M1 Info - Systemes Complexes Avances

Cours 2 - Proprietes et modeles

Densite globale, distances, Erdös-Rényi

Semestre Automne 2022-2023 - Université Côte D'azur

Christophe Crespelle
christophe.crespelle@univ-cotedazur.fr

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - On etudie comment repondre aux grandes questions classiques

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - Il faut connaitre ces proprietes

Une theorie unifiee des reseaux complexes ?

Peut on parler des reseaux complexes en general ?

- Non $\Longrightarrow$ il y a une diversite de types de reseaux
  - Ce qui est vrai pour un reseau ou un type ne l'est pas necessairement pour tous

Pourquoi ca a quand meme du sens :

- Contextes tres differents mais questions structurelles similaires
  - On etudie comment repondre aux grandes questions classiques
- Partagent un certains nombre de proprietes fondamentales
  - Il faut connaitre ces proprietes
  - Et savoir reconnaitre les (plutot rares) cas ou on s'en eloigne

Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

1. Densite
   - Quantites d'aretes

Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

1. Densite
   - Quantites d'aretes
2. Distances
   - Longueur des chemins dans le reseau

Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

1. Densite
   - Quantites d'aretes
2. Distances
   - Longueur des chemins dans le reseau
3. Distribution des degres
   - Nombre de voisins de chaque sommet

Quatre grandes proprietes des reseaux complexes

Quatre proprietes fondamentales des reseaux complexes

1. Densite
   - Quantites d'aretes
2. Distances
   - Longueur des chemins dans le reseau
3. Distribution des degres
   - Nombre de voisins de chaque sommet
4. Densite locale
   - Propension des aretes a se regrouper dans les voisinages des sommets
   - Les amis de mes amis sont-ils mes amis ? $\Longrightarrow$ transitivite

I. Densite

Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

réseau complexe

théorie graphe

I. Densite

Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

Dans toute la suite on note :

I. Densite

<u>Vocabulaire :</u>

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

<u>Dans toute la suite on note :</u>

- le graphe $G = (V, E)$

I. Densite

Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

Dans toute la suite on note :

- le graphe $G = (V, E)$
- V ensemble des sommets (ou $V(G)$), $n = |V|$ nb de sommets

I. Densite

Vocabulaire :

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete

G

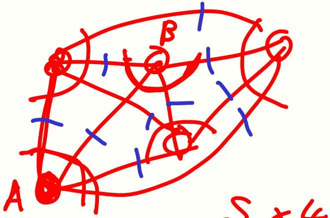
Dans toute la suite on note :

- le graphe $G = (V, E)$
- V ensemble des sommets (ou $V(G)$), $n = |V|$ nb de sommets
- E ensemble des aretes (ou $E(G)$), $m = |E|$ nb d'aretes

I. Densite

<u>Vocabulaire :</u>

- reseau = graphe
- noeud = sommet
- lien = arete



$$\frac{(n-1)\times n}{2} \qquad \frac{5\times 4}{2}$$

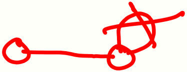
<u>Dans toute la suite on note :</u>

- le graphe $G = (V, E)$
- V ensemble des sommets (ou $V(G)$), $n = |V|$ nb de sommets
- E ensemble des aretes (ou $E(G)$), $m = |E|$ nb d'aretes

Question ???

Combien d'aretes au maximum dans un graphe ? simple à n sommets.

$$m \leq \frac{n(n-1)}{2} \qquad m \leq ???$$



I. Densite

Definition (Densite)
La densite d'un graphe G est note ρ et est definie par $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$.

$$\rho = \frac{m}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)}$$

$$0 \leq \rho \leq 1$$

I. Densite

Definition (Densite)
La densite d'un graphe G est note ρ et est definie par $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$.

- Proportion d'aretes par rapport au nb d'aretes possibles.

% d'arêtes dans le graphe.

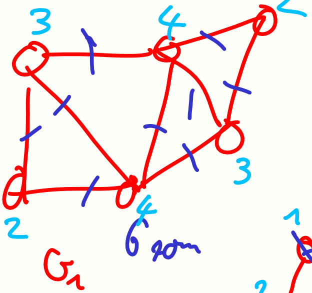
I. Densite

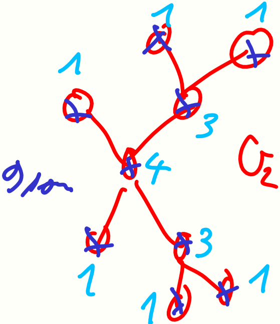
Definition (Densite)
La densite d'un graphe G est note ρ et est definie par $\rho = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}}$.

- Proportion d'aretes par rapport au nb d'aretes possibles.

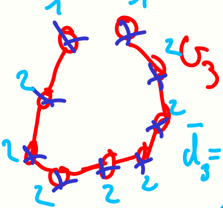
Exemples :

$\bar{d}_1 = \frac{18}{6} = 3$

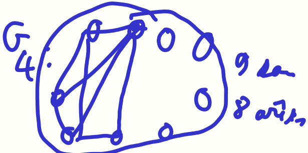




$\bar{d}_2 = \frac{16}{9} \approx 1,8$



$\bar{d}_3 = \frac{16}{9} \approx 1,8$



$\rho_1 = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = 0.6$

$\rho_2 = \frac{8}{36} = \frac{2}{9} = 0.22...$

$\rho_3 = 0,22...$

I. Mesure alternative : degre moyen

Definition (Voisinage)

Le voisinage d'un noeud u dans un reseau G est note $N(u)$ et defini par $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.
Lorsque $v \in N(u)$ on dit que v est voisin de u.

u et v sont adjacents
reliés.

I. Mesure alternative : degre moyen

Definition (Voisinage)
Le voisinage d'un noeud u dans un reseau G est note $N(u)$ et defini par $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.
Lorsque $v \in N(u)$ on dit que v est voisin de u.

Definition (Degre)
Le **degre** d'un noeud u dans un reseau G, note $d^\circ(u)$ est le nombre de voisins de u dans G.
Le **degre moyen** d'un reseau G, note $\overline{d}$, est la moyenne des degres de ses noeuds : $\overline{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$.

k : degré.

$\langle k \rangle$: degré moyen.

