

M1 Info - Systemes Complexes Avances

# Cours 2 - Proprietes et modeles

Densite globale, distances, Erdős-Rényi

Semestre Automne 2022-2023 - Université Côte D'azur

Christophe Crespelle

[christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr](mailto:christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr)



# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - ▶ Il faut connaitre ces proprietes

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - ▶ Il faut connaitre ces proprietes
  - ▶ Et savoir reconnaitre les (plutot rares) cas ou on s'en eloigne



# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

1. Densité

- ▶ Quantités d'arêtes

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

## Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

### 1. Densité

- ▶ Quantités d'arêtes

### 2. Distances

- ▶ Longueur des chemins dans le réseau

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

## Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

1. Densité
  - ▶ Quantités d'arêtes
2. Distances
  - ▶ Longueur des chemins dans le réseau
3. Distribution des degrés
  - ▶ Nombre de voisins de chaque sommet

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

## Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

1. Densité
  - ▶ Quantités d'arêtes
2. Distances
  - ▶ Longueur des chemins dans le réseau
3. Distribution des degrés
  - ▶ Nombre de voisins de chaque sommet
4. Densité locale
  - ▶ Propension des arêtes à se regrouper dans les voisinages des sommets
  - ▶ Les amis de mes amis sont-ils mes amis?  $\implies$  transitivité

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$



# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets
- $E$  ensemble des aretes (ou  $E(G)$ ),  $m = |E|$  nb d'aretes

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets
- $E$  ensemble des aretes (ou  $E(G)$ ),  $m = |E|$  nb d'aretes

## Question ???

*Combien d'aretes au maximum dans un graphe ?*

# I. Densité

## **Definition (Densité)**

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

# I. Densité

## **Definition (Densité)**

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

- ▶ Proportion d'arêtes par rapport au nb d'arêtes possibles.

# I. Densité

## Definition (Densité)

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

- ▶ Proportion d'arêtes par rapport au nb d'arêtes possibles.

## Exemples :

## I. Mesure alternative : degre moyen

### **Definition (Voisinage)**

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

## I. Mesure alternative : degre moyen

### Definition (Voisinage)

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

### Definition (Degre)

Le **degre** d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$ , note  $d^\circ(u)$  est le nombre de voisins de  $u$  dans  $G$ .

Le **degre moyen** d'un reseau  $G$ , note  $\bar{d}$ , est la moyenne des degres de ses noeuds :  $\bar{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$ .



## I. Mesure alternative : degre moyen

### Definition (Voisinage)

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

### Definition (Degre)

Le **degre** d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$ , note  $d^\circ(u)$  est le nombre de voisins de  $u$  dans  $G$ .

Le **degre moyen** d'un reseau  $G$ , note  $\bar{d}$ , est la moyenne des degres de ses noeuds :  $\bar{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$ .

### Exemples :

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

Question ???

*Que vaut  $\sum_{u \in V} d^{\circ}(u)$  dans un graphe ?*

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

Question ???

*Que vaut  $\sum_{u \in V} d^{\circ}(u)$  dans un graphe ?*

Question ???

*Comment s'écrit la densité en fonction du degré moyen (et vice-versa) ?*

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

Reseaux		
Context	Network	n
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

Reseaux		
Context	Network	n
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Densite

- ▶ Forte ou faible ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

Reseaux		
Context	Network	n
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Densite

- ▶ Forte ou faible ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

- Degre moyen

- ▶ Ordre de grandeur ?

