TD3 - Flot maximum / coupe minimum

Graphes et programmation dynamique

M1 Informatique - Semestre 1 - Année 2022-2023

Université Côte d'Azur

Christophe Crespelle
`christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr`

Le sujet sera traite sur deux seances d'1h30. Il est recommande que vous utilisiez les exercices que vous n'avez pas eu le temps de faire en seance comme entrainement en vue de l'examen final (ce qui ne veut pas dire que tous les exercices soient du niveau de ceux poses a l'examen, en particulier, les exercices nommes "pour aller plus loin" sont de difficulte superieure). Les exercices les plus importants sont les 1, 2, 6 et 5 : commencez par ceux la.

Exercice 1. *Max ou pas max ?*

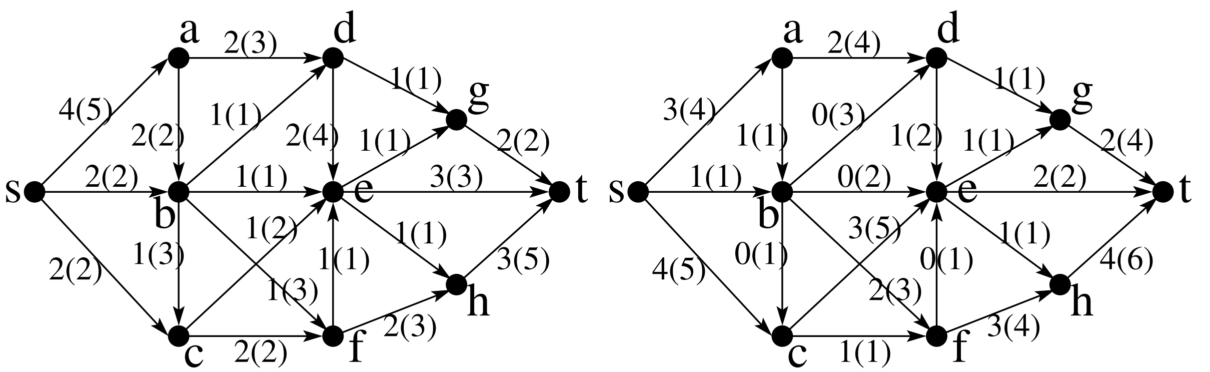


Figure 1 – Deux reseaux de flot, avec source s et puits t, chacun donne avec un flot. Les arcs sont etiquetes par deux nombres $a(b)$: celui entre parentheses, b, est la capacite de l'arc et celui qui precede les parentheses, a, est la valeur du flot a travers cet arc. Exemple : l'etiquette 2(3) signifie que la capacite de l'arc est 3 et que la valeur du flot sur cet arc est de 2.

a. Le flot donne sur la Figure 1 - gauche est-il maximum ? Comment le prouver ?

b. Le flot donne sur la Figure 1 - droite est-il maximum ? Comment le prouver ?

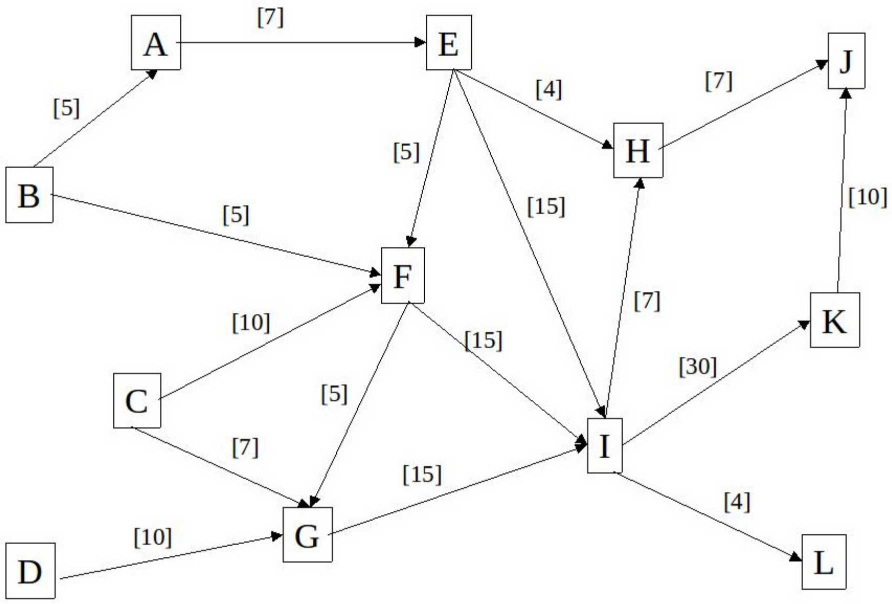


FIGURE 2 – Un reseau d'alimentation en eau.

