 boucles imbriquees lignes 6, 8 et 9 : temps $O(n^3)$
- Total : $O(n^3)$

A savoir

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

A savoir

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

Un meilleur algo pour poids negatifs

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : algorithme de Johnson
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$

A savoir

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

Un meilleur algo pour poids negatifs

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : algorithme de Johnson
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$
- Repondere pour n'avoir que des poids positifs !

A savoir

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

Un meilleur algo pour poids negatifs

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : algorithme de Johnson
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$
- Repondere pour n'avoir que des poids positifs !
  - Utilise Bellman-Ford (une seule fois) pour calculer une reponderation qui ne perturbe pas les PCC

A savoir

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : Floyd-Warshall
  - temps $O(n^3)$
- Graphes ponderes positivement : Dijkstra depuis chaque sommet
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$ (avec implementation tas de Fibonacci)

Un meilleur algo pour poids negatifs

- Graphes ponderes negativement sans cycle de poids negatif : algorithme de Johnson
  - temps $O(nm + n^2 \log n)$
- Repondere pour n'avoir que des poids positifs !
  - Utilise Bellman-Ford (une seule fois) pour calculer une reponderation qui ne perturbe pas les PCC
  - Applique n fois Dijkstra sur le graphe repondere