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

Context	Reseaux		Densite		
	Network	n	m	$\rho$	$d^\circ$
SPECIES	foodweb	183	2434	$1 \cdot 10^{-1}$	26.6
CO-OCCUR	bible-names	1707	9059	$6 \cdot 10^{-3}$	10.6
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3 \cdot 10^{-3}$	5.8
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2 \cdot 10^{-3}$	6.5
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8 \cdot 10^{-3}$	48.8
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3 \cdot 10^{-3}$	16.4
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3 \cdot 10^{-3}$	16.7
INTERNET	as2000	6474	12572	$6 \cdot 10^{-4}$	3.9
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7 \cdot 10^{-4}$	5.7
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2 \cdot 10^{-3}$	21
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1 \cdot 10^{-3}$	22
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4 \cdot 10^{-4}$	8.6
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1 \cdot 10^{-3}$	25.7
CITATION-SCI.	cora	23166	89157	$3 \cdot 10^{-4}$	7.7
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2 \cdot 10^{-4}$	4.0
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400	352021	$9 \cdot 10^{-4}$	25.7
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4 \cdot 10^{-4}$	13.8
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401	420784	$7 \cdot 10^{-4}$	24.5
INTERNET	topology	34761	107720	$2 \cdot 10^{-4}$	6.2
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8 \cdot 10^{-5}$	4.7
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6 \cdot 10^{-5}$	9.0
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8 \cdot 10^{-5}$	19.3
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2 \cdot 10^{-5}$	6.6
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2 \cdot 10^{-5}$	5.5
CITATION-SCI.	citeseer	365154	1721981	$3 \cdot 10^{-5}$	9.4
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2 \cdot 10^{-4}$	80.2
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5 \cdot 10^{-5}$	37.6
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5 \cdot 10^{-6}$	5.3
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2 \cdot 10^{-5}$	21.4
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2 \cdot 10^{-6}$	2.8
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8 \cdot 10^{-6}$	13.1
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2 \cdot 10^{-6}$	3.9
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2 \cdot 10^{-5}$	76.3
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2 \cdot 10^{-6}$	8.8
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4 \cdot 10^{-6}$	17.4



## II. Distances

### **Definition (Chemin)**

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

## II. Distances

### Definition (Chemin)

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

### Definition (Distance entre deux sommets)

La distance  $dist(a, b)$  entre deux sommets  $a$  et  $b$  est la longueur d'un plus court chemin entre  $a$  et  $b$ .

## II. Distances

### Definition (Chemin)

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

### Definition (Distance entre deux sommets)

La distance  $dist(a, b)$  entre deux sommets  $a$  et  $b$  est la longueur d'un plus court chemin entre  $a$  et  $b$ .

### Definition (Diamètre et distance moyenne)

Le diamètre d'un graphe  $G$  est la plus grande distance entre deux de ses sommets :  $\max\{dist(a, b) \mid a, b \in V(G)\}$ .

La distance moyenne dans un graphe  $G$  est la moyenne des distances entre toutes ses paires de sommets :  $\frac{\sum_{\{a,b\} \subset V(G)} dist(a,b)}{n(n-1)/2}$

## II. Distances

Exemples :

## II. Distances dans les reseaux reels ???

Reseaux		
Context	Network	n
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Distance moyenne

- ▶ Grande ou petite ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

## II. Distances dans les reseaux reels ???

Reseaux		
Context	Network	n
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Distance moyenne

- ▶ Grande ou petite ?

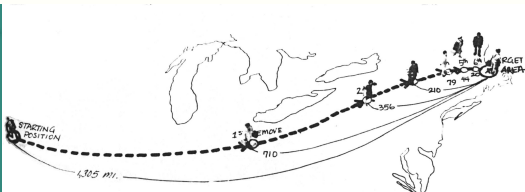
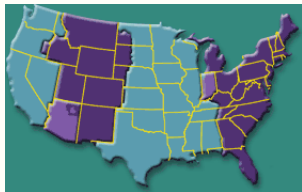
- ▶ Ordre de grandeur ?

- Diametre

- ▶ Grand ou petit ?

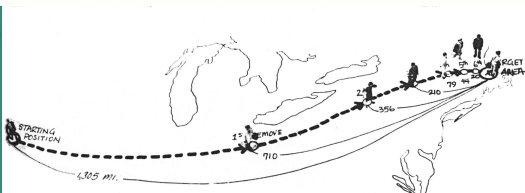
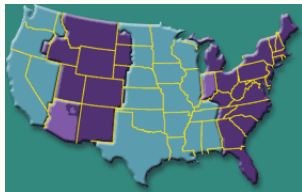
- ▶ Comparaison a la distance moyenne ?

## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)

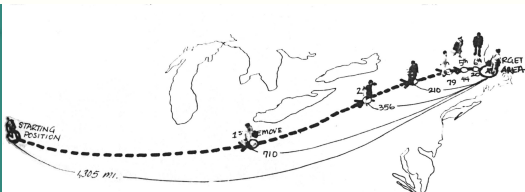
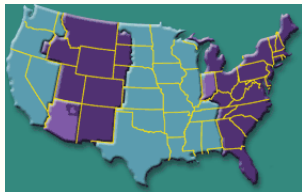
## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska

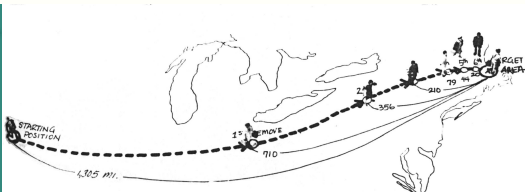
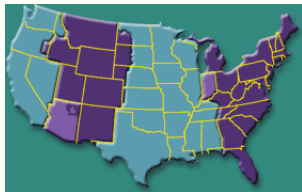


## II. Experience de Milgram



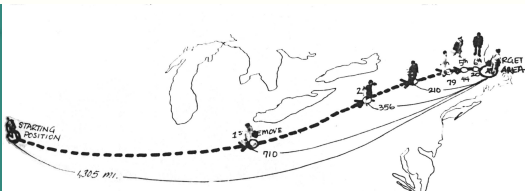
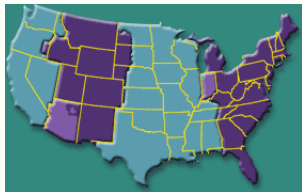
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse

## II. Experience de Milgram



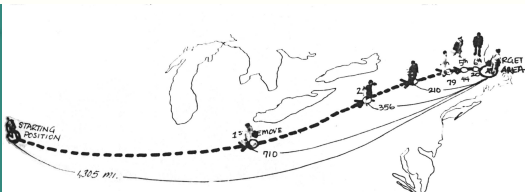
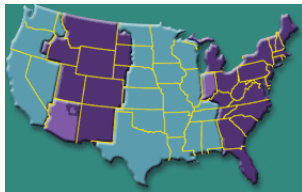
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :

## II. Experience de Milgram



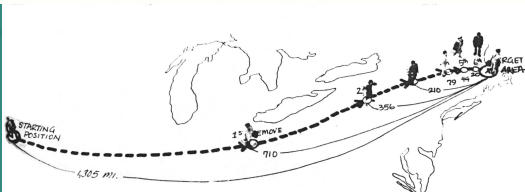
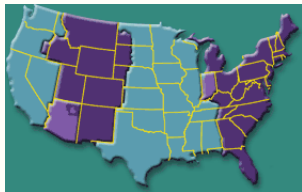
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste

## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste
  - ▶ seulement à quelqu'un qu'ils connaissent personnellement

## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste
  - ▶ seulement à quelqu'un qu'ils connaissent personnellement
  - ▶ avec ces instructions incluses dans la lettre

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas!!!

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

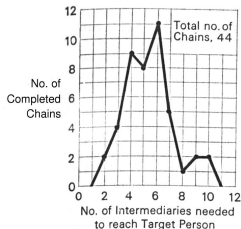
- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160



## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - ▶ Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - ▶ Median a 5

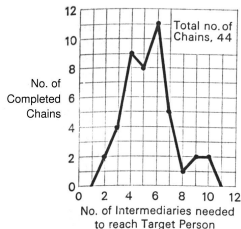


**In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.**

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - ▶ Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - ▶ Median a 5



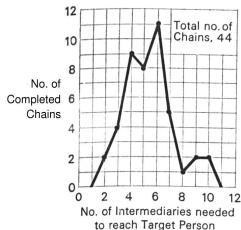
In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

- $\implies$  6 degrees de separation

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas

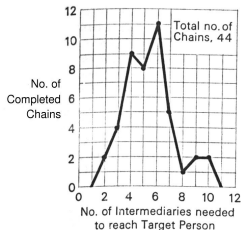


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande

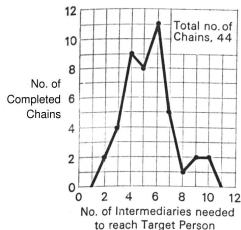


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire

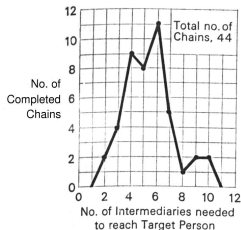


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire
- Departs tous dans le meme etat

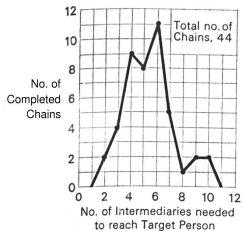


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Distances dans les reseaux reels ???

