

M1 Info - Systemes Complexes Avances

# Cours 2 - Proprietes et modeles

Densite globale, distances, Erdős-Rényi

Semestre Automne 2022-2023 - Université Côte D'azur

Christophe Crespelle

[christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr](mailto:christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr)



# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - ▶ Il faut connaitre ces proprietes

# Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non  $\implies$  il y a une diversite de types de reseaux
  - ▶ Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - ▶ On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - ▶ Il faut connaitre ces proprietes
  - ▶ Et savoir reconnaitre les (plutot rares) cas ou on s'en eloigne

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

1. Densité

- ▶ Quantités d'arêtes

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

## Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

### 1. Densité

- ▶ Quantités d'arêtes

### 2. Distances

- ▶ Longueur des chemins dans le réseau

# Quatre grandes propriétés des réseaux complexes

## Quatre propriétés fondamentales des réseaux complexes

1. Densité
  - ▶ Quantités d'arêtes
2. Distances
  - ▶ Longueur des chemins dans le réseau
3. Distribution des degrés
  - ▶ Nombre de voisins de chaque sommet

# Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

## Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

1. Densite
  - ▶ Quantites d'aretes
2. Distances
  - ▶ Longueur des chemins dans le reseau
3. Distribution des degres
  - ▶ Nombre de voisins de chaque sommet
4. Densite locale
  - ▶ Propension des aretes a se regrouper dans les voisinages des sommets
  - ▶ Les amis de mes amis sont-ils mes amis?  $\implies$  transitivite

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets
- $E$  ensemble des aretes (ou  $E(G)$ ),  $m = |E|$  nb d'aretes

# I. Densite

## Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

## Dans toute la suite on note :

- le graphe  $G = (V, E)$
- $V$  ensemble des sommets (ou  $V(G)$ ),  $n = |V|$  nb de sommets
- $E$  ensemble des aretes (ou  $E(G)$ ),  $m = |E|$  nb d'aretes

## Question ???

*Combien d'aretes au maximum dans un graphe ?*

# I. Densité

## **Definition (Densité)**

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

# I. Densité

## **Definition (Densité)**

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

- ▶ Proportion d'arêtes par rapport au nb d'arêtes possibles.

# I. Densité

## Definition (Densité)

La densité d'un graphe  $G$  est notée  $\rho$  et est définie par  $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

- ▶ Proportion d'arêtes par rapport au nb d'arêtes possibles.

## Exemples :

## I. Mesure alternative : degre moyen

### **Definition (Voisinage)**

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

## I. Mesure alternative : degre moyen

### Definition (Voisinage)

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

### Definition (Degre)

Le **degre** d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$ , note  $d^\circ(u)$  est le nombre de voisins de  $u$  dans  $G$ .

Le **degre moyen** d'un reseau  $G$ , note  $\bar{d}$ , est la moyenne des degres de ses noeuds :  $\bar{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$ .

## I. Mesure alternative : degre moyen

### Definition (Voisinage)

Le voisinage d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$  est note  $N(u)$  et defini par  $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$ .

Lorsque  $v \in N(u)$  on dit que  $v$  est voisin de  $u$ .

### Definition (Degre)

Le **degre** d'un noeud  $u$  dans un reseau  $G$ , note  $d^\circ(u)$  est le nombre de voisins de  $u$  dans  $G$ .

Le **degre moyen** d'un reseau  $G$ , note  $\bar{d}$ , est la moyenne des degres de ses noeuds :  $\bar{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$ .

### Exemples :

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

Question ???

*Que vaut  $\sum_{u \in V} d^{\circ}(u)$  dans un graphe ?*

# I. Rapport entre densité et degré moyen

Question ???

*Comment s'écrit le degré moyen en fonction uniquement de  $n$  et  $m$  ?*

Question ???

*Que vaut  $\sum_{u \in V} d^{\circ}(u)$  dans un graphe ?*

Question ???

*Comment s'écrit la densité en fonction du degré moyen (et vice-versa) ?*

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

| Reseaux       |              |         |
|---------------|--------------|---------|
| Context       | Network      | n       |
| SPECIES       | foodweb      | 183     |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    |
| INTERNET      | as2000       | 6474    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   |
| INTERNET      | topology     | 34761   |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  |
| WWW           | eu-2005      | 835044  |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 |
| WWW           | in-2004      | 1148875 |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 |

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

| Reseaux       |              |         |
|---------------|--------------|---------|
| Context       | Network      | n       |
| SPECIES       | foodweb      | 183     |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    |
| INTERNET      | as2000       | 6474    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   |
| INTERNET      | topology     | 34761   |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  |
| WWW           | eu-2005      | 835044  |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 |
| WWW           | in-2004      | 1148875 |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 |

- Densite

- ▶ Forte ou faible ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

| Reseaux       |              |         |
|---------------|--------------|---------|
| Context       | Network      | n       |
| SPECIES       | foodweb      | 183     |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    |
| INTERNET      | as2000       | 6474    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   |
| INTERNET      | topology     | 34761   |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  |
| WWW           | eu-2005      | 835044  |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 |
| WWW           | in-2004      | 1148875 |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 |

- Densite

- ▶ Forte ou faible ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

- Degre moyen

- ▶ Ordre de grandeur ?

