EPU GB 3ème année | Documents autorisés. | *Outils Mathématiques pour la Biologie*

Examen du 9 janvier 2018

Inscrivez ***lisiblement*** *vos* NOM *et Prénom en tête de vos copies.*

Tout équipement de calcul, programmation, communication est interdit. Lire d'abord la totalité de l'énoncé, et commencer par ce qui vous semble le plus facile. Si besoin, on pourra supposer certaines questions résolues.

Le barème est sur 20,5 points.

Exercice 1 : Résoudre les équations suivantes avec conditions initiales [5 pts]

En l'absence d'intuition d'une solution particulière, on pourra utiliser la méthode de la variation de la constante.

1. [2 pts] $y' + 2xy = 2x \quad \text{avec} \quad y(0) = 2$
2. [3 pts] $y'' - 3y' + 2y = e^x \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \quad \text{et} \quad y'(0) = 1$
   On pourra chercher une solution particulière sous la forme $(ax + b)e^x$.

Exercice 2 : Modèle de pêche à effort constant [7,5 pts]

Dans cet exercice, on considère un effort de pêche $E > 0$ constant, c'est-à-dire que la quantité d'individus prélevés par unité de temps est proportionnelle à la taille de la population : $E \times N(t)$ où E est une constante, et $N(t)$ est la population de poissons au temps t. On considère alors l'équation différentielle :

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{K}\right) - EN(t)$$

1. [1 pt] Ecrire l'équation qui permet de rechercher les points d'équilibre. La résoudre. Interprétez vos résultats, décrivez chacun des états d'équilibre, et donnez les conditions sous lesquelles ces états d'équilibre ont du sens.
2. [1 pt] Notons $Y(E) = EN$ la capture par unité de temps.
   Exprimez $Y_{eq}(E)$ à l'état d'équilibre N^* trouvé à la question précédente.
   En déduire une expression de $Y_{eq}(E)$ en fonction de E, r et K.
3. [1 pt] Optimum de l'effort de pêche. Dans le cas où $r > E$, on peut se poser la question d'un optimum de l'effort de pêche permettant d'obtenir le prélèvement le plus élevé possible tout en assurant le maintien de la population. En étudiant l'expression de $Y_{eq}(E)$ trouvée à la question précédente, recherchez E_{opt} tel que la capture au point d'équilibre $Y_{eq}(E)$ soit maximale. En déduire la capture maximale par unité de temps.
4. [4,5 pts] Résoudre l'équation différentielle lorsque l'effort de pêche constant est choisi comme étant optimal au point d'équilibre.
   (a) [1 pt] Montrez qu'il s'agit d'une équation différentiable à variables séparées. Trouvez les solutions singulières.
   (b) [$\frac{1}{2}$ pt] Pour trouver les solutions régulières, écrivez l'équation sous la forme $\frac{dy}{ry(a-\frac{y}{b})} = dt$
   (c) [1 pt] Décomposez la fraction $\frac{1}{ry(a-\frac{y}{b})}$ en éléments simples : $\frac{1}{ry(a-\frac{y}{b})} = \frac{A}{ry} + \frac{B}{a-\frac{y}{b}}$
   (d) [2 pts] Résoudre l'équation différentielle.

Exercice 3 : Résolution du système dynamique linéaire suivant dans $\mathbb{R}^2$ [8 pts]

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \frac{dx}{dt} & = & x & + & 2y \\ \frac{dy}{dt} & = & 5x & - & 2y \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dX}{dt} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

1. [1 pt] Ecrire le polynôme caractéristique associé à la matrice A.
2. [1 pt] Calculer les valeurs propres de la matrice A.
3. [1 pt] En déduire la nature qualitative du portrait de phase.
4. [2 pts] Calculez les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
5. [1 pt] En déduire une matrice de passage permettant de réécrire le système dans une base où il s'exprime plus facilement.
6. [1 pt] Exprimer le système différentiel dans cette nouvelle base et le résoudre.
7. [1 pt] Donner les expressions analytiques des solutions dans la base initiale.