Invariants de Places

Invariant de places

- On a un *invariant de place* linéaire s'il existe une pondération sur le marquage des places telle que :

$$q_1 m_1 + q_2 m_2 + ... + q_n m_n = \text{constante} \qquad \forall M \in A(\mathcal{R}, M_0)$$

telle que $\forall i \in [1, ..., n], q_i \in \mathbb{N}$
- L'ensemble des places telles que leur pondération est non nulle est une *composante conservative*
- un réseau est dit *conservatif* si l'ensemble des places du réseau forme une composante conservative.

Propriétés

Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Propriété

Soit F un vecteur de pondération des places. F est associé à un invariant de place ssi $F^t.C = 0$.

Preuve : L'équation fondamentale donne : $M = M_0 + C.\overline{s}$
D'après la définition de la composante conservative :
$F^t.M = cte = F^t.M_0 + F^t.C.\overline{s} \ \ \forall \overline{s}$.
On en déduit que $F^t.C.\overline{s} = 0, \forall \overline{s}$. □

Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Propriété

Si F_1 et F_2 sont associés à des invariants de places, alors pour tout $(n_1, n_2) \in \mathbb{N}$, $n_1 F_1 + n_2 F_2$ est associé à un invariant de places.

Propriété

Toutes les places d'une composante conservative sont bornées et de plus $M(p_i) \leq \frac{F^t.M_0}{q_i}$ où q_i est le poids associé à la place p_i.

Preuve : la définition d'une composante conservative donne :
$q_i m_i + \Sigma_{j \neq i} q_j m_j = \Sigma q_j m_j$,
On sait aussi que $\Sigma_{j \neq i} q_j m_j \geq 0$
On en déduit $q_i m_i \leq \Sigma q_j m_j$, et donc $m_i \leq \frac{\Sigma q_j m_j}{q_i}$ □

Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Généralement, il y a une infinité de P-invariants. On cherche donc les invariants minimaux :

- les invariants minimum sont linéairement indépendants les uns des autres,
- le PGCD de leurs éléments est égal à 1

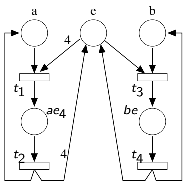
À quoi servent les invariants de places ?

Ils correspondent à des règles de préservation de quantité de matière.

Exemple. Soit le système d'équations chimiques suivant :

$$\begin{cases} a+4e & \longrightarrow & ae_4 \\ ae_4 & \longrightarrow & a+4e \\ b+e & \longrightarrow & be \\ be & \longrightarrow & b+e \end{cases}$$

1. Le RdP est :



2. La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{c} a \\ b \\ e \\ ae_4 \\ be \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les colonnes sont dans l'ordre t_1, t_2, t_3, t_4.

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Exemple. Soit le système d'équations chimiques suivant :

$$\begin{cases} a+4e & \longrightarrow & ae_4 \\ ae_4 & \longrightarrow & a+4e \\ b+e & \longrightarrow & be \\ be & \longrightarrow & b+e \end{cases}$$

3. Les P-invariants sont donnés par l'équations $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon).C = 0$:

$$\begin{cases} -\alpha - 4\gamma + \delta = 0 \\ \alpha + 4\gamma - \delta = 0 \\ -\beta - \gamma + \varepsilon = 0 \\ \beta + \gamma - \varepsilon = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 4\gamma = \delta \\ \beta + \gamma = \varepsilon \end{cases}$$

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

- Si seuls 2 éléments sont non nuls (10 choix).
  - α et δ : $\alpha = 1$ et $\delta = 1$ – Trouvé
  - γ et δ : $\gamma = 1$ et $\delta = 4$ – Impossible
  - β et ε : $\beta = 1$ et $\varepsilon = 1$ – Trouvé
  - γ et ε : $\gamma = 1$ et $\varepsilon = 1$ – Impossible
- Si seuls 3 éléments sont non nuls (10 choix).
  - α, γ et δ : $\alpha = 1$, $\gamma = 1$ et $\delta = 5$ – Impossible
  - β, γ et ε : $\beta = 1$, $\gamma = 1$ et $\varepsilon = 2$ – Impossible
  - γ, δ et ε : $\gamma = 1$, $\delta = 4$ et $\varepsilon = 1$ – Trouvé
- Si un seul élement nul (5 choix possibles).
  - $\alpha = 0$: $\gamma = 1$, $\delta = 4$, $\beta = 1$, $\varepsilon = 2$ – Composition
  - $\beta = 0$: $\gamma = 1$, $\varepsilon = 1$, $\delta = 5$, $\alpha = 1$ – Composition
  - $\gamma = 0$: $\alpha = \delta = \beta = \varepsilon = 1$ – Composition
  - $\delta = 0$: impossible
  - $\varepsilon = 0$: impossible
- Si aucun élément n'est nul.
  - $\alpha = \gamma = \beta = 1$, $\varepsilon = 2$, $\delta = 5$ – Composition

Méthode assez empirique $\Rightarrow$ difficilement automatisable.