# I. Densite et degre moyen des reseaux reels ???

| Context       | Reseaux      |         | Densite   |                   |           |
|---------------|--------------|---------|-----------|-------------------|-----------|
|               | Network      | n       | m         | $\rho$            | $d^\circ$ |
| SPECIES       | foodweb      | 183     | 2434      | $1 \cdot 10^{-1}$ | 26.6      |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    | 9059      | $6 \cdot 10^{-3}$ | 10.6      |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    | 6418      | $3 \cdot 10^{-3}$ | 5.8       |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    | 13422     | $2 \cdot 10^{-3}$ | 6.5       |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    | 145778    | $8 \cdot 10^{-3}$ | 48.8      |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    | 50290     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.4      |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    | 53658     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.7      |
| INTERNET      | as2000       | 6474    | 12572     | $6 \cdot 10^{-4}$ | 3.9       |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    | 24806     | $7 \cdot 10^{-4}$ | 5.7       |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   | 117619    | $2 \cdot 10^{-3}$ | 21        |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   | 196972    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 22        |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   | 91286     | $4 \cdot 10^{-4}$ | 8.6       |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   | 297094    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 25.7      |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   | 89157     | $3 \cdot 10^{-4}$ | 7.7       |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   | 53381     | $2 \cdot 10^{-4}$ | 4.0       |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   | 352021    | $9 \cdot 10^{-4}$ | 25.7      |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   | 213208    | $4 \cdot 10^{-4}$ | 13.8      |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   | 420784    | $7 \cdot 10^{-4}$ | 24.5      |
| INTERNET      | topology     | 34761   | 107720    | $2 \cdot 10^{-4}$ | 6.2       |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   | 147878    | $8 \cdot 10^{-5}$ | 4.7       |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  | 656230    | $6 \cdot 10^{-5}$ | 9.0       |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  | 2187201   | $8 \cdot 10^{-5}$ | 19.3      |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  | 1049866   | $2 \cdot 10^{-5}$ | 6.6       |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  | 925872    | $2 \cdot 10^{-5}$ | 5.5       |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  | 1721981   | $3 \cdot 10^{-5}$ | 9.4       |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  | 15014839  | $2 \cdot 10^{-4}$ | 80.2      |
| WWW           | eu-2005      | 835044  | 15718784  | $5 \cdot 10^{-5}$ | 37.6      |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 | 2987624   | $5 \cdot 10^{-6}$ | 5.3       |
| WWW           | in-2004      | 1148875 | 12281937  | $2 \cdot 10^{-5}$ | 21.4      |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 | 1879201   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 2.8       |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 | 11094209  | $8 \cdot 10^{-6}$ | 13.1      |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 | 4656682   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 3.9       |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 | 117185083 | $2 \cdot 10^{-5}$ | 76.3      |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 | 16511740  | $2 \cdot 10^{-6}$ | 8.8       |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 | 34681189  | $4 \cdot 10^{-6}$ | 17.4      |

## II. Distances

### **Definition (Chemin)**

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

## II. Distances

### Definition (Chemin)

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

### Definition (Distance entre deux sommets)

La distance  $dist(a, b)$  entre deux sommets  $a$  et  $b$  est la longueur d'un plus court chemin entre  $a$  et  $b$ .

## II. Distances

### Definition (Chemin)

Un chemin d'un sommet  $a$  à un sommet  $b$  dans un graphe  $G$  est une séquence de sommets  $C = u_1, u_2, \dots, u_k$  telle que  $u_1 = a$ ,  $u_k = b$  et  $\forall i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket, u_i u_{i+1} \in E(G)$ .

La longueur du chemin  $C$  est  $k - 1$ , son nombre d'arêtes.

### Definition (Distance entre deux sommets)

La distance  $dist(a, b)$  entre deux sommets  $a$  et  $b$  est la longueur d'un plus court chemin entre  $a$  et  $b$ .

### Definition (Diamètre et distance moyenne)

Le diamètre d'un graphe  $G$  est la plus grande distance entre deux de ses sommets :  $\max\{dist(a, b) \mid a, b \in V(G)\}$ .

La distance moyenne dans un graphe  $G$  est la moyenne des distances entre toutes ses paires de sommets :  $\frac{\sum_{\{a,b\} \subset V(G)} dist(a,b)}{n(n-1)/2}$

## II. Distances

Exemples :

## II. Distances dans les reseaux reels ???

| Reseaux       |              |         |
|---------------|--------------|---------|
| Context       | Network      | n       |
| SPECIES       | foodweb      | 183     |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    |
| INTERNET      | as2000       | 6474    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   |
| INTERNET      | topology     | 34761   |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  |
| WWW           | eu-2005      | 835044  |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 |
| WWW           | in-2004      | 1148875 |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 |

- Distance moyenne

- ▶ Grande ou petite ?

- ▶ Ordre de grandeur ?

## II. Distances dans les reseaux reels ???

| Reseaux       |              |         |
|---------------|--------------|---------|
| Context       | Network      | n       |
| SPECIES       | foodweb      | 183     |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    |
| INTERNET      | as2000       | 6474    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   |
| INTERNET      | topology     | 34761   |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  |
| WWW           | eu-2005      | 835044  |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 |
| WWW           | in-2004      | 1148875 |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 |

- Distance moyenne

- ▶ Grande ou petite ?

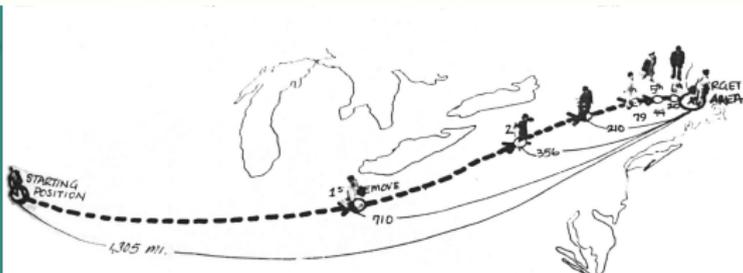
- ▶ Ordre de grandeur ?

- Diametre

- ▶ Grand ou petit ?

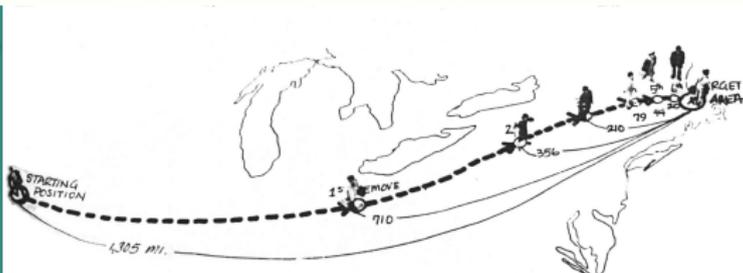
- ▶ Comparaison a la distance moyenne ?