I. Mesure alternative : degre moyen

Definition (Voisinage)
Le voisinage d'un noeud u dans un reseau G est note $N(u)$ et defini par $N(u) = \{v \in V(G) \mid uv \in E(G)\}$.
Lorsque $v \in N(u)$ on dit que v est voisin de u.

Definition (Degre)
Le **degre** d'un noeud u dans un reseau G, note $d^\circ(u)$ est le nombre de voisins de u dans G.
Le **degre moyen** d'un reseau G, note $\overline{d}$, est la moyenne des degres de ses noeuds : $\overline{d} = \frac{\sum_{u \in V} d^\circ(u)}{n}$.

$\overline{d} = f(n, m)$

Exemples :

I. Rapport entre densite et degre moyen

Question ???

Comment s'ecrit le degre moyen en fonction uniquement de n et m ?

$\bar{d} =$

I. Rapport entre densite et degre moyen

Question ???

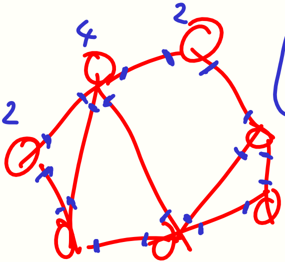
Comment s'ecrit le degre moyen en fonction uniquement de n et m ?

$$\bar{d} = \frac{\sum d^\circ(u)}{n} \rightarrow f(n,m)\,?$$

Question ???

Que vaut $\sum_{u \in V} d^\circ(u)$ *dans un graphe ?*

$$\bar{d} = \frac{2m}{n}$$



$$\boxed{\sum_{u \in V} d^\circ(u) = 2m}$$

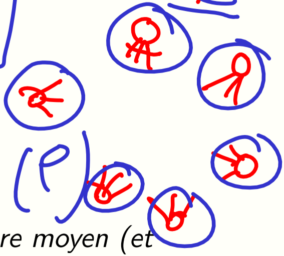
I. Rapport entre densite et degre moyen

Question ???

Comment s'ecrit le degre moyen en fonction uniquement de n et m ?

$$\boxed{\rho = \frac{\bar{d}}{n-1}}$$

$\bar{d} = 1,8$



Question ???

Que vaut $\sum_{u \in V} d^{\circ}(u)$ *dans un graphe ?*

$\bar{d} = f(\rho)$

Question ???

Comment s'ecrit la densite en fonction du degre moyen (et vice-versa) ?

$\bar{d} = (n-1)\rho \qquad \rho = f(n, m, \bar{d})$

I. Densite et degre moyen des reseaux reels ? ? ?

Reseaux		
Context	**Network**	**n**
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

I. Densite et degre moyen des reseaux reels ? ? ?

Reseaux		
Context	**Network**	**n**
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

forte

forte

faible

faible

- Densite
  - Forte ou faible ?
  - Ordre de grandeur ?

0,6

10^{-5}

$0,001 \quad 10^{-3}$

10^{-5} ou 10^{-4}

I. Densite et degre moyen des reseaux reels ? ? ?

Reseaux		
Context	**Network**	**n**
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137 — 4
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Densite
  - Forte ou faible ?
  - Ordre de grandeur ?
- Degre moyen
  - Ordre de grandeur ? — 10

I. Densite et degre moyen des reseaux reels ? ? ?

densité très faible.

$\bar{d}^\circ \sim cte.$

Reseaux				Densite	
Context	**Network**	[illegible]	**m**	ρ	$\overline{\mathbf{d}^\circ}$
SPECIES	foodweb	183	2434	$1{\cdot}10^{-1}$	26.6
CO-OCCUR	bible-names	[illegible]	9059	$6{\cdot}10^{-3}$	10.6
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3{\cdot}10^{-3}$	5.8
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2{\cdot}10^{-3}$	6.5
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8{\cdot}10^{-3}$	[illegible]
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3{\cdot}10^{-3}$	16.4
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3{\cdot}10^{-3}$	16.7
INTERNET	as2000	6474	12572	$6{\cdot}10^{-4}$	3.9
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7{\cdot}10^{-4}$	5.7
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2{\cdot}10^{-3}$	21
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1{\cdot}10^{-3}$	22
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4{\cdot}10^{-4}$	8.6
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1{\cdot}10^{-3}$	25.7
CITATION-SCI.	cora	23166	89157	$3{\cdot}10^{-4}$	7.7
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2{\cdot}10^{-4}$	4.0
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400	352021	$9{\cdot}10^{-4}$	25.7
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4{\cdot}10^{-4}$	13.8
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401	420784	$7{\cdot}10^{-4}$	24.5
INTERNET	topology	34761	107720	$2{\cdot}10^{-4}$	6.2
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8{\cdot}10^{-5}$	4.7
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6{\cdot}10^{-5}$	9.0
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8{\cdot}10^{-5}$	19.3
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2{\cdot}10^{-5}$	6.6
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2{\cdot}10^{-5}$	5.5
CITATION-SCI.	citeseer	365154	1721981	$3{\cdot}10^{-5}$	9.4
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2{\cdot}10^{-4}$	[illegible]
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5{\cdot}10^{-5}$	37.6
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5{\cdot}10^{-6}$	5.3
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2{\cdot}10^{-5}$	21.4
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2{\cdot}10^{-6}$	2.8
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8{\cdot}10^{-6}$	13.1
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2{\cdot}10^{-6}$	3.9
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2{\cdot}10^{-5}$	76.3
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2{\cdot}10^{-6}$	8.8
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4{\cdot}10^{-6}$	17.4

unité dégaine.

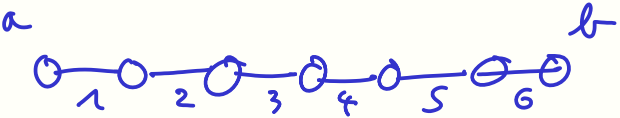
$\boxed{d^\circ = \text{constant}}$

$$\rho = \frac{\overline{d^\circ}}{n-1}$$

entre 3 et 30

II. Distances

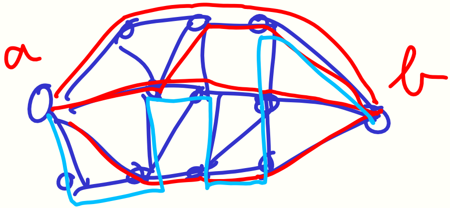
Definition (Chemin)
Un chemin d'un sommet a a un sommet b dans un graphe G est une sequence de sommets $C = u_1, u_2, \dots, u_k$ telle que $u_1 = a$, $u_k = b$ et $\forall i \in [\![1, k-1]\!], u_i u_{i+1} \in E(G)$.
La longueur du chemin C est $k-1$, son nombre d'aretes.



