TD1 - Arbres

Graphes et programmation dynamique

M1 Informatique - Semestre 1 - Année 2022-2023

Université Côte d'Azur

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr

Le sujet sera traite sur une seance d'1h30. Il est recommande que vous utilisiez les exercices que vous n'avez pas eu le temps de faire en seance comme entrainement en vue de l'examen final. Les exercices les plus importants sont les 1, 4 et 6 : commencez par ceux la.

Definition [Chemin simple et cycle simple]
Un chemin simple (resp. un cycle simple) est un chemin (resp. un cycle) sans repetition de sommet.

Exercice 1. *Dans chaque poisson y a une arete... et combien dans un arbre ?*

Definition [Arbre]
Un arbre est un graphe connexe et sans cycle simple.

a. Dessinez trois exemples d'arbre differents.

b. L'union disjointe de deux arbres est-elle un arbre ?

c. Soit G un graphe sans cycle a $n \geq 1$ sommets et m aretes. Montrez que $m \leq n-1$.

Indication. Prouvez le par induction sur le nombre d'aretes.

d. Soit G un graphe connexe a $n \geq 1$ sommets et m aretes. Montrez que $m \geq n-1$.

Indication. Prouvez le encore par induction sur le nombre d'aretes.

e. Quel est le nombre d'aretes d'un arbre a n sommets ?

Exercice 2. *Dis moi combien d'aretes tu as et je te dirai...*

a. Un graphe a n sommets et $n-1$ aretes est-il toujours un arbre ?
Si oui, demonstration, si non, contre exemple.

b. Montrez que si un graphe possede $n-1$ aretes et qu'il est connexe, alors c'est un arbre.

c. Montrez que si un graphe possede $n-1$ aretes et ne contient aucun cycle, alors c'est un arbre.

Exercice 3. *Extremalite des arbres*

a. Montrez que si un graphe G ne contient pas de cycle et qu'on ne peut pas lui ajouter une arete en preservant cette propriete, alors c'est un arbre.

b. Montrez que si un graphe G est connexe et qu'on ne peut pas lui retirer une arete en preservant cette propriete, alors c'est un arbre.

Exercice 4. *Plus courts chemins dans les arbres*

Soit $T = (V, E)$ un arbre. Le but de cet exercice est de montrer qu'entre toute paire de sommets de T, il existe un unique plus court chemin (et meme un unique chemin simple).

a. Soit $ab \in E$ une arete de T. Montrez que a et b ne sont pas dans la meme composante connexe de $T - ab$.

b. Soit $u, v \in V$ deux sommets de T et soit P un chemin **simple** entre u et v. Montrez que pour toute arete ab de P et pour tout chemin P' entre u et v, ab est une arete de P'.

c. La proposition de la question precedante est-elle toujours vraie si P n'est pas simple ? Prouvez votre reponse.

d. Montrez que quelque soit $u, v \in V(T)$, il existe un unique chemin simple de u a v.

e. Montrez que dans un graphe G, un plus court chemin entre deux noeuds est toujours simple. Deduisez en que dans un arbre, le plus court chemin entre deux noeuds est unique.

Exercice 5. *Reconnaitre un arbre*

a. Donnez un algorithme pour decider si un graphe est connexe. Quelle est sa complexite ?

b. Donnez un algorithme pour decider si un graphe connexe contient un cycle. Quelle est sa complexite ?

c. Donnez un algorithme pour decider si un graphe est un arbre. Quel est sa complexite ?

Exercice 6. *Par la racine.*

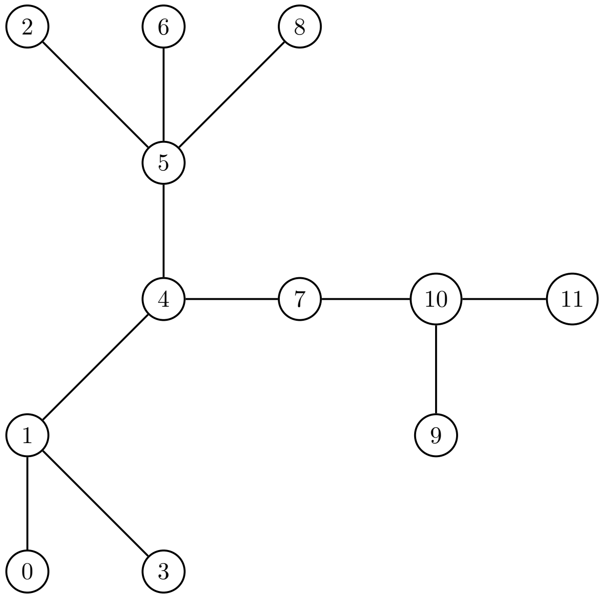

FIGURE 1 – Un arbre a 12 sommets.

Definition [Arbre enracine]
Un **arbre enracine** est un arbre dans lequel on a choisi un noeud **racine** r. Dans un tel arbre, tous les noeuds u distincts de la racine r ont un **pere**, note $p(u)$, qui est le premier noeud intermediaire sur le plus court chemin entre u et la racine. On dit aussi que u est un **fils** de son pere $p(u)$.

a. Comment representer un arbre a n sommets par un tableau de n entiers ?

b. Dessinez ce tableau pour l'arbre de la figure 1 en choisissant le sommet 7 comme racine, puis en choisissant le sommet 2 comme racine.

c. Dans la representation d'un arbre enracine par un tableau, comment decider si deux sommets a et b donnes sont adjacents ? Quelle est la complexite de cette operation ?

d. Toujours dans cette meme representation, comment lister tous les fils d'un sommet a donne ? Quelle est la complexite de cette operation ?

Exercice 7. *Listes d'adjacence*

a. Donnez la representation par listes d'adjacence de l'arbre de la figure 1.

b. Quelle est la taille de la representation par listes d'adjacence d'un arbre a n sommets ?

c. Quel est le degre moyen d'un arbre a n sommets lorsque n tend vers $+\infty$?

d. Quelle est la densite d'un arbre a n sommets lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice 8. *Et le vent du nord les emporte.*

Definition [Feuille]
Une **feuille** dans un arbre enracine est un noeud qui n'a aucun fils. Une **feuille** dans un arbre non-enracine est un noeud qui a exactement un voisin. Dans les deux sortes d'arbres, un noeud interne est un noeud qui n'est pas une feuille.

a. Quel est le nombre minimum de feuilles dans un arbre enracine a n sommets ? Et le nombre maximum ?

b. Memes questions pour un arbre non-enracine ?

On considere maintenant un arbre enracine T ayant f feuilles et dont tout noeud interne a au moins deux fils.

c. Quel est le nombre maximum possible de noeuds dans T ? Demontrez votre reponse.

Indication. Vous pourrez determiner l'expression exacte de ce nombre sur un cas particulier.

Indication. Pour prouver cette expression dans le cas general, vous pourrez proceder par induction sur la hauteur de l'arbre.