Trois villes J, K, L sont alimentées en eau grâce à quatre réserves A, B, C, D (nappes souterraines, châteaux d'eau, usines de traitement). Les réserves journalières disponibles sont de 15 milliers de m^3 pour A, 10 pour B, de 15 pour C et de 15 pour D. Le réseau de distribution, comprenant aussi bien des aqueducs romains que des canalisations récentes, peut être schématisé par le graphe de la figure 2 (les débits maximaux sont indiqués sur chaque arc en milliers de m^3/jour).
Ces trois villes en pleine évolution désirent améliorer leur réseau d'alimentation afin de satisfaire des besoins futurs plus importants. Une étude a été faite et a permis de déterminer les demandes journalières maximales probables, à savoir pour la ville J : 15 milliers de m^3, pour la ville K : 20 et 15 pour la ville L.

a. Déterminer la valeur du flot maximal pouvant passer dans le réseau actuel et donner la coupe minimale correspondante.

b. La valeur de ce flot est jugée nettement insuffisante, aussi le conseil intercommunal décide-t-il de refaire les canalisations (A,E) et (I,L). Déterminer les capacités à prévoir pour ces deux canalisations et la valeur du nouveau flot optimal.

c. Devant l'importance des travaux, le conseil intercommunal décide de ne pas refaire les deux canalisations en même temps. Dans quel ordre doit-on entreprendre leur réfection de façon à augmenter, après chaque tranche de travaux, la valeur du flot optimal passant dans le réseaux ?

d. Quelles sont, après chaque tranche de travaux, les valeurs des flots optimaux ?

e. Le conseil intercommunal decide finalement d'augmenter les capacites de AE et IL de respectivement 13 et 11. Il souhaite maintenant modifier encore la capacite d'une seule arete pour permettre de satisfaire pleinement la demande des trois villes. Quelles sont toutes les aretes qui permettraient de realiser cet objectif ? De combien faut-il augmenter la capacite de l'arete choisie ?

Exercice 3. *Pour mieux comprendre.*

a. Donnez un exemple de reseau et un flot ayant au moins une coupe saturee et au moins une coupe non saturee.

b. Donnez un exemple de reseau et un flot dans lequel toutes les coupes sont saturees.

c. Peut-on toujours augmenter la valeur du flot maximum en augmentant la capacite d'une seule arete ?

d. Peut-on toujours reduire la valeur du flot maximum en reduisant la capacite d'une seule arete ?

Exercice 4. *Coupes minimum*

a. Donnez un exemple de reseau G dans lequel la coupe minimum est aussi petite qu'on veut devant le degre minimum de G.

Indication. Remarquez que dans cette question on parle de coupe quelconque, pas de s, t-coupe.

b. Donnez un exemple de graphe G et de couple (s, t) pour lequel la s, t-coupe minimum est aussi grande qu'on veut devant la coupe minimum de G.

Exercice 5. *Pour que le courant passe, encore faut-il être au courant*

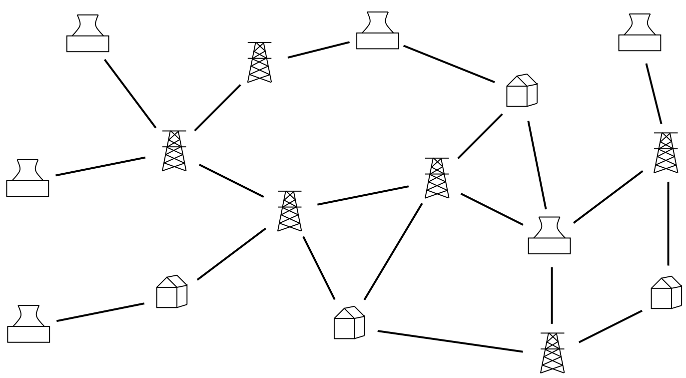


Figure 3 – Un reseau electrique. Les usines electriques sont representees par des pylones haute tension, les sites industriels sont representes par des cheminees et les autres points d'interconnexion du reseau par des batiments.

Un réseau électrique relie un certain nombre d'usines de production électrique (representees par des pylones haute tension sur la Figure 3) à un certain nombre de sites industriels à alimenter (representes par des cheminees sur la Figure 3). Le tout est modélisé par un graphe non orienté où usines et sites sont positionnés sur différents sommets, les autres sommets représentant des points d'interconnexion du réseau (representees par des batiments sur la Figure 3). L'électricité peut transiter par tous les sommets et chaque usine a le pouvoir d'alimenter tous les sites. Donner un algorithme qui calcule le nombre minimum de liens (donc ici d'arêtes) tel que, s'ils sont rompus, plus aucun site n'est alimenté. Analysez la complexité de votre algorithme.

Indication. Modeliser le probleme comme un probleme de coupe minimum dans un graphe bien choisi que vous formerez, puis utilisez les algorithmes de flot vu en cours pour resoudre ce probleme.

Exercice 6. *Gestion de crise*

A la suite d'une catastrophe naturelle, les secours ont identifié en différents lieux n individus blessés qui doivent rapidement être évacués vers les hôpitaux de la région. Il y a p hôpitaux en tout, et pour chaque blesse, en fonction de son état et de sa localisation, les options d'évacuations sont réduites à un sous-ensemble fixé d'hôpitaux.