## II. Experience de Milgram



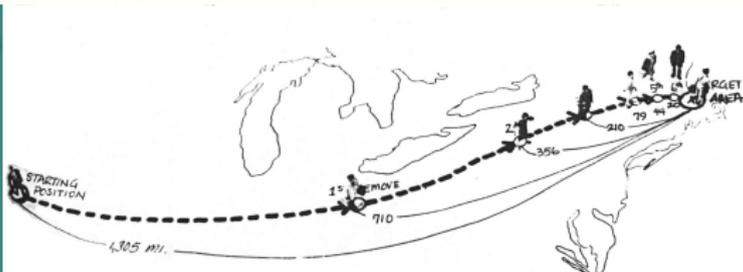
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)

## II. Experience de Milgram



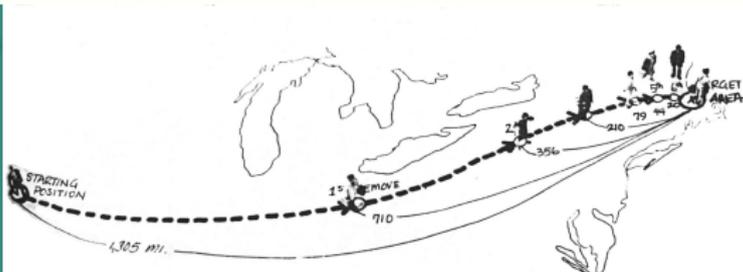
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska

## II. Experience de Milgram



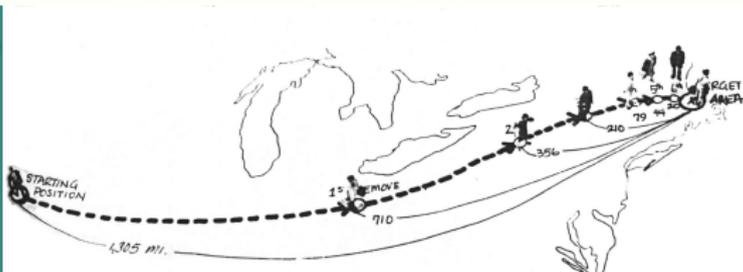
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse

## II. Experience de Milgram



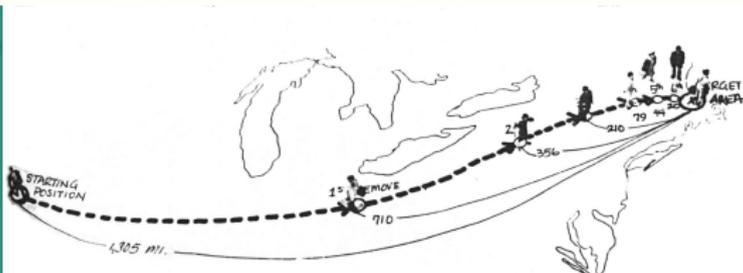
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :

## II. Experience de Milgram



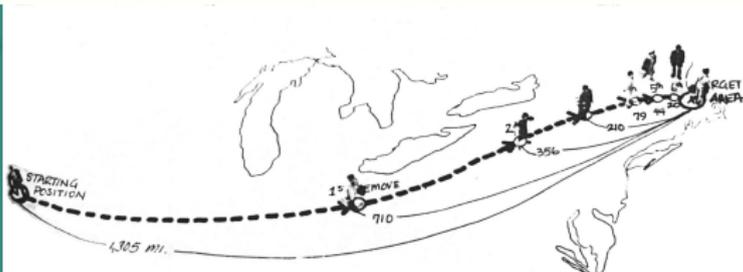
- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste

## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste
  - ▶ seulement à quelqu'un qu'ils connaissent personnellement

## II. Experience de Milgram



- Aux USA dans les années 60 (publié en 1967)
- 160 personnes prises au hasard à Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre à une même personne à Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les règles suivantes :
  - ▶ envoi de la lettre par poste
  - ▶ seulement à quelqu'un qu'ils connaissent personnellement
  - ▶ avec ces instructions incluses dans la lettre

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!

## II. Experience de Milgram

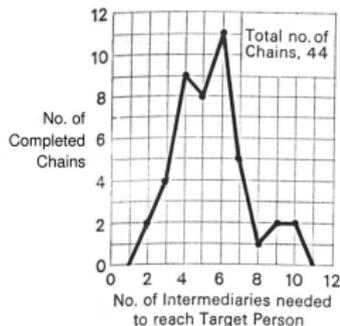
### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - ▶ Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - ▶ Median a 5

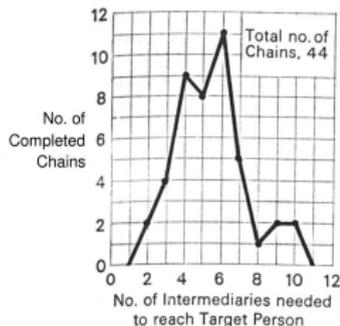


**In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.**

## II. Experience de Milgram

### Conclusions de l'expérience

- La plupart des lettres n'arrivent pas !!!
  - ▶ Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - ▶ Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - ▶ Median a 5



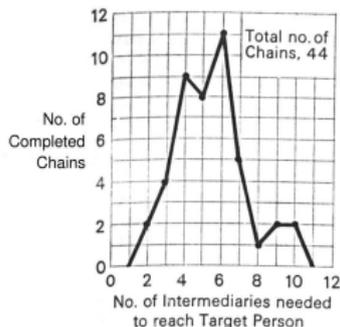
In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

- $\implies$  6 degrees de separation

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas

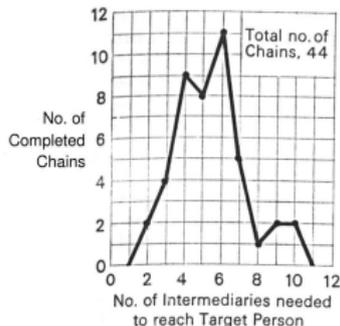


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande

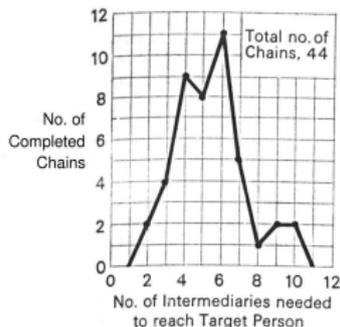


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-être (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire

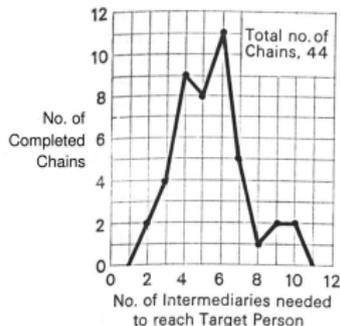


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Experience de Milgram

### Critiques de l'expérience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - ▶ pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire
- Departs tous dans le meme etat

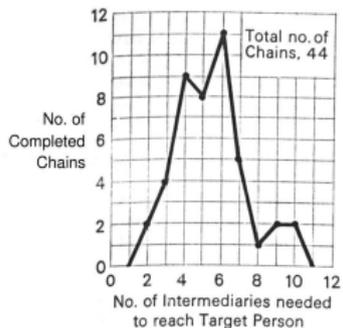


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## II. Distances dans les reseaux ???