Reseaux				Densite		Distances
Context	Network	n	m	$\rho$	$d^\circ$	dist. moy.
SPECIES	foodweb	183	2434	$1 \cdot 10^{-1}$	26.6	2.1
CO-OCCUR	bible-names	1707	9059	$6 \cdot 10^{-3}$	10.6	3.4
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3 \cdot 10^{-3}$	5.8	3.8
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2 \cdot 10^{-3}$	6.5	6.0
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8 \cdot 10^{-3}$	48.8	4.2
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3 \cdot 10^{-3}$	16.4	2.1
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3 \cdot 10^{-3}$	16.7	2.1
INTERNET	as2000	6474	12572	$6 \cdot 10^{-4}$	3.9	3.7
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7 \cdot 10^{-4}$	5.7	6.0
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2 \cdot 10^{-3}$	21	4.7
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1 \cdot 10^{-3}$	22	4.2
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4 \cdot 10^{-4}$	8.6	5.3
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1 \cdot 10^{-3}$	25.7	3.5
CITATION-SCL.	cora	23166	89157	$3 \cdot 10^{-4}$	7.7	5.9
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2 \cdot 10^{-4}$	4.0	3.9
CITATION-SCL.	cit-HepTh	27400	352021	$9 \cdot 10^{-4}$	25.7	4.3
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4 \cdot 10^{-4}$	13.8	3.2
CITATION-SCL.	cit-HepPh	34401	420784	$7 \cdot 10^{-4}$	24.5	4.3
INTERNET	topology	34761	107720	$2 \cdot 10^{-4}$	6.2	3.8
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8 \cdot 10^{-5}$	4.7	5.9
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6 \cdot 10^{-5}$	9.0	5.5
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8 \cdot 10^{-5}$	19.3	9.3
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2 \cdot 10^{-5}$	6.6	6.8
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2 \cdot 10^{-5}$	5.5	11.9
CITATION-SCL.	citeseer	365154	1721981	$3 \cdot 10^{-5}$	9.4	6.5
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2 \cdot 10^{-4}$	80.2	3.7
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5 \cdot 10^{-5}$	37.6	4.6
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5 \cdot 10^{-6}$	5.3	5.3
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2 \cdot 10^{-5}$	21.4	8.8
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2 \cdot 10^{-6}$	2.8	415.7
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8 \cdot 10^{-6}$	13.1	5.1
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2 \cdot 10^{-6}$	3.9	3.9
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2 \cdot 10^{-5}$	76.3	4.2
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2 \cdot 10^{-6}$	8.8	8.2
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4 \cdot 10^{-6}$	17.4	5.6

## II. Retour sur Milgram

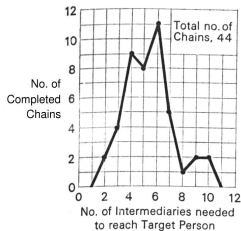


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## Autres enseignements de Milgram



## II. Retour sur Milgram

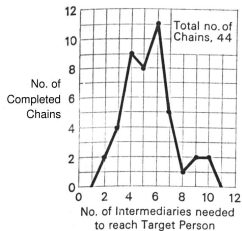


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

### Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent !!!
  - ▶ Malgré le manque d'information.

## II. Retour sur Milgram



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

### Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent !!!
  - ▶ Malgré le manque d'information.
- Les chemins sont trouvables
  - ▶ Graphes navigables [Kleinberg 2000 et suites]

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

## Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !

## Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

## Recapitulatif (jusqu'a present)

### Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !
- Mais tres bien compris du point de vue mathematique

⇒ c'est une propriete de l'aleatoire

### Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
  
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$
  
- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile !)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$
- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile !)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
  - ▶ Verifier a posteriori que sa distance moyenne est faible.