Vous devez organiser l'évacuation en affectant chaque blesse à un hôpital parmi ses options, sans surcharger les services de soins : chaque hôpital h, $1 \leq h \leq p$, peut admettre au plus n_h individus.

Connaissant pour chaque individu la liste des hôpitaux où l'évacuation est possible, donnez un algorithme efficace pour déterminer si tout le monde va pouvoir être évacué dans les conditions souhaitées. Analysez sa complexité.

Indication. Modeliser le probleme comme un probleme de flot dans un graphe bien choisi, puis utilisez l'algorithme de flot vu en cours.

Indication. Utilisez une formulation du probleme du flot un peu differente, qui requiert que les valeurs du flot sur chaque arc soit des entiers. Montrez que l'algorithme d'Edmonds-Karp permet de resoudre cette variante du probleme de flot dans le cas ou les capacites sont entieres.

Exercice 7. *Sauve qui peut !... mais sans pousser.*

Soit G une grille de $n \times n$ points et P un sous-ensemble de p points parmi les n^2. Le problème de l'évacuation consiste à déterminer s'il est possible de relier chacun des p points au bord de la grille par des chemins sans sommets communs.

a. On considère l'extension du problème du flot maximum où à la fois les arcs et les sommets ont une capacité maximum (le flot total transitant par un sommet doit être inférieur à sa capacité). Comment se ramener à un problème où seuls les arcs ont des capacités ?

b. Comment résoudre le problème initial ?

Exercice 8. *Couplage maximum dans les graphes bipartis*

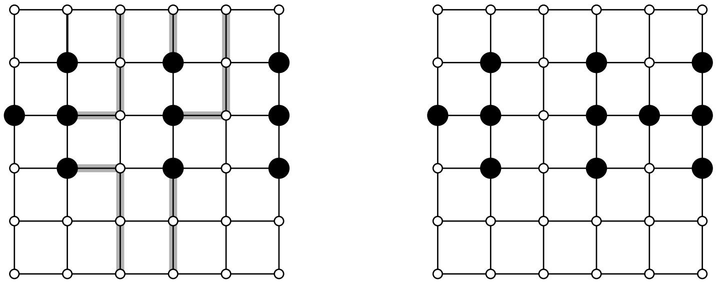


FIGURE 4 – Une grille.

Un couplage d'un graphe G est un ensemble M d'aretes de G tel que tout sommet de G est incident a au plus une arete de M. Un couplage maximum est un couplage dont le nombre d'aretes $|M|$ est maximum parmi tous les couplages de G.
Un graphe biparti est un graphe dont l'ensemble des sommets est partitionne en deux parties (L, R) et qui ne contient aucune arete entre deux sommets de L, ni aucune arete entre deux sommets de R. Autrement dit, toutes les aretes du graphe biparti ont une extremite dans L et une dans R.

a. Expliquer comment modéliser le problème du calcul d'un couplage de cardinal maximum dans un biparti sous forme d'un problème de flot maximum.

Indication. Comme a l'exercice 6, vous pourrez utiliser un probleme de flot entier plutot qu'un flot classique, c'est a dire que les capacites sont des entiers et que l'on requiert que la valeur du flot sur chaque arc soit aussi un entier.

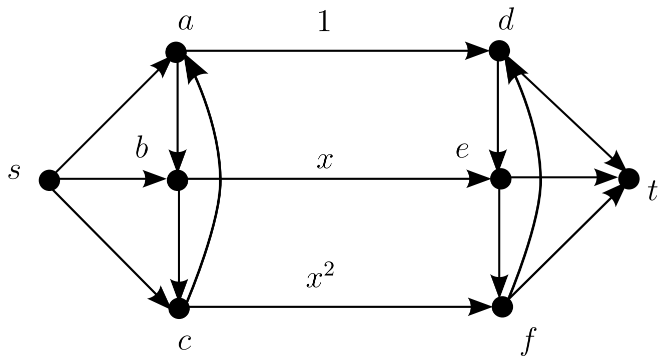
b. En déduire un algorithme polynomial pour calculer un couplage max dans un biparti. Précisez sa complexité.

Indication. Comme a l'exercice 6, montrez que les algorithmes d'Edmonds-Karp et de Ford-Fulkerson vus en cours permettent aussi de resoudre le probleme du flot entier maximum.

Exercice 9. *Pour aller plus loin : non-terminaison de la méthode de Ford-Fulkerson dans* $\mathbb{R}$

Pour un réseau de flot à capacités dans $\mathbb{Q}_+$, la méthode de Ford-Fulkerson pour trouver un flot maximum termine en temps fini. On va montrer que ce n'est pas toujours le cas si les capacités sont dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, solution de l'équation $x^2 + x - 1 = 0$, et le réseau suivant (les arcs où rien n'est indiqué ont pour capacité $+\infty$) :



a. Exhibez une suite infinie de chemins améliorants de s à t pour l'exemple ci-dessus.

b. En général, si la méthode de Ford-Fulkerson ne termine pas, le flot trouvé tend-il quand même vers un flot maximum ?