| Reseaux       |              |         |           | Densite           |           | Distances  |
|---------------|--------------|---------|-----------|-------------------|-----------|------------|
| Context       | Network      | n       | m         | $\rho$            | $d^\circ$ | dist. moy. |
| SPECIES       | foodweb      | 183     | 2434      | $1 \cdot 10^{-1}$ | 26.6      | 2.1        |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    | 9059      | $6 \cdot 10^{-3}$ | 10.6      | 3.4        |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    | 6418      | $3 \cdot 10^{-3}$ | 5.8       | 3.8        |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    | 13422     | $2 \cdot 10^{-3}$ | 6.5       | 6.0        |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    | 145778    | $8 \cdot 10^{-3}$ | 48.8      | 4.2        |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    | 50290     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.4      | 2.1        |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    | 53658     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.7      | 2.1        |
| INTERNET      | as2000       | 6474    | 12572     | $6 \cdot 10^{-4}$ | 3.9       | 3.7        |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    | 24806     | $7 \cdot 10^{-4}$ | 5.7       | 6.0        |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   | 117619    | $2 \cdot 10^{-3}$ | 21        | 4.7        |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   | 196972    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 22        | 4.2        |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   | 91286     | $4 \cdot 10^{-4}$ | 8.6       | 5.3        |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   | 297094    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 25.7      | 3.5        |
| CITATION-SCL. | cora         | 23166   | 89157     | $3 \cdot 10^{-4}$ | 7.7       | 5.9        |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   | 53381     | $2 \cdot 10^{-4}$ | 4.0       | 3.9        |
| CITATION-SCL. | cit-HepTh    | 27400   | 352021    | $9 \cdot 10^{-4}$ | 25.7      | 4.3        |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   | 213208    | $4 \cdot 10^{-4}$ | 13.8      | 3.2        |
| CITATION-SCL. | cit-HepPh    | 34401   | 420784    | $7 \cdot 10^{-4}$ | 24.5      | 4.3        |
| INTERNET      | topology     | 34761   | 107720    | $2 \cdot 10^{-4}$ | 6.2       | 3.8        |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   | 147878    | $8 \cdot 10^{-5}$ | 4.7       | 5.9        |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  | 656230    | $6 \cdot 10^{-5}$ | 9.0       | 5.5        |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  | 2187201   | $8 \cdot 10^{-5}$ | 19.3      | 9.3        |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  | 1049866   | $2 \cdot 10^{-5}$ | 6.6       | 6.8        |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  | 925872    | $2 \cdot 10^{-5}$ | 5.5       | 11.9       |
| CITATION-SCL. | citeseer     | 365154  | 1721981   | $3 \cdot 10^{-5}$ | 9.4       | 6.5        |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  | 15014839  | $2 \cdot 10^{-4}$ | 80.2      | 3.7        |
| WWW           | eu-2005      | 835044  | 15718784  | $5 \cdot 10^{-5}$ | 37.6      | 4.6        |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 | 2987624   | $5 \cdot 10^{-6}$ | 5.3       | 5.3        |
| WWW           | in-2004      | 1148875 | 12281937  | $2 \cdot 10^{-5}$ | 21.4      | 8.8        |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 | 1879201   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 2.8       | 415.7      |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 | 11094209  | $8 \cdot 10^{-6}$ | 13.1      | 5.1        |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 | 4656682   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 3.9       | 3.9        |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 | 117185083 | $2 \cdot 10^{-5}$ | 76.3      | 4.2        |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 | 16511740  | $2 \cdot 10^{-6}$ | 8.8       | 8.2        |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 | 34681189  | $4 \cdot 10^{-6}$ | 17.4      | 5.6        |

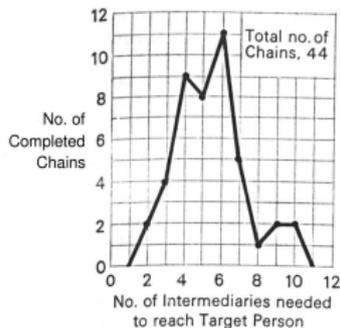
## II. Retour sur Milgram



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

## Autres enseignements de Milgram

## II. Retour sur Milgram

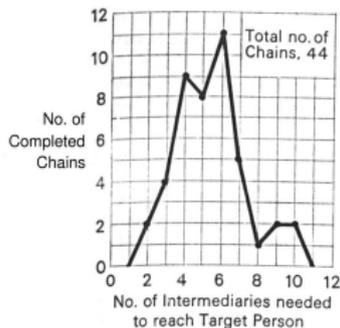


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

### Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent !!!
  - ▶ Malgré le manque d'information.

## II. Retour sur Milgram



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

### Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent !!!
  - ▶ Malgré le manque d'information.
- Les chemins sont trouvables
  - ▶ Graphes navigables [Kleinberg 2000 et suites]

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

## Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !

## Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

# Recapitulatif (jusqu'a present)

## Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !
- Mais tres bien compris du point de vue mathematique

⇒ c'est une propriete de l'aleatoire

## Question ???

*Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
  
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$
  
- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile!)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - ▶ Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - ▶ Avec des proprietes prescrites
  - ▶ Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes
  
- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
    - ▶ une distance moyenne  $l$
  - ▶ ex :  $n = 1000$ ,  $m = 3623$ ,  $l = 4.68$
  
- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile !)
  - ▶ Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - ▶  $n$  sommets
    - ▶  $m$  aretes
  - ▶ Verifier a posteriori que sa distance moyenne est faible.

