EPU GB 3ème année — Documents autorisés. — *Outils Mathématiques pour la Biologie*

Examen du 10 janvier 2019

Inscrivez ***lisiblement*** *vos* NOM *et Prénom en tête de vos copies.*

Tout équipement de calcul, programmation, communication est interdit. Lire d'abord la totalité de l'énoncé, et commencer par ce qui vous semble le plus facile. Si besoin, on pourra supposer certaines questions résolues.

Le barème est sur 21 points.

Indication : on peut réécrire une fraction de la forme $\frac{1}{(ax+b)(cx+d)}$ en somme de deux fractions $\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d}$. Pour trouver les constantes A et B, on écrit la somme des deux fractions sur le même dénominateur : $\frac{A}{ax+b} + \frac{B}{cx+d} = \frac{A(cx+d)+B(ax+b)}{(ax+b)(cx+d)}$ et on cherche A et B pour que le numérateur $A(cx+d)+B(ax+b)$ soit égal à 1 : $\left\{\begin{array}{lcl} Ac + Ba & = & 0 \\ Ad + Bb & = & 1 \end{array}\right.$

Exercice 1 : Résoudre l'équation suivante avec conditions initiales [3 pts]

$$y'' - 4y' + 3y = e^x \qquad \text{avec} \qquad y(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad y'(0) = 1$$

On pourra chercher une solution particulière sous la forme $(ax+b)e^x$.

Exercice 2 : Modèles de pêche [12 pts]

On considère deux modèles de pêche pour une population de poissons qui est soumise à une compétition intra-spécifique proportionnelle au taux de rencontre. Cette population est mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$. On suppose que la population initiale est $n(0) = 0.2$.

1. [3.5 pts] Pêche tenant compte de la population : $\quad n'(t) = n(t)(1 - n(t)) - \alpha n(t) \quad$ où $\alpha \in [0, 1]$.
   (a) Expliquez les différents termes de l'équation.
   (b) Déterminez les points d'équilibre.
   (c) Résolvez l'équation différentielle avec condition initiale.
   (d) En déduire le comportement de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.
2. [5 pts] Pêche avec quota : $\quad n'(t) = n(t)(1 - n(t)) - \alpha$.
   (a) Expliquez les différents termes de l'équation.
   (b) Etudiez le nombre de points d'équilibre en fonction de α.

   Pour la suite on supposera que $\alpha < \frac{1}{4}$ et on notera β le plus petit des équilibres. On pose alors $p(t) = n(t) - \beta$.

   (c) Montrer que $\left\{\begin{array}{lcl} p(0) & = & 0.2 - \beta \\ p'(t) & = & p(t)(1 - 2\beta - p(t)) \end{array}\right.$.
   (d) Résolvez l'équation différentielle en p.
   (e) En déduire le comportement de $p(t)$ quand $t \to +\infty$ ainsi que celui de $n(t)$ quand $t \to +\infty$.
3. [3.5 pts] On considère maintenant une population (mesurée par $n(t)$ pour $t \geq 0$) soumise à une compétition intra-spécifique qui varie avec le temps : $\quad n'(t) = n(t)[1 - [2 + cos(t)]n(t)]$.
   On suppose que la population initiale est $n(0) = \frac{1}{2}$. Dans le modèle « standard » (obtenu en enlevant $cos(t)$), la solution est la fonction constante $n(t) = \frac{1}{2}$. Ici la situation va être différente...
   (a) Expliquez les différents termes de l'équation.
   (b) On pose $p(t) = 1/n(t)$. Montrez que p satisfait l'équation différentielle $p'(t) = -p(t) + 2 + cos(t)$.
   (c) Résolvez-la. *On vérifiera que la fonction* $f(t) = 2 + \frac{1}{2}(cos(t) + sin(t))$ *est une solution particulière.*
   (d) En déduire $n(t)$. Que se passe-t-il quand $t \to +\infty$?

Exercice 3 : Résolution du système dynamique linéaire suivant dans $\mathbb{R}^2$ [6 pts]

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} \frac{dx}{dt} & = & 2x & + & 2y \\ \frac{dy}{dt} & = & 6x & - & 2y \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{dX}{dt} = AX \quad \text{avec} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$$

1. [0.5 pt] Ecrire le polynôme caractéristique associé à la matrice A.
2. [0.5 pt] Calculer les valeurs propres de la matrice A.
3. [0.5 pt] En déduire la nature qualitative du portrait de phase.
4. [2 pts] Calculez les vecteurs propres associés aux valeurs propres.
5. [0.5 pt] En déduire une matrice de passage permettant de réécrire le système dans une base où il s'exprime plus facilement.
6. [1 pt] Exprimer le système différentiel dans cette nouvelle base et le résoudre.
7. [1 pt] Donner les expressions analytiques des solutions dans la base initiale.

FIN