II. Distances

<u>Definition</u> (Chemin)
Un chemin d'un sommet a a un sommet b dans un graphe G est une sequence de sommets $C = u_1, u_2, \ldots, u_k$ telle que $u_1 = a$, $u_k = b$ et $\forall i \in [\![1, k-1]\!], u_i u_{i+1} \in E(G)$.
La longueur du chemin C est $k - 1$, son nombre d'aretes.

<u>Definition</u> (Distance entre deux sommets)
La distance $dist(a, b)$ entre deux sommets a et b est la longueur d'un plus court chemin entre a et b.



$d(a,b) = 4$

II. Distances

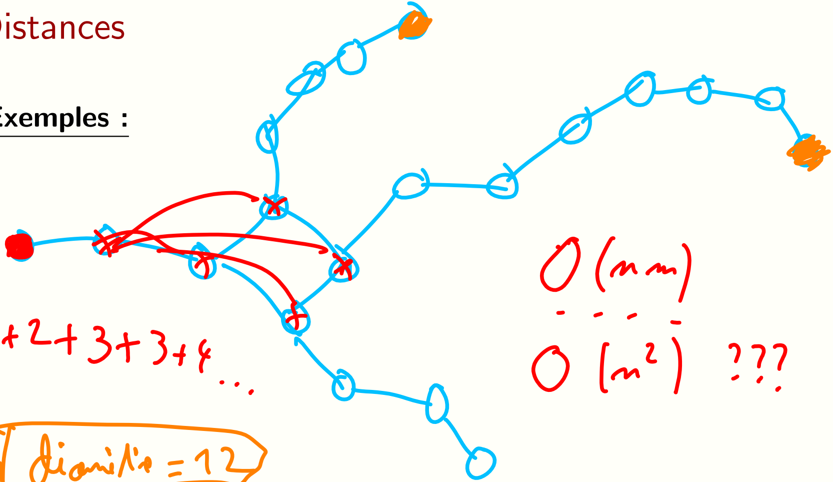
<u>Definition</u> (Chemin)
Un chemin d'un sommet a a un sommet b dans un graphe G est une sequence de sommets $C = u_1, u_2, \ldots, u_k$ telle que $u_1 = a$, $u_k = b$ et $\forall i \in [\![1, k-1]\!], u_i u_{i+1} \in E(G)$.
La longueur du chemin C est $k - 1$, son nombre d'aretes.

<u>Definition</u> (Distance entre deux sommets)
La distance $dist(a, b)$ entre deux sommets a et b est la longueur d'un plus court chemin entre a et b.

<u>Definition</u> (Diametre et distance moyenne)
Le diametre d'un graphe G est la plus grande distance entre deux de ses sommets : $\max\{dist(a, b) \mid a, b \in V(G)\}$.
La distance moyenne dans un graphe G est la moyenne des distances entre toutes ses paires de sommets : $\frac{\sum_{\{a,b\} \subset V(G)} dist(a,b)}{n(n-1)/2}$

II. Distances

Exemples :



$1+2+3+3+4 \ldots$

$O(nm)$

$O(n^2)$???

$\boxed{\text{diamètre} = 12}$

$\boxed{\text{dist. moy.} \sim 3 \text{ ou } 4}$

II. Distances dans les reseaux reels ? ? ?

Reseaux		
Context	**Network**	**n**
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

faible

grande

~2

diamètre

dist. moy

$\leq n-1$

- Distance moyenne
  - Grande ou petite ?
  - Ordre de grandeur ?

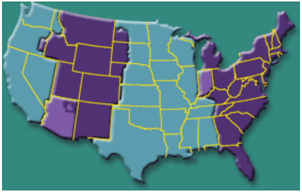
maximum 6

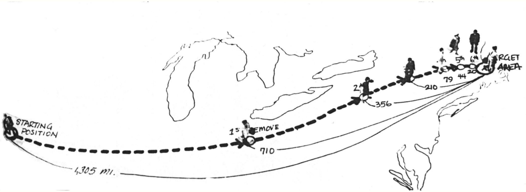
II. Distances dans les reseaux reels ? ? ?

Reseaux		
Context	**Network**	**n**
SPECIES	foodweb	183
CO-OCCUR	bible-names	1707
PROTEIN	figeys	2217
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158
PROTEIN	reactome	5973
SOFTWARE	jung-j	6120
SOFTWARE	jdk	6434
INTERNET	as2000	6474
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363
WORD-REL.	Thesaurus	23132
CITATION-SCI.	cora	23166
INTERNET	as-caida2007	26475
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400
SOFTWARE	linux	30817
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401
INTERNET	topology	34761
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561
WORD-REL.	wordnet	145145
WWW	cnr-2000	227058
CO-AUTHOR	dblp	317080
CO-SOLD	amazon	334863
CITATION-SCI.	citeseer	365154
CO-ACTOR	actor-col.	374511
WWW	eu-2005	835044
SOCIAL	youtube	1134890
WWW	in-2004	1148875
ROAD	roadNet-TX	1351137
INTERNET	as-skitter	1694616
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953
SOCIAL	orkut	3072441
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117
SOCIAL	LiveJournal	3997962

- Distance moyenne
  - Grande ou petite ?
  - Ordre de grandeur ?
- Diametre
  - Grand ou petit ?
  - Comparaison a la distance moyenne ?