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

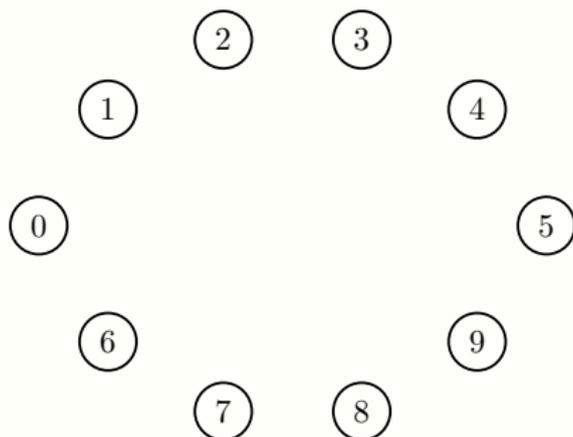
- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$

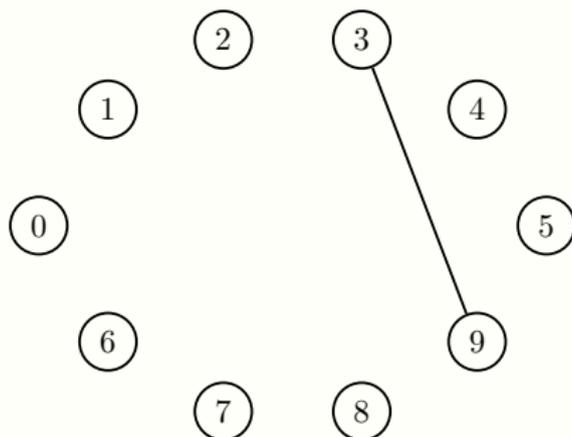
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



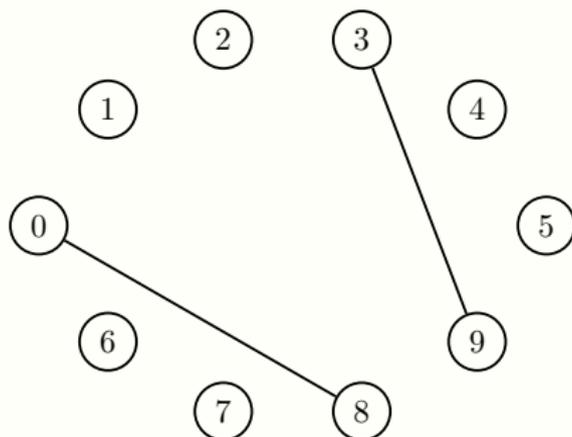
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



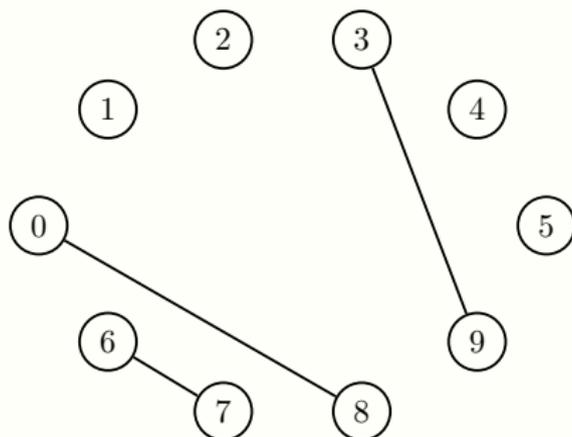
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



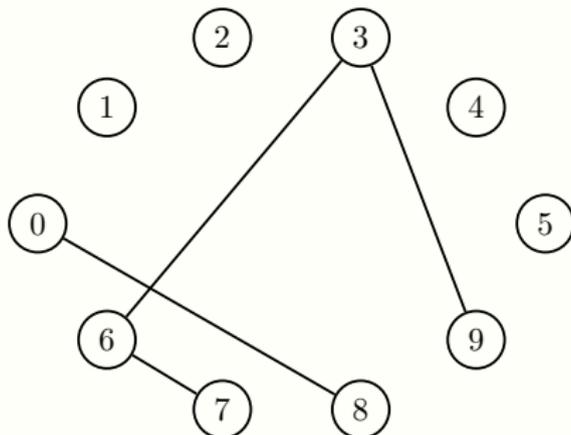
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



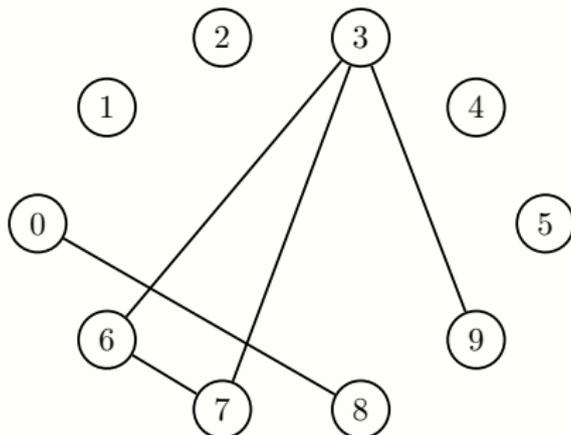
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



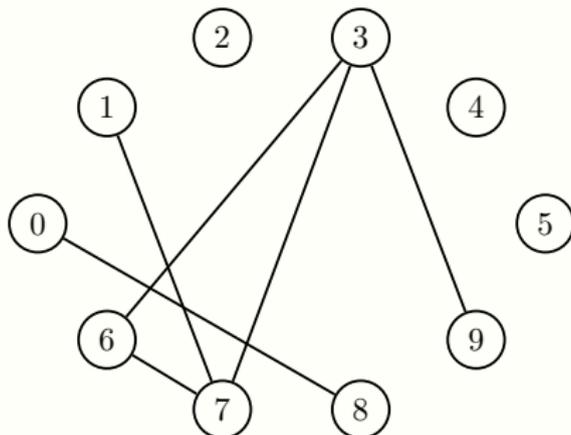
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10, m = 10$



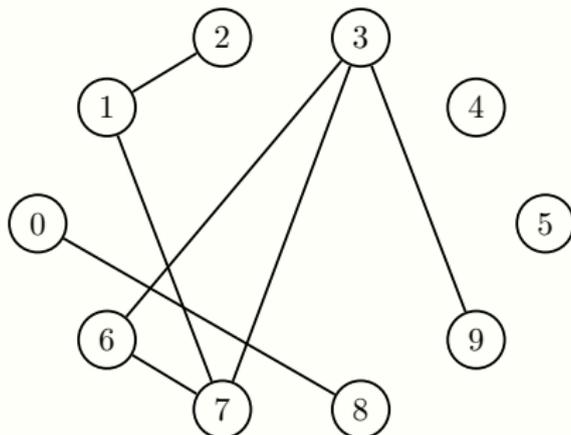
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