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

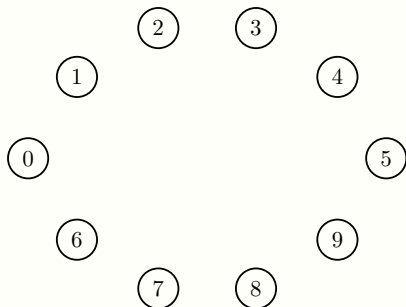
- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$

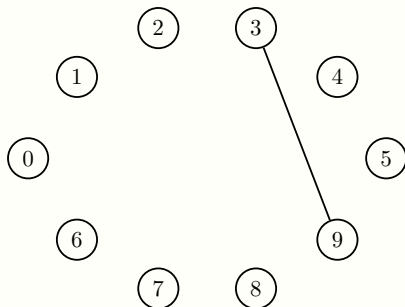
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10, m = 10$



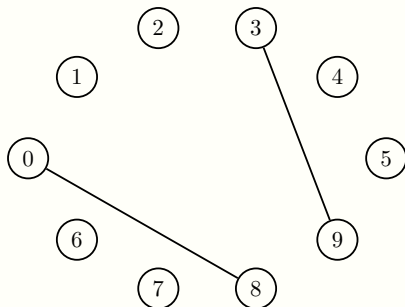
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



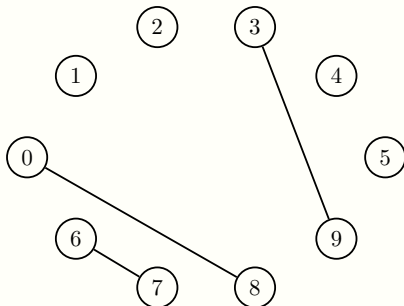
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

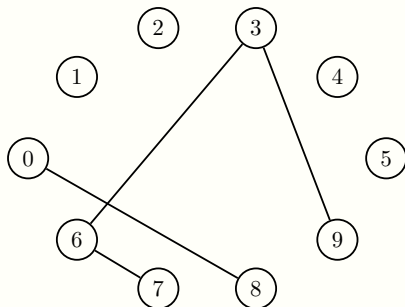
- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$





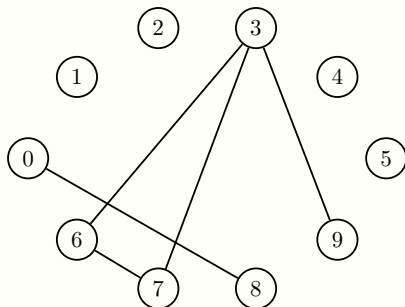
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10, m = 10$



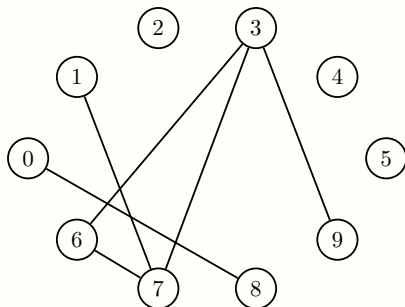
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



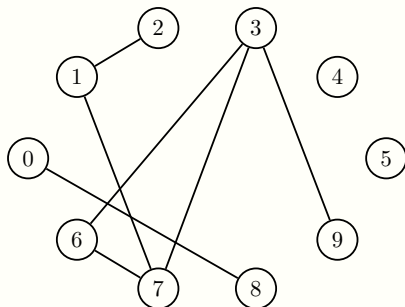
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



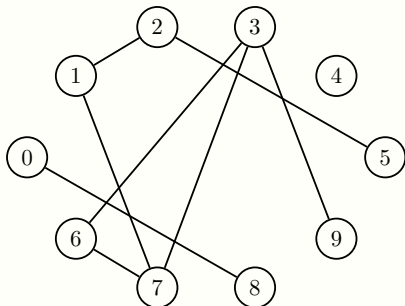
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10, m = 10$



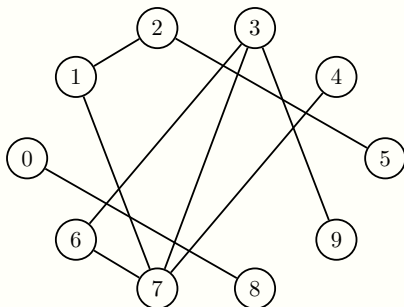
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



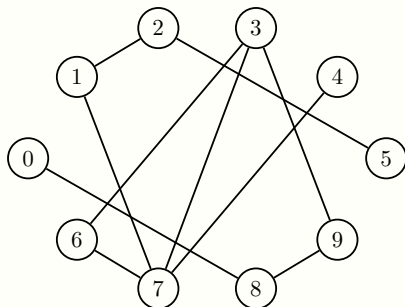
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,m}$  ?*