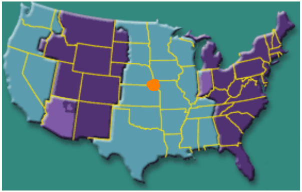
II. Experience de Milgram

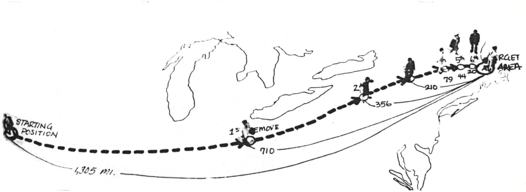




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)

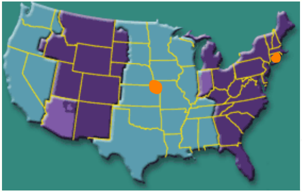
II. Experience de Milgram

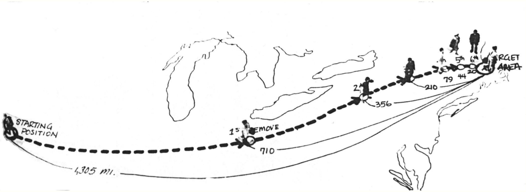




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska

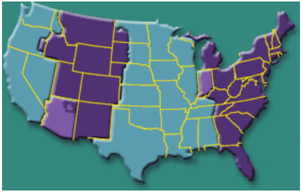
II. Experience de Milgram

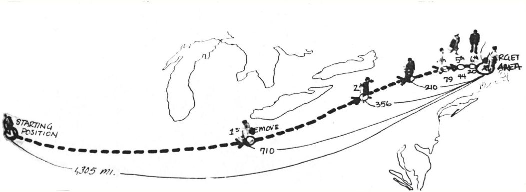




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre a une meme personne a Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse

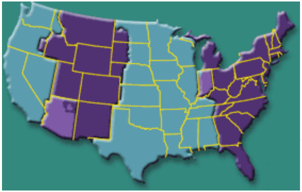
II. Experience de Milgram

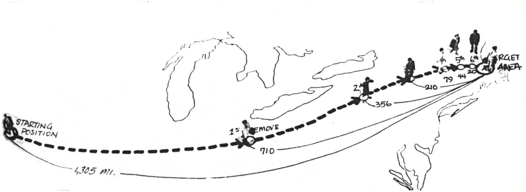




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre a une meme personne a Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les regles suivantes :

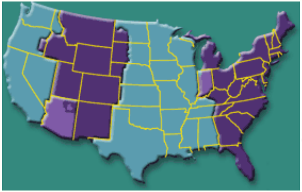
II. Experience de Milgram

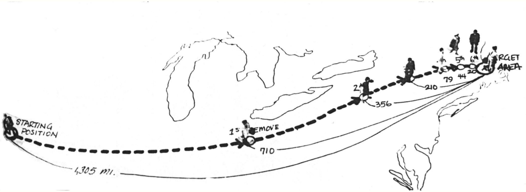




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre a une meme personne a Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les regles suivantes :
  - envoi de la lettre par poste

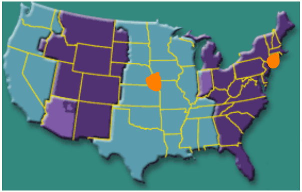
II. Experience de Milgram

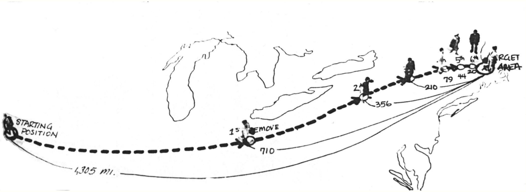




- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre a une meme personne a Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les regles suivantes :
  - envoi de la lettre par poste
  - seulement a quelqu'un qu'ils connaissent personnellement

II. Experience de Milgram





- Aux USA dans les annees 60 (publie en 1967)
- 160 personnes prises au hasard a Omaha, Nebraska
- doivent chacun acheminer une lettre a une meme personne a Boston, Massachusetts, dont ils ne connaissent que le nom et l'adresse
- en respectant les regles suivantes :
  - envoi de la lettre par poste
  - seulement a quelqu'un qu'ils connaissent personnellement
  - avec ces instructions incluses dans la lettre

II. Experience de Milgram

Conclusions de l'experience

II. Experience de Milgram

Conclusions de l'experience

- La plupart des lettres n'arrivent pas ! ! !

II. Experience de Milgram

Conclusions de l'experience

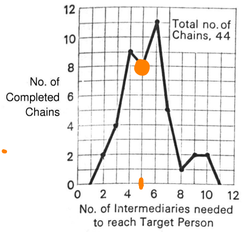
- La plupart des lettres n'arrivent pas ! ! !
  - Seulement 44 sur les 160

II. Experience de Milgram

Conclusions de l'experience

- La plupart des lettres n'arrivent pas ! ! !
  - Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - Median a 5

6 degré de séparation

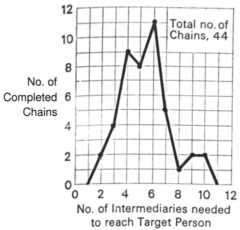


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

II. Experience de Milgram

Conclusions de l'experience

- La plupart des lettres n'arrivent pas ! ! !
  - Seulement 44 sur les 160
- Pour celles qui arrivent :
  - Entre 2 et 10 sauts intermediaires
  - Median a 5



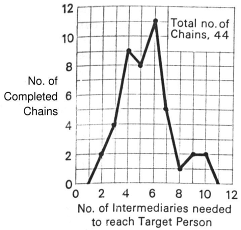
In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

- $\Longrightarrow$ 6 degres de separation

II. Experience de Milgram

Critiques de l'experience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas

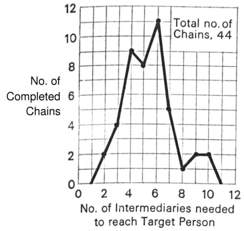


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

II. Experience de Milgram

Critiques de l'experience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande

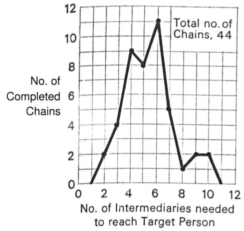


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

II. Experience de Milgram

Critiques de l’experience

- Beaucoup de lettres n’arrivent pas
  - pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire

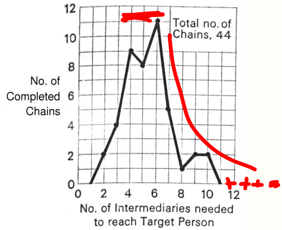


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

II. Experience de Milgram

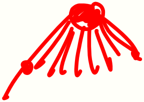
Critiques de l'experience

- Beaucoup de lettres n'arrivent pas
  - pour celles la, la distance est peut-etre (surement) plus grande
- Choix particulier du destinataire
- Departs tous dans le meme etat



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

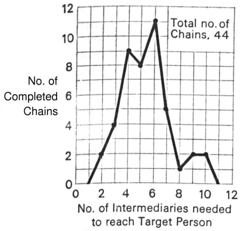
II. Distances dans les reseaux reels ? ? ?