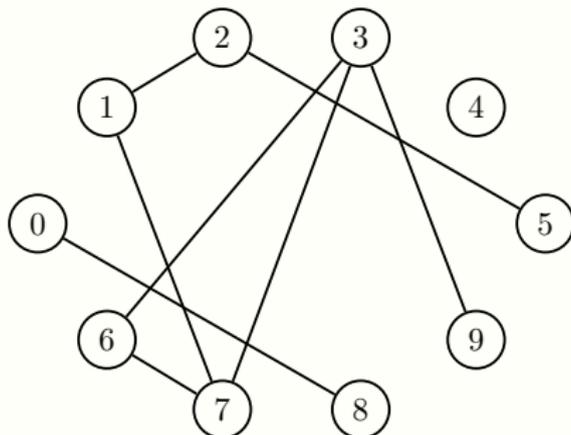
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



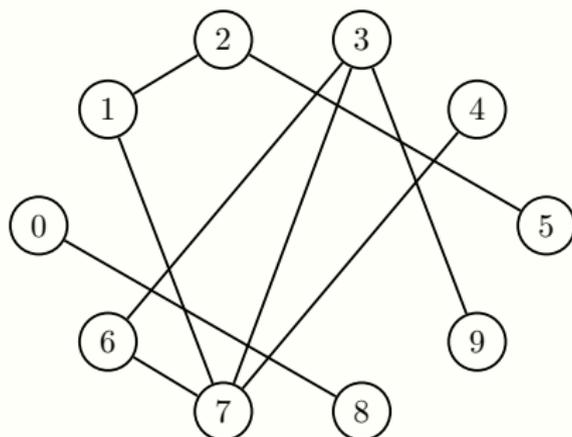
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



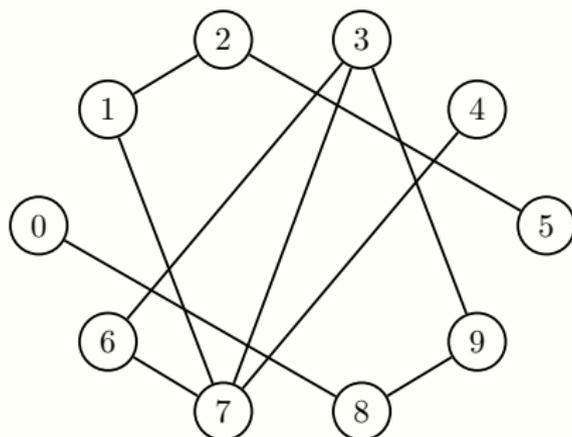
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex :  $n = 10$ ,  $m = 10$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,m}$  ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,m}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ On tire  $m$  aretes unif. alea. parmi les  $\frac{n(n-1)}{2}$  possibles
    - ▶ Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,m}$  ?*

## Question ???

*Pour un couple  $u, v \in V$ , quelle est la proba que  $uv$  soit une arete dans  $G_{n,m}$  ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

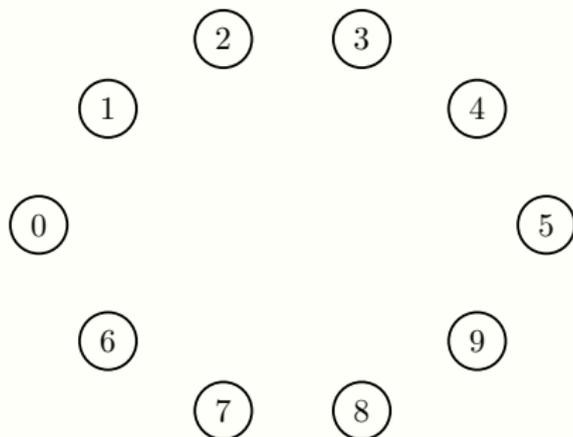
- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

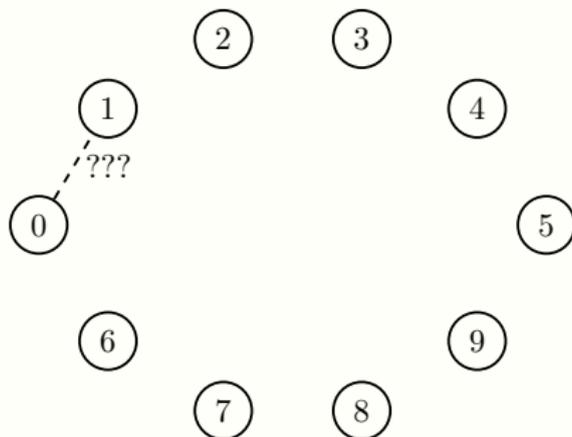
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



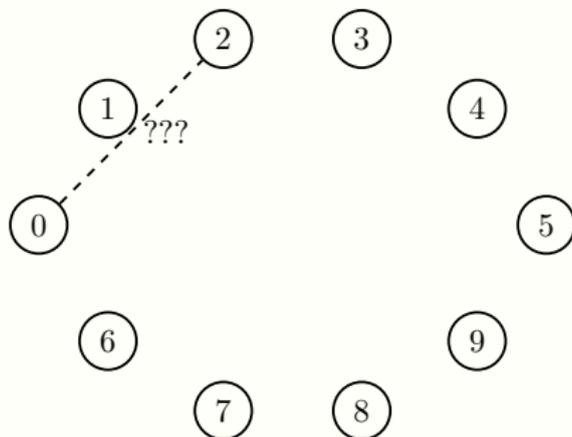
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



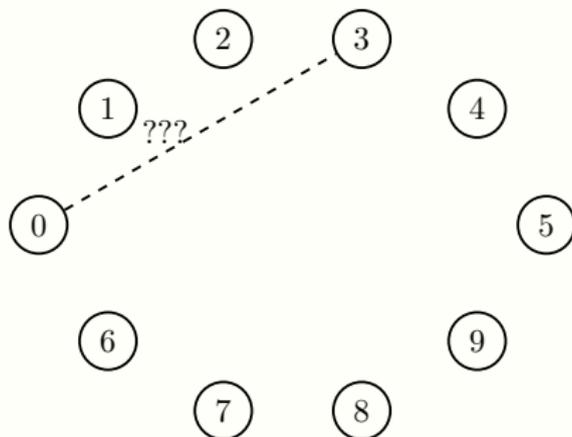
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



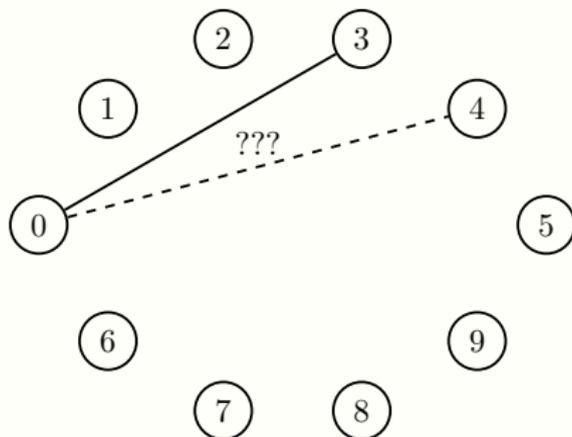
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