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,m}$  ?*

## Question ???

*Pour un couple  $u, v \in V$ , quelle est la proba que  $uv$  soit une arete dans  $G_{n,m}$  ?*

## Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

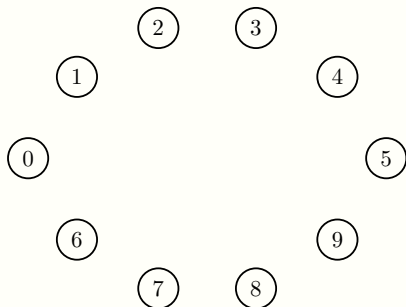
- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

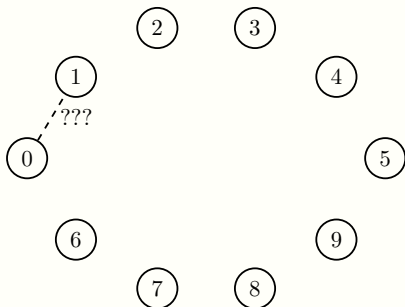
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



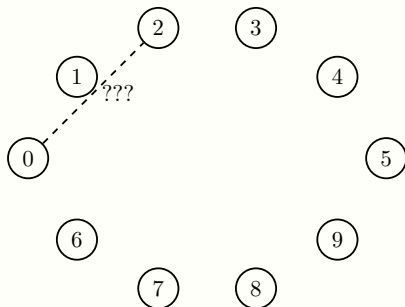
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



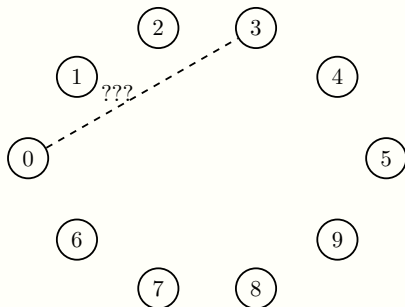
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

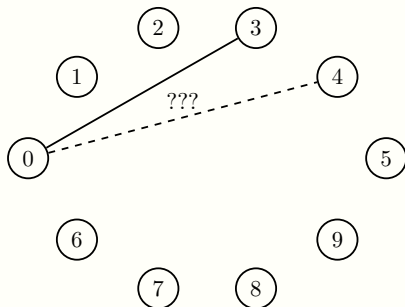
- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$





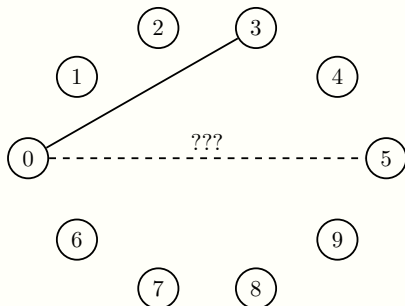
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



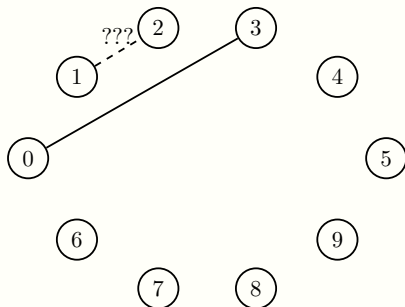
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



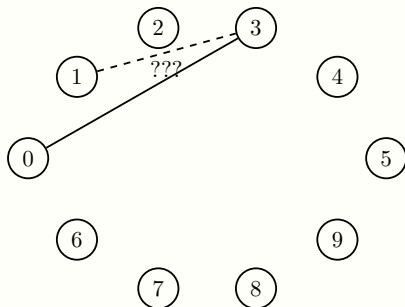
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



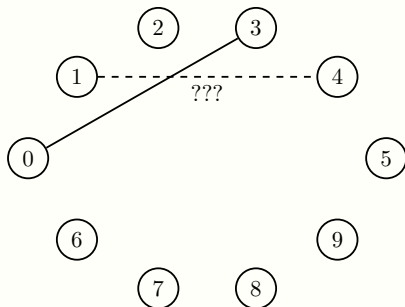
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