Reseaux				Densite		Distances
Context	**Network**	**n**	**m**	ρ	$\overline{d°}$	**dist. moy.**
SPECIES	foodweb	183	2434	$1{\cdot}10^{-1}$	26.6	2.1
CO-OCCUR	bible-names	1707	9059	$6{\cdot}10^{-3}$	10.6	3.4
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3{\cdot}10^{-3}$	5.8	3.8
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2{\cdot}10^{-3}$	6.5	6.0
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8{\cdot}10^{-3}$	48.8	4.2
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3{\cdot}10^{-3}$	16.4	2.1
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3{\cdot}10^{-3}$	16.7	2.1
INTERNET	as2000	6474	12572	$6{\cdot}10^{-4}$	3.9	3.7
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7{\cdot}10^{-4}$	5.7	6.0
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2{\cdot}10^{-3}$	21	4.7
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1{\cdot}10^{-3}$	22	4.2
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4{\cdot}10^{-4}$	8.6	5.3
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1{\cdot}10^{-3}$	25.7	3.5
CITATION-SCI.	cora	23166	89157	$3{\cdot}10^{-4}$	7.7	5.9
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2{\cdot}10^{-4}$	4.0	3.9
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400	352021	$9{\cdot}10^{-4}$	25.7	4.3
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4{\cdot}10^{-4}$	13.8	3.2
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401	420784	$7{\cdot}10^{-4}$	24.5	4.3
INTERNET	topology	34761	107720	$2{\cdot}10^{-4}$	6.2	3.8
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8{\cdot}10^{-5}$	4.7	5.9
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6{\cdot}10^{-5}$	9.0	5.5
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8{\cdot}10^{-5}$	19.3	9.3
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2{\cdot}10^{-5}$	6.6	6.8
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2{\cdot}10^{-5}$	5.5	11.9
CITATION-SCI.	citeseer	365154	1721981	$3{\cdot}10^{-5}$	9.4	6.5
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2{\cdot}10^{-4}$	80.2	3.7
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5{\cdot}10^{-5}$	37.6	4.6
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5{\cdot}10^{-6}$	5.3	5.3
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2{\cdot}10^{-5}$	21.4	8.8
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2{\cdot}10^{-6}$	2.8	415.7
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8{\cdot}10^{-6}$	13.1	5.1
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2{\cdot}10^{-6}$	3.9	3.9
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2{\cdot}10^{-5}$	76.3	4.2
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2{\cdot}10^{-6}$	8.8	8.2
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4{\cdot}10^{-6}$	17.4	5.6

distance moyenne très faible pour tous les réseaux

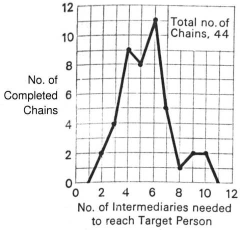
II. Retour sur Milgram



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

Autres enseignements de Milgram

II. Retour sur Milgram

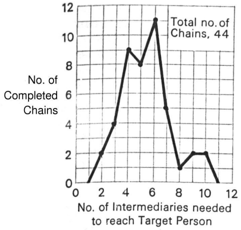


In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent ! ! !
  - Malgre le manque d'information.

II. Retour sur Milgram



In the Nebraska Study the chains varied from two to 10 intermediate acquaintances with the median at five.

Autres enseignements de Milgram

- Plus de 27% des lettres arrivent ! ! !
  - Malgre le manque d'information.
- Les chemins sont trouvables
  - Graphes navigables [Kleinberg 2000 et suites]

Recapitulatif (jusqu'a present)

Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

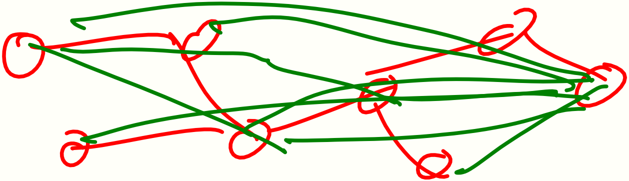
Recapitulatif (jusqu'a present)

Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles

Question ???

Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?



Recapitulatif (jusqu'a present)

Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !

Question ???

Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?

Recapitulatif (jusqu'a present)

Les reseaux complexes ont :

- Peu d'aretes
- Des distances faibles
- C'est antinomique !
- Mais tres bien compris du point de vue mathematique

$\Longrightarrow$ c'est une propriete de l'aleatoire

Question ???

Pour qu'un graphe ait des distances courtes, vaut-il mieux qu'il ait peu ou beaucoup d'aretes ?

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes
    - une distance moyenne l

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes
    - une distance moyenne l
  - ex : $\underbrace{n = 1000,\ m = 3623,\ l = 4.68}$

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes
    - une distance moyenne l
  - ex : $n = 1000$, $m = 3623$, $l = 4.68$

- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile !)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

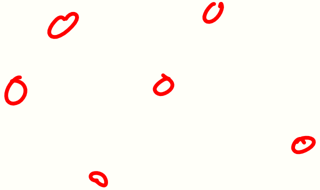
- Rappel sur ce qu'on appelle un modele (ici)
  - Un procede aleatoire qui genere un graphe
  - Avec des proprietes prescrites
  - Tire uniformement aleatoirement parmi les graphes ayant ces proprietes

- Ce qu'on voudrait faire (a ce stade)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes
    - une distance moyenne l
  - ex : $n = 1000$, $m = 3623$, $l = 4.68$

- Ce qu'on va faire (parce que c'est plus facile !)
  - Tirer uniformement aleatoirement un graphe parmi ceux ayant
    - n sommets
    - m aretes
  - Verifier a posteriori que sa distance moyenne est faible.

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

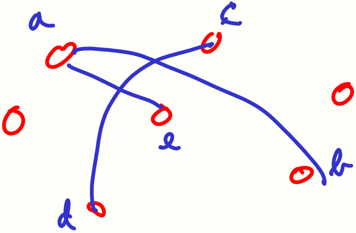
- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes



n sommets

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles



n sommets

m arêtes.