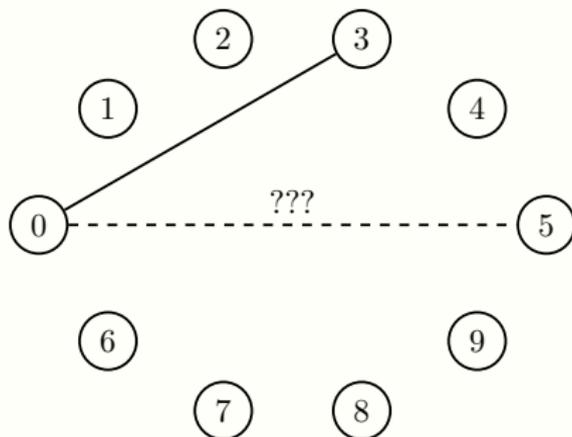
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



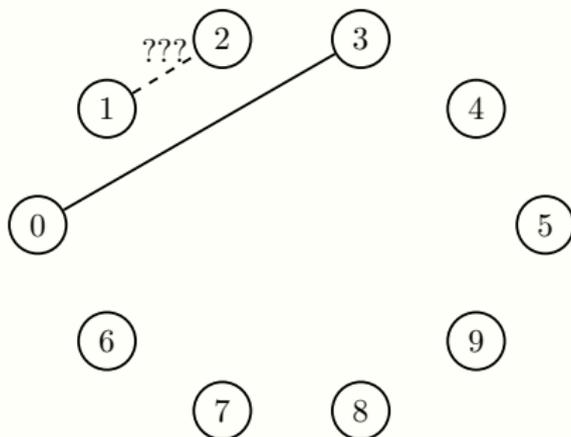
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



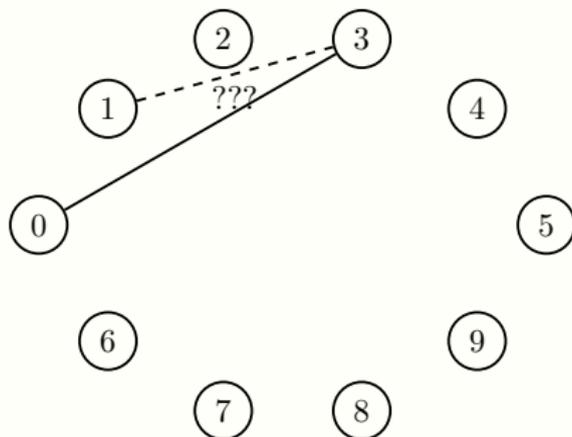
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



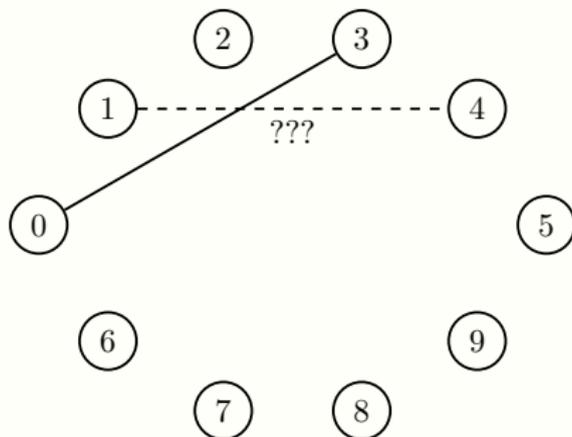
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



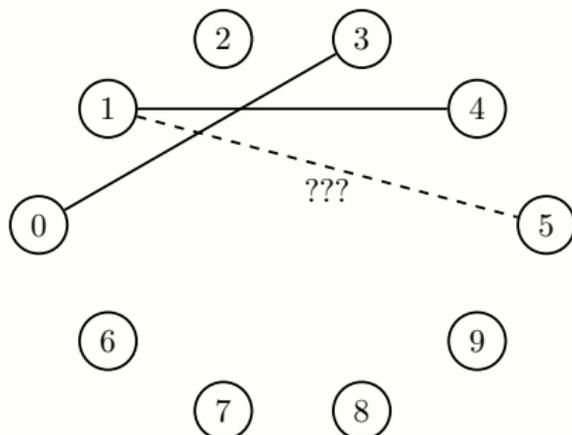
# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10$ ,  $p = 0.2$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )
- Ex :  $n = 10, p = 0.2$



# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,p}$  ?*

# Un premier modele : graphes d'Erdős-Rényi

- Le modele  $G_{n,p}$ 
  - ▶ On part d'un graphe a  $n$  sommets et sans aretes
  - ▶ Pour chaque paire  $u, v$  de sommets, on met une arete avec proba  $p$   
(et on n'en met pas avec proba  $1 - p$ )

## Question ???

*Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele  $G_{n,p}$  ?*

## Question ???

*Quel est l'esperance du nombre d'aretes dans le modele  $G_{n,p}$  ?*

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

Question ???

*Sont ils strictement identiques ?*

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes
  - ▶ Mais elles ne sont pas independantes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :
  - ▶  $G_{n,m}$  :

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modes sont "équivalents"

### Question ???

*Sont-ils strictement identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les arêtes sont **indépendantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  arêtes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  arêtes
  - ▶ Mais elles ne sont pas indépendantes
- Complexité du procédé de tirage aléatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

### Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes
  - ▶ Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

### En resume :

- ▶  $G_{n,p}$  est bon pour les calculs
  - ▶ Independance des aretes

## Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec  $p = \frac{2m}{n(n-1)}$ , les deux modeles sont "equivalents"

### Question ???

*Sont ils strictements identiques ?*

- Dans  $G_{n,p}$ 
  - ▶ Les aretes sont **independantes**
  - ▶ Mais il n'y a pas exactement  $m$  aretes
- Dans  $G_{n,m}$ 
  - ▶ Il y a **exactement**  $m$  aretes
  - ▶ Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - ▶  $G_{n,p}$  :  $O(n^2)$  (pour tout couple)
  - ▶  $G_{n,m}$  :  $O(m)$  (tirer  $m$  couples)

### En resume :

- ▶  $G_{n,p}$  est bon pour les calculs
  - ▶ Independance des aretes
- ▶  $G_{n,m}$  est bon pour la generation
  - ▶ Bonne complexite
  - ▶ Nombre exact d'aretes

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?