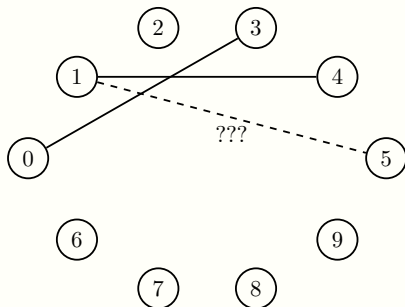
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,p}$  ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,p}$  ?*

## Question ???

*Quel est l'esperance du nombre d'aretes dans le modele  $G_{n,p}$  ?*



## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modèles sont "équivalents"

Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes
  - ▶ Mais elles ne sont pas independantes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :
  - ▶  $G_{n,m}$  :

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :



## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

### En résumé :

- ▶  $G_{n,p}$  est bon pour les calculs
  - ▶ Indépendance des arêtes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

### Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes
  - ▶ Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

### En resume :

- ▶  $G_{n,p}$  est bon pour les calculs
  - ▶ Independance des aretes
- ▶  $G_{n,m}$  est bon pour la generation
  - ▶ Bonne complexite
  - ▶ Nombre exact d'aretes

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?

# Distances dans $G_{n,m}$ ?

Reseaux				Densite		Dist. moy.	
Context	Network	n	m	$\rho$	$d^\circ$	Reel	$G_{n,m}$
SPECIES	foodweb	183	2434	$1 \cdot 10^{-1}$	26.6	2.1	1.9
CO-OCCUR	bible-names	1707	9059	$6 \cdot 10^{-3}$	10.6	3.4	3.4
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3 \cdot 10^{-3}$	5.8	3.8	4.1
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2 \cdot 10^{-3}$	6.5	6.0	5.7
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8 \cdot 10^{-3}$	48.8	4.2	3.0
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3 \cdot 10^{-3}$	16.4	2.1	2.1
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3 \cdot 10^{-3}$	16.7	2.1	2.1
INTERNET	as2000	6474	12572	$6 \cdot 10^{-4}$	3.9	3.7	4.7
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7 \cdot 10^{-4}$	5.7	6.0	5.7
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2 \cdot 10^{-3}$	21	4.7	3.9
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1 \cdot 10^{-3}$	22	4.2	3.6
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4 \cdot 10^{-4}$	8.6	5.3	5.1
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1 \cdot 10^{-3}$	25.7	3.5	3.4
CITATION-SCI.	cora	23166	89157	$3 \cdot 10^{-4}$	7.7	5.9	5.1
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2 \cdot 10^{-4}$	4.0	3.9	5.3
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400	352021	$9 \cdot 10^{-4}$	25.7	4.3	3.5
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4 \cdot 10^{-4}$	13.8	3.2	3.4
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401	420784	$7 \cdot 10^{-4}$	24.5	4.3	3.6
INTERNET	topology	34761	107720	$2 \cdot 10^{-4}$	6.2	3.8	4.8
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8 \cdot 10^{-5}$	4.7	5.9	7.2
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6 \cdot 10^{-5}$	9.0	5.5	5.6
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8 \cdot 10^{-5}$	19.3	9.3	4.7
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2 \cdot 10^{-5}$	6.6	6.8	7.4
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2 \cdot 10^{-5}$	5.5	11.9	8.1
CITATION-SCI.	citeseer	365154	1721981	$3 \cdot 10^{-5}$	9.4	6.5	5.7
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2 \cdot 10^{-4}$	80.2	3.7	3.3
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5 \cdot 10^{-5}$	37.6	4.6	3.7
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5 \cdot 10^{-6}$	5.3	5.3	6.6
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2 \cdot 10^{-5}$	21.4	8.8	5.3
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2 \cdot 10^{-6}$	2.8	415.7	16.3
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8 \cdot 10^{-6}$	13.1	5.1	5
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2 \cdot 10^{-6}$	3.9	3.9	5.6
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2 \cdot 10^{-5}$	76.3	4.2	3.9
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2 \cdot 10^{-6}$	8.8	8.2	7.2
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4 \cdot 10^{-6}$	17.4	5.6	5.7

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !



# $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

## Conclusion

- $G_{n,m}$  est un tres bon modele

# $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

## Conclusion

- $G_{n,m}$  est un tres bon modele
- Jusqu'a maintenant...