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

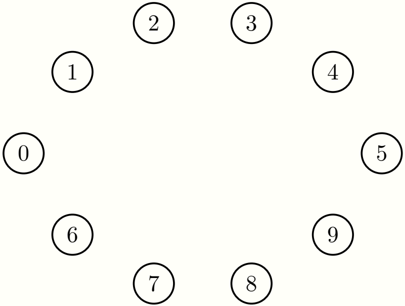
- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$

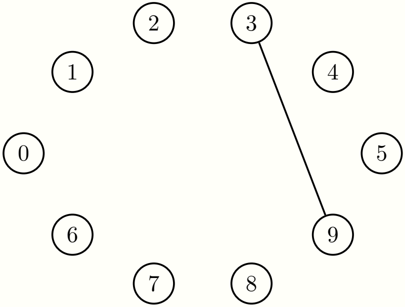
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



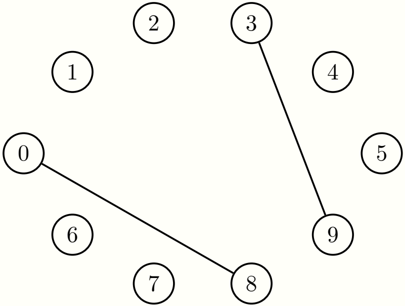
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



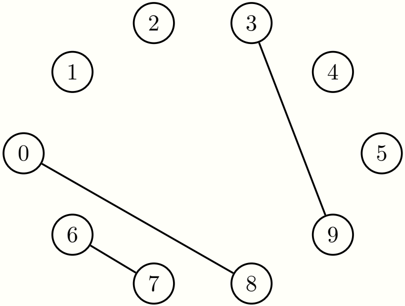
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



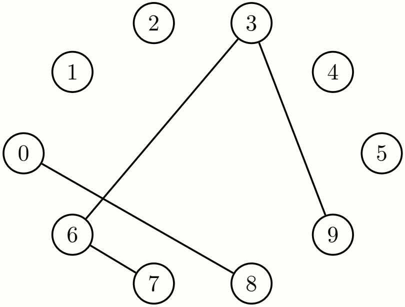
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



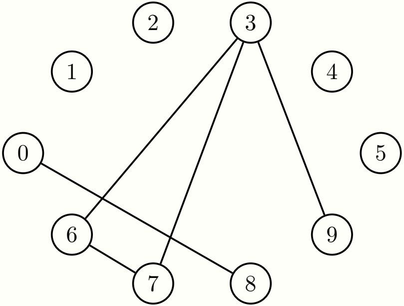
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



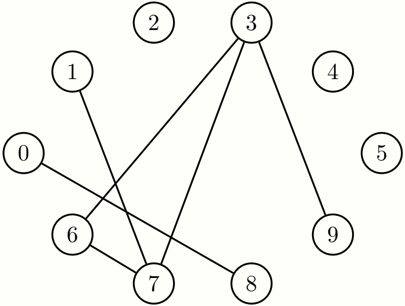
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



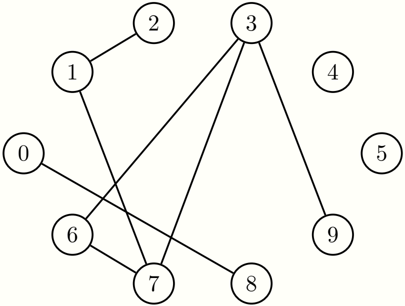
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



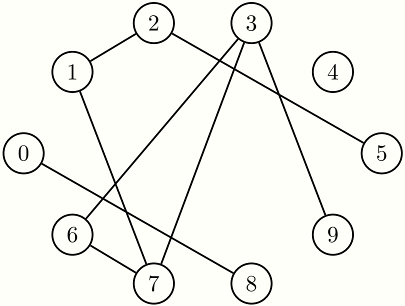
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



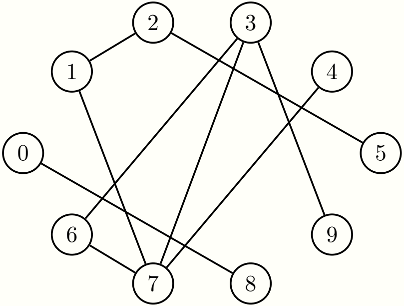
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



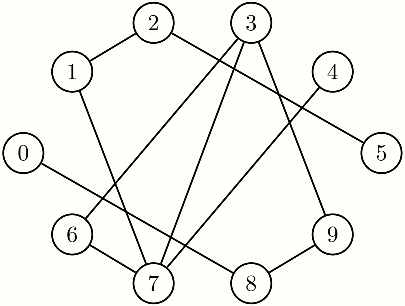
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)
- Ex : $n = 10$, $m = 10$



Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

Question ???

Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele $G_{n,m}$?

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,m}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - On tire m aretes unif. alea. parmi les $\frac{n(n-1)}{2}$ possibles
    - Concretement : tirees une par une sans remise (unif.)

???

$$P = \frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}} = \text{densité.}$$

Question ???

Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele $G_{n,m}$? oui, le tirage d'un couple est uniforme.

Question ???

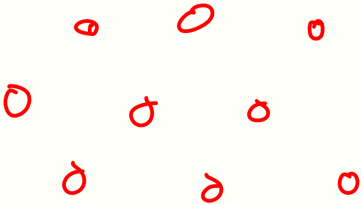
Pour un couple $u, v \in V$, quelle est la proba que uv soit une arete dans $G_{n,m}$? P la densité

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$

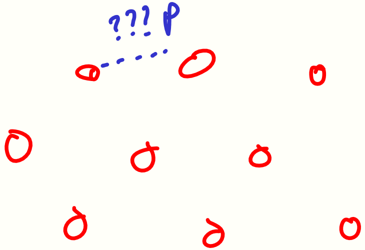
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes



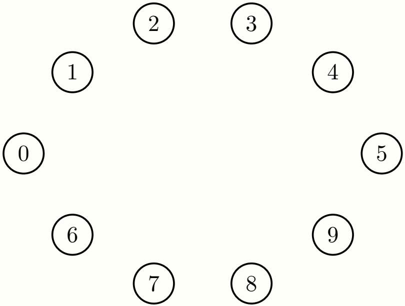
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)



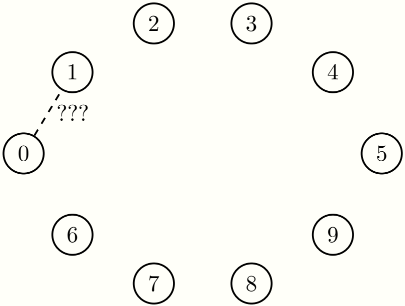
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



