EPU GB 3ème année *Outils Mathématiques pour la Biologie*

Examen du 5 janvier 2017

Un formulaire manuscript recto-verso autorisé.

Feuille “typologie des solutions des systèmes linéaires planaires” autorisée.

Inscrivez ***lisiblement*** *vos* NOM *et Prénom en tête de vos copies.*

Tout équipement de calcul, programmation, communication est interdit. Lire d'abord la totalité de l'énoncé, et commencer par ce qui vous semble le plus facile. Si besoin, on pourra supposer certaines questions résolues.

Le barème est sur 22 points. La note obtenue sur 22 sera la note finale sur 20.

Exercice 1 : (**Résoudre les équations suivantes avec conditions initiales [5 pts]**)
En l'absence d'intuition d'une solution particulière, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

1. [2 pts] $y' + 2xy = 2x$ avec $y(0) = 2$
2. [3 pts] $y'' - 3y' + 2y = e^x$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$

Exercice 2 : (**Equation différentielle nécessitant un changement de variable [9 pts]**)
Considérons une population de punaises d'eau vivant en une colonie en forme de disque. On suppose que le taux de croissance naturelle est égal à un réel, mais que les punaises vivant à la périphérie ont un taux de mortalité supplémentaire (dû par exemple au froid). Si $y(t)$ est la population à l'instant, l'effectif de celles vivant à la périphérie est proportionnel à $\sqrt{y(t)}$. Cela nous conduit à une équation différentielle du type

$$y' = ay - b\sqrt{y} \tag{1}$$

1. [1 pt] Chercher toutes les solutions constantes.
2. [2 pts] En posant $z(t) = \sqrt{y(t)}$, écrire l'équation différentielle que doit vérifier z (*on supposera que z est strictement positive* $[0, +\infty[$).
3. [2 pts] Résoudre l'équation obtenue.
4. [1 pt] Lorsque la constante d'intégration de la solution générale de la question 3 est positive (la solution z est alors forcément positive), déduire l'expression de $y(t)$.
5. [1 pt] Lorsque la constante d'intégration de la solution générale de la question 3 est négative, étudiez le signe de z et en déduire une solution de l'équation initiale sur un intervalle borné qui correspond à l'intervalle où z est positive.
6. [2 pts] Donner les conditions sur la population initiale $y(0)$ pour que
   — [1 pt] la population ne s'arrête pas de croître,
   — [$\frac{1}{2}$ pt] la population s'éteigne au bout d'un temps fini,
   — [$\frac{1}{2}$ pt] la population reste constante.

Exercice 3 : (**Résoudre le système dynamique linéaire suivant dans $\mathbb{R}^2$ [8 pts]**)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} &= x + 5y \\ \frac{dy}{dt} &= 2x - 2y \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. [1 pt] Ecrire le polynôme caractéristique associé à la matrice A.
2. [1 pt] Calculer les valeurs propres de la matrice A.
3. [1 pt] En déduire la nature qualitative du portrait de phase.
4. [2 pts] Calculez les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
5. [1 pt] En déduire une matrice de passage permettant de réécrire le système dans une base où il s'exprime plus facilement.
6. [1 pt] Exprimer le système différentiel dans cette nouvelle base et le résoudre.
7. [1 pt] Donner les expressions analytiques des solutions dans la base initiale.