

Inscrivez **lisiblement** vos NOM et Prénom en tête de vos copies.

---

Tout équipement de calcul, programmation, communication est interdit. Lire d'abord la totalité de l'énoncé, et commencer par ce qui vous semble le plus facile. Si besoin, on pourra supposer certaines questions résolues.

Le barème est sur 23 points. La note obtenue sur 23 sera la note finale sur 20.

---

**Exercice 1 : (Résoudre les équations suivantes avec conditions initiales [5 pts])**

En l'absence d'intuition d'une solution particulière, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

1. [2 pts]  $y' + 2xy = 2x$  avec  $y(0) = 2$
2. [3 pts]  $y'' - 3y' + 2y = e^x$  avec  $y(0) = 0$  et  $y'(0) = 1$

**Exercice 2 : (Equation différentielle nécessitant un changement de variable [8 pts])**

On se propose d'intégrer sur l'intervalle le plus grand possible contenu dans  $]0, +\infty[$  l'équation différentielle :

$$(E) \quad y'(x) - \frac{y(x)}{x} - y(x)^2 = -9x^2$$

1. [1 pts] Déterminer  $a \in ]0, +\infty[$  tel que  $y(x) = ax$  soit une solution particulière  $y_0$  de (E).
2. [2 pts] Montrer que le changement de fonction inconnue :  $y(x) = y_0(x) - \frac{1}{z(x)}$  transforme l'équation (E) en l'équation différentielle

$$(E_1) \quad z'(x) + \left(6x + \frac{1}{x}\right)z(x) = 1$$

3. [2 pts] Intégrer l'équation sans second membre associée à  $(E_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .
4. [2 pts] Par la variation de la constante, intégrez  $(E_1)$  sur  $]0, +\infty[$ .
5. [1 pts] Donner toutes les solutions de (E) définies sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 3 : (Résoudre le système dynamique linéaire suivant dans  $\mathbb{R}^2$  [10 pts])**

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y \\ \frac{dy}{dt} = 2x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \frac{dX}{dt} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. [1 pts] Ecrire le polynôme caractéristique associé à la matrice  $A$ .
2. [1 pts] Calculer les valeurs propres.
3. [1 pts] En déduire la nature qualitative du portrait de phase.
4. [2 pts] Calculez les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
5. [1 pts] En déduire une matrice de passage permettant de réécrire le système dans une base où il s'exprime plus facilement.
6. [2 pts] Exprimer le système différentiel dans cette nouvelle base et le résoudre.
7. [2 pts] Donner les expressions analytiques des solutions dans la base initiale.