# Distances dans $G_{n,m}$ ?

| Reseaux       |              |         |           | Densite           |           | Dist. moy. |           |
|---------------|--------------|---------|-----------|-------------------|-----------|------------|-----------|
| Context       | Network      | n       | m         | $\rho$            | $d^\circ$ | Reel       | $G_{n,m}$ |
| SPECIES       | foodweb      | 183     | 2434      | $1 \cdot 10^{-1}$ | 26.6      | 2.1        | 1.9       |
| CO-OCCUR      | bible-names  | 1707    | 9059      | $6 \cdot 10^{-3}$ | 10.6      | 3.4        | 3.4       |
| PROTEIN       | figeys       | 2217    | 6418      | $3 \cdot 10^{-3}$ | 5.8       | 3.8        | 4.1       |
| CO-AUTHOR     | ca-GrQc      | 4158    | 13422     | $2 \cdot 10^{-3}$ | 6.5       | 6.0        | 5.7       |
| PROTEIN       | reactome     | 5973    | 145778    | $8 \cdot 10^{-3}$ | 48.8      | 4.2        | 3.0       |
| SOFTWARE      | jung-j       | 6120    | 50290     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.4      | 2.1        | 2.1       |
| SOFTWARE      | jdk          | 6434    | 53658     | $3 \cdot 10^{-3}$ | 16.7      | 2.1        | 2.1       |
| INTERNET      | as2000       | 6474    | 12572     | $6 \cdot 10^{-4}$ | 3.9       | 3.7        | 4.7       |
| CO-AUTHOR     | ca-HepTh     | 8638    | 24806     | $7 \cdot 10^{-4}$ | 5.7       | 6.0        | 5.7       |
| CO-AUTHOR     | ca-HepPh     | 11204   | 117619    | $2 \cdot 10^{-3}$ | 21        | 4.7        | 3.9       |
| CO-AUTHOR     | ca-AstroPh   | 17903   | 196972    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 22        | 4.2        | 3.6       |
| CO-AUTHOR     | ca-CondMat   | 21363   | 91286     | $4 \cdot 10^{-4}$ | 8.6       | 5.3        | 5.1       |
| WORD-REL.     | Thesaurus    | 23132   | 297094    | $1 \cdot 10^{-3}$ | 25.7      | 3.5        | 3.4       |
| CITATION-SCI. | cora         | 23166   | 89157     | $3 \cdot 10^{-4}$ | 7.7       | 5.9        | 5.1       |
| INTERNET      | as-caida2007 | 26475   | 53381     | $2 \cdot 10^{-4}$ | 4.0       | 3.9        | 5.3       |
| CITATION-SCI. | cit-HepTh    | 27400   | 352021    | $9 \cdot 10^{-4}$ | 25.7      | 4.3        | 3.5       |
| SOFTWARE      | linux        | 30817   | 213208    | $4 \cdot 10^{-4}$ | 13.8      | 3.2        | 3.4       |
| CITATION-SCI. | cit-HepPh    | 34401   | 420784    | $7 \cdot 10^{-4}$ | 24.5      | 4.3        | 3.6       |
| INTERNET      | topology     | 34761   | 107720    | $2 \cdot 10^{-4}$ | 6.2       | 3.8        | 4.8       |
| P2P-CONNECT.  | p2p-Gnutella | 62561   | 147878    | $8 \cdot 10^{-5}$ | 4.7       | 5.9        | 7.2       |
| WORD-REL.     | wordnet      | 145145  | 656230    | $6 \cdot 10^{-5}$ | 9.0       | 5.5        | 5.6       |
| WWW           | cnr-2000     | 227058  | 2187201   | $8 \cdot 10^{-5}$ | 19.3      | 9.3        | 4.7       |
| CO-AUTHOR     | dblp         | 317080  | 1049866   | $2 \cdot 10^{-5}$ | 6.6       | 6.8        | 7.4       |
| CO-SOLD       | amazon       | 334863  | 925872    | $2 \cdot 10^{-5}$ | 5.5       | 11.9       | 8.1       |
| CITATION-SCI. | citeseer     | 365154  | 1721981   | $3 \cdot 10^{-5}$ | 9.4       | 6.5        | 5.7       |
| CO-ACTOR      | actor-col.   | 374511  | 15014839  | $2 \cdot 10^{-4}$ | 80.2      | 3.7        | 3.3       |
| WWW           | eu-2005      | 835044  | 15718784  | $5 \cdot 10^{-5}$ | 37.6      | 4.6        | 3.7       |
| SOCIAL        | youtube      | 1134890 | 2987624   | $5 \cdot 10^{-6}$ | 5.3       | 5.3        | 6.6       |
| WWW           | in-2004      | 1148875 | 12281937  | $2 \cdot 10^{-5}$ | 21.4      | 8.8        | 5.3       |
| ROAD          | roadNet-TX   | 1351137 | 1879201   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 2.8       | 415.7      | 16.3      |
| INTERNET      | as-skitter   | 1694616 | 11094209  | $8 \cdot 10^{-6}$ | 13.1      | 5.1        | 5         |
| COMMUNIC.     | wiki-Talk    | 2388953 | 4656682   | $2 \cdot 10^{-6}$ | 3.9       | 3.9        | 5.6       |
| SOCIAL        | orkut        | 3072441 | 117185083 | $2 \cdot 10^{-5}$ | 76.3      | 4.2        | 3.9       |
| CITATION-PAT. | cit-Patents  | 3764117 | 16511740  | $2 \cdot 10^{-6}$ | 8.8       | 8.2        | 7.2       |
| SOCIAL        | LiveJournal  | 3997962 | 34681189  | $4 \cdot 10^{-6}$ | 17.4      | 5.6        | 5.7       |

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK

## $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

# $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

## Conclusion

- $G_{n,m}$  est un tres bon modele

# $G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - ▶ nb d'aretes prescrit
  - ▶ distances faibles
- Question : distances dans  $G_{n,m}$  ?
  - ▶ Distance moyenne courte : OK
  - ▶ Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

## Conclusion

- $G_{n,m}$  est un tres bon modele
- Jusqu'a maintenant...