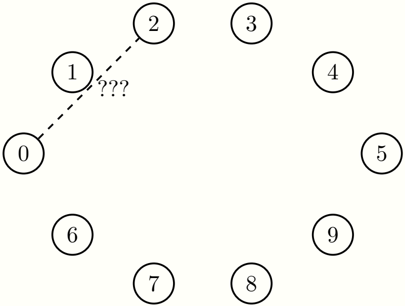
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



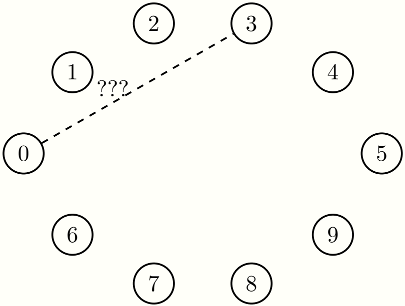
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



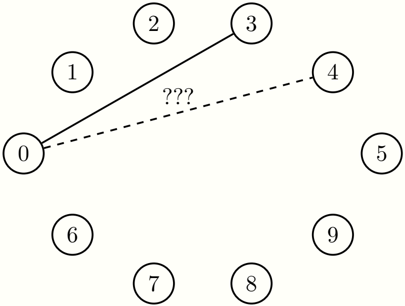
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



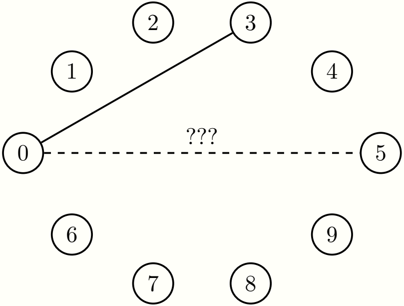
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



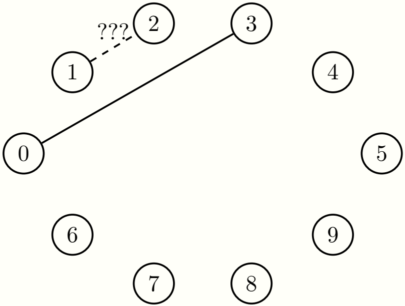
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



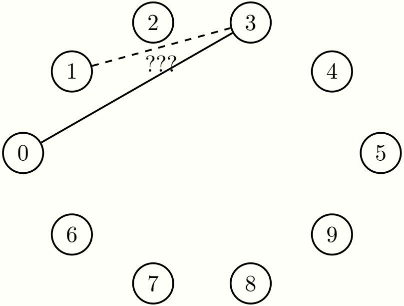
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



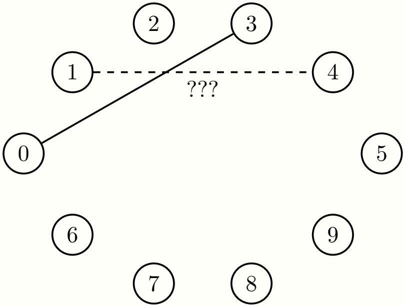
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



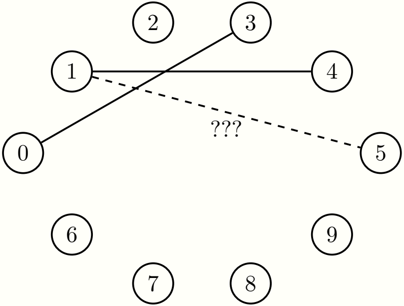
Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1-p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)
- Ex : $n = 10$, $p = 0.2$



Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)

Question ???

Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele $G_{n,p}$?

Un premier modele : graphes d'Erdös-Rényi

- Le modele $G_{n,p}$
  - On part d'un graphe a n sommets et sans aretes
  - Pour chaque paire u, v de sommets, on met une arete avec proba p
    (et on n'en met pas avec proba $1 - p$)

Question ???

Tous les couples de sommets du graphe ont-il la meme proba de recevoir une arete dans le modele $G_{n,p}$?

Oui, avec proba p

Question ???

Quel est l'esperance du nombre d'aretes dans le modele $G_{n,p}$?

$$m = \frac{n(n-1)}{2} \times p$$

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

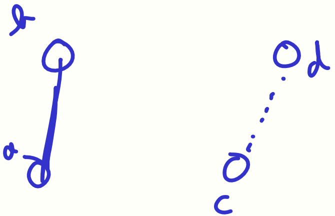
Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes

$$p = \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2}}$$

n, m



$$p = \frac{1}{\frac{n(n-1)}{2} - \ldots}$$

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - $G_{n,p}$:
  - $G_{n,m}$:

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - $G_{n,p}$: $O(n^2)$ (pour tout couple)
  - $G_{n,m}$:

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - $G_{n,p}$: $O(n^2)$ (pour tout couple)
  - $G_{n,m}$: $O(m)$ (tirer m couples)

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - $G_{n,p}$: $O(n^2)$ (pour tout couple)
  - $G_{n,m}$: $O(m)$ (tirer m couples)

En resume :

- $G_{n,p}$ est bon pour les calculs
  - Independance des aretes

Comparaison $G_{n,m}$ / $G_{n,p}$

- Avec $p = \frac{2m}{n(n-1)}$, les deux modeles sont "equivalents"

Question ???

Sont ils strictements identiques ?

- Dans $G_{n,p}$
  - Les aretes sont **independantes**
  - Mais il n'y a pas exactement m aretes
- Dans $G_{n,m}$
  - Il y a **exactement** m aretes
  - Mais elles ne sont pas independantes
- Complexite du procede de tirage aleatoire
  - $G_{n,p}$: $O(n^2)$ (pour tout couple)
  - $G_{n,m}$: $O(m)$ (tirer m couples)

<u>En resume :</u>

  - $G_{n,p}$ est bon pour les calculs
    - Independance des aretes
  - $G_{n,m}$ est bon pour la generation
    - Bonne complexite
    - Nombre exact d'aretes

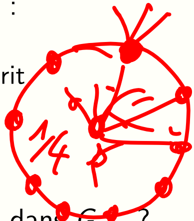
$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles

