Rapport aux machines de Turing (MdT), il est un fait puissant et non trivial sur lequel nous allons nous pencher : une MdT utilisant un ruban infini dans les deux sens reconnaît le même langage qu'une MdT sur ruban infini à droite uniquement.

De manière schématique on a :
M, une Machine de Turing de ruban infini des deux côtés et qui accepte un langage L :

...	#	#	w1	w2	w3	#	#	...

↑

On veut construire, à partir de M, une autre machine de Turing notée M' qui accepte aussi le langage L, cette fois-ci avec un ruban infini à droite uniquement :

w1	w2	w3	#	#	...

↑

Idée 1 :
Une première méthode pourrait être "d'agrandir" le ruban de M' vers la droite (ce qui est envisageable puisque ledit ruban est infini à droite) et d'intercaler ce qui est à gauche de w1 dans le ruban lié à M avec ce qui est déjà placé sur le ruban lié à M'.
On aurait donc un ruban :

(où les cases rouges correspondent à celle du ruban de M', et les cases vertes correspondent à celles qui étaient à gauche de w1 dans le ruban associé à M). On intercale les cases vertes aux cases rouges déjà existantes.

Idée 2 :
On pose M et M' comme ci-dessus et on garde le même code couleur. L'idée cette fois-ci revient à "replier" le ruban sur lui-même et à travailler avec des couples. Représentons cette situation par un schéma :

w1	w2	w3	#	#	#	...
$	a1	a2	a3	#	#	...

En se penchant sur les cases en jaune (qui marchent donc ensemble), on voit qu'on peut modéliser cette nouvelle machine de Turing avec :

- $Q' = Q \times \{U, D\} \cup \{q'_0\} \cup \{q\sim \mid q \in Q\}$
- $\Sigma' = \Sigma \times \{\#\}$
- $\#' = (\#, \#)$
- $\Gamma' = \Gamma \times (\Gamma \cup \{\$\})$
- q'_0 : état initial
- $F' = F \cup \{U, D\}$ *on utilise U pour up (on lit en haut), D pour down (on lit en bas)*
- Et les transitions :

$T_R^{init} = \{ (q'_0, (x,\#), (q,U), (y,\$), R) \mid (q0,x,q,y,R) \in \delta \}$

$T_L^{init} = \{ (q'_0, (x,\#), (q,D), (y,\$), R) \mid (q0,x,q,y,L) \in \delta \}$

$T_{uu} = \{ \; ((q,U), (x,t), (q_{suiv}, U), (y,t), a) \mid t \in \Gamma$ et $(q,x,q_{suiv},y,a) \in \delta \}$ *on a* $t \neq \$$

$T_{DD} = \{ \; ((q,D), (t,x), (q_{suiv}, D), (t,y), \bar{a}) \mid t \in \Gamma$ et $(q,x,q_{suiv},y,a) \in \delta \}$ *on a* t *et* $x \neq \$$

$\bar{a}$ *tel que* $\{a, \bar{a}\} = \{L, R\}$

$T_{UD}^{\$} = \{ \; ((q,U), (x,\$), (q_{suiv}, D), (y,\$), R) \mid (q,x,q_{suiv},y,L) \in \delta \}$

$T_{U}^{\$} = \{ \; ((q,U), (x,\$), (q_{suiv}, U), (y,\$), R) \mid (q,x,q_{suiv},y,R) \in \delta \}$

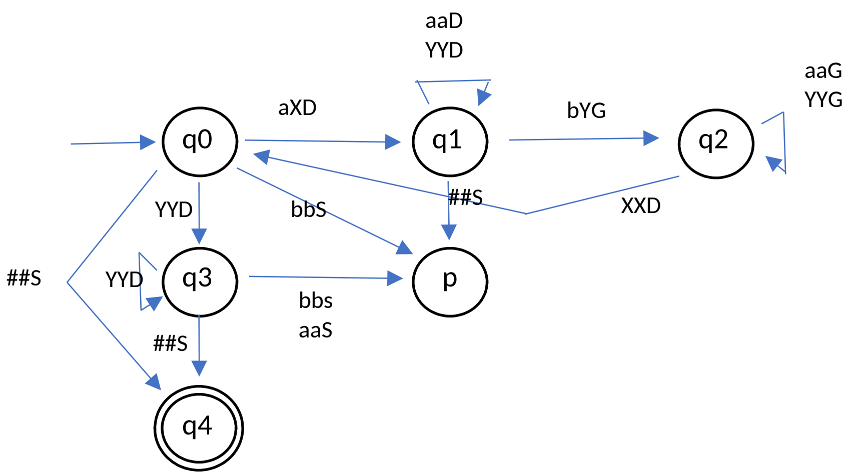
$T_{D}^{\$} = \{ \; ((q,D), (x,\$), q\sim, (x,\$), R) \mid q \in Q, \; x \in \Gamma \}$

$T\sim = \{ (q\sim, (x,y), (q,U), (x,y), L) \mid q \in Q, \; x \in \Gamma, \; y \in \Gamma \}$

Commentaires/Explications :

La transition T_{UU} correspond au cas où on a attention en haut et on n'a pas le $ en bas.
La transition T_{DD} correspond au cas où on a attention en bas et on n'a pas le $
La transition $T_{UD}^{\$}$ correspond au cas où on est dans la première case, on a attention en haut et on veut aller à gauche
La transition $T_{U}^{\$}$ correspond au cas où on a attention en haut, on est dans première case et on veut aller à droite
La transition $T_{D}^{\$}$ correspond au cas où on a attention en bas et on a le $ (un seul cas)
Remarque : les transitions $T_D^{\$}$ et T~ marchent ensemble, on se décale à droite puis à gauche car on ne s'autorise pas à rester sur place. C'est mieux de d'abord bouger à droite puisqu'on a ruban infini à droite.

Exercice : Ecrire une machine de Turing qui décide le langage $L = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$
Remarque : ε, ab, aabb, aaabbb … ∈ L   mais   aba, aaaabb… ∉ L



avec : q0 = on attend un a
q1 = on attend un b
q2 = on attend un x en allant vers G
q3 = on attend un # en allant vers D
q4 = mot accepté
p = mot non-accepté