$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

$$\frac{(\langle k\rangle-1)^t}{2-\langle k\rangle} \sim n$$

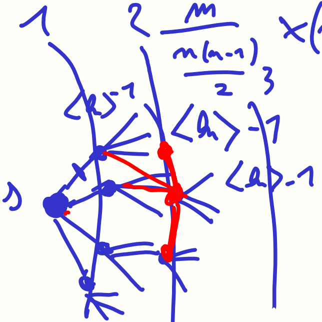
- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles



$$\frac{1-(\langle k\rangle-1)^t}{1-(\langle k\rangle-1)} \sim \frac{(\langle k\rangle-1)^t}{\langle k\rangle}$$

- Question : distances dans $G_{n,m}$?

$$\frac{m}{\frac{n(n-1)}{2}} \times (n-1) = \frac{2m}{n} = d^0_{moy} \text{ dans } G_{n,m} = \langle k\rangle$$



$$(\langle k\rangle-1)^d$$

$$\sum_{d=1}^{t} (\langle k\rangle-1)^d$$

$$\frac{(\langle k\rangle-1)^t}{\langle k\rangle-2} = n$$

$$t\log(\langle k\rangle-1) - \log(\langle k\rangle-2) = \log n$$

$$t = \frac{\log n + \log(\langle k\rangle-2)}{\log(\langle k\rangle-1)}$$

$$t = \frac{\log n}{\log(\langle k\rangle-1)} + \text{cte}$$

Distances dans $G_{n,m}$?

Reseaux				Densite		Dist. moy.	
Context	**Network**	**n**	**m**	ρ	$\overline{\mathbf{d}^\circ}$	**Reel**	$G_{n,m}$
SPECIES	foodweb	183	2434	$1{\cdot}10^{-1}$	26.6	2.1	1.9
CO-OCCUR	bible-names	1707	9059	$6{\cdot}10^{-3}$	10.6	3.4	3.4
PROTEIN	figeys	2217	6418	$3{\cdot}10^{-3}$	5.8	3.8	4.1
CO-AUTHOR	ca-GrQc	4158	13422	$2{\cdot}10^{-3}$	6.5	6.0	5.7
PROTEIN	reactome	5973	145778	$8{\cdot}10^{-3}$	48.8	4.2	3.0
SOFTWARE	jung-j	6120	50290	$3{\cdot}10^{-3}$	16.4	2.1	2.1
SOFTWARE	jdk	6434	53658	$3{\cdot}10^{-3}$	16.7	2.1	2.1
INTERNET	as2000	6474	12572	$6{\cdot}10^{-4}$	3.9	3.7	4.7
CO-AUTHOR	ca-HepTh	8638	24806	$7{\cdot}10^{-4}$	5.7	6.0	5.7
CO-AUTHOR	ca-HepPh	11204	117619	$2{\cdot}10^{-3}$	21	4.7	3.9
CO-AUTHOR	ca-AstroPh	17903	196972	$1{\cdot}10^{-3}$	22	4.2	3.6
CO-AUTHOR	ca-CondMat	21363	91286	$4{\cdot}10^{-4}$	8.6	5.3	5.1
WORD-REL.	Thesaurus	23132	297094	$1{\cdot}10^{-3}$	25.7	3.5	3.4
CITATION-SCI.	cora	23166	89157	$3{\cdot}10^{-4}$	7.7	5.9	5.1
INTERNET	as-caida2007	26475	53381	$2{\cdot}10^{-4}$	4.0	3.9	5.3
CITATION-SCI.	cit-HepTh	27400	352021	$9{\cdot}10^{-4}$	25.7	4.3	3.5
SOFTWARE	linux	30817	213208	$4{\cdot}10^{-4}$	13.8	3.2	3.4
CITATION-SCI.	cit-HepPh	34401	420784	$7{\cdot}10^{-4}$	24.5	4.3	3.6
INTERNET	topology	34761	107720	$2{\cdot}10^{-4}$	6.2	3.8	4.8
P2P-CONNECT.	p2p-Gnutella	62561	147878	$8{\cdot}10^{-5}$	4.7	5.9	7.2
WORD-REL.	wordnet	145145	656230	$6{\cdot}10^{-5}$	9.0	5.5	5.6
WWW	cnr-2000	227058	2187201	$8{\cdot}10^{-5}$	19.3	9.3	4.7
CO-AUTHOR	dblp	317080	1049866	$2{\cdot}10^{-5}$	6.6	6.8	7.4
CO-SOLD	amazon	334863	925872	$2{\cdot}10^{-5}$	5.5	11.9	8.1
CITATION-SCI.	citeseer	365154	1721981	$3{\cdot}10^{-5}$	9.4	6.5	5.7
CO-ACTOR	actor-col.	374511	15014839	$2{\cdot}10^{-4}$	80.2	3.7	3.3
WWW	eu-2005	835044	15718784	$5{\cdot}10^{-5}$	37.6	4.6	3.7
SOCIAL	youtube	1134890	2987624	$5{\cdot}10^{-6}$	5.3	5.3	6.6
WWW	in-2004	1148875	12281937	$2{\cdot}10^{-5}$	21.4	8.8	5.3
ROAD	roadNet-TX	1351137	1879201	$2{\cdot}10^{-6}$	2.8	415.7	16.3
INTERNET	as-skitter	1694616	11094209	$8{\cdot}10^{-6}$	13.1	5.1	5
COMMUNIC.	wiki-Talk	2388953	4656682	$2{\cdot}10^{-6}$	3.9	3.9	5.6
SOCIAL	orkut	3072441	117185083	$2{\cdot}10^{-5}$	76.3	4.2	3.9
CITATION-PAT.	cit-Patents	3764117	16511740	$2{\cdot}10^{-6}$	8.8	8.2	7.2
SOCIAL	LiveJournal	3997962	34681189	$4{\cdot}10^{-6}$	17.4	5.6	5.7

$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles
- Question : distances dans $G_{n,m}$?
  - Distance moyenne courte : OK

$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles
- Question : distances dans $G_{n,m}$?
  - Distance moyenne courte : OK
  - Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles
- Question : distances dans $G_{n,m}$?
  - Distance moyenne courte : OK
  - Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

Conclusion

- $G_{n,m}$ est un tres bon modele

$G_{n,m}$ est-il un bon modele ?

- Rappel de notre but :
  - nb d'aretes prescrit
  - distances faibles
- Question : distances dans $G_{n,m}$?
  - Distance moyenne courte : OK
  - Et meme proche de celle dans le reseau original : bonus !

<u>Conclusion</u>

- $G_{n,m}$ est un tres bon modele
- Jusqu'a maintenant...