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Méthode pour la recherche des P-invariants.

On ne modifie pas les solutions d'un système linéaire en effectuant les opérations suivantes sur les lignes :

- échange de 2 lignes,
- multiplication d'une ligne par un entier
- addition d'une ligne à une autre

But : *triangulariser* la matrice (ou une sous matrice carré).
Cette méthode mène toujours à une matrice de la forme :

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right)$$

Les lignes de "zéros" représentent les composantes conservatives.
En effet, les lignes nulles de la matrice sont des "compositions de places" telles qu'aucune transition ne peut faire changer.

Exemple

Reprenons le même exemple. La matrice C s'écrit comme suit :

$$C = \begin{array}{r} a \\ b \\ e \\ ae_4 \\ be \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

on cherche à modifier les lignes matrice (en utilisant les opérations précédentes) pour faire apparaître des lignes nulles :

1. remplacer la 3ème ligne (e) par $4ae_4 + be + e$, elle devient nulle.

Exemple

Reprenons le même exemple. La matrice C s'écrit comme suit :

$$C = \begin{array}{r} a \\ b \\ e + 4.ae_4 + be \\ ae_4 + a \\ be + b \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

on cherche à modifier les lignes matrice (en utilisant les opérations précédentes) pour faire apparaître des lignes nulles :

1. remplacer la 3ème ligne (e) par $4ae_4 + be + e$, elle devient nulle.
2. remplacer la 4ème ligne (ae_4) par $a + ae_4$, elle devient nulle.
3. remplacer la 5ème ligne (be) par $b + be$, elle devient nulle.

Les P-invariants sont donc : $a + ae_4$, $b + be$ et $e + 4ae_4 + be$

Invariants de transitions

Invariants de transitions

- Une *séquence répétitive* est une séquence de transitions qui permet de revenir à l'état de départ. Elle est dite *minimale* si aucun de ses préfixes stricts n'est une séquence répétitive.
- L'ensemble des transitions qui apparaîssent dans une séquence répétitive forme une *composante répétitive*.
- Le réseau de Petri est dit répétitif s'il existe une séquence répétitive qui contient toutes les transitions du réseau de Petri.

Équation pour le calcul des composantes répétitives

Soit S une séquence de franchissement et $T(S)$ l'ensemble des transitions apparaîssant dans S. $T(S)$ est une composante répétitive *ssi* $C.\overline{S} = 0$.

Preuve. L'équation fondamentale donne $M' = M + C.\overline{v}$.
Si on revient à l'état initial c'est que $C.\overline{v} = 0$ et donc que $\overline{v}$ est solution de $C.\overline{v} = 0$. □

À quoi servent les T-invariants ?

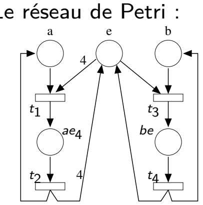
- un invariant : ens de réactions chimiques permettant de maintenir le système dans un état stationnaire.
  Si toutes ces réactions ont lieu, l'état du système n'est pas modifié.
- l'ensemble des invariants : ensemble des activités du réseau métabolique à un état stationnaire.

Exemple 1.

Les réactions :

$$\begin{array}{lcl} a + 4e & \rightarrow & ae_4 \\ ae_4 & \rightarrow & a + 4e \\ b + e & \rightarrow & be \\ be & \rightarrow & b + e \end{array}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{r} a \\ b \\ e \\ ae_4 \\ be \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Les invariants de transitions sont les solutions de $C. \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0.$

Ce système s'écrit $\begin{cases} x = y \\ z = t \\ -4x + 4y - z + t = 0 \end{cases}$ qui est équivalent à $\begin{cases} x = y \\ z = t \end{cases}$

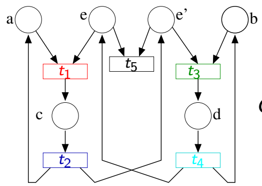
Il y a donc 2 t-invariants : $(1, 1, 0, 0)^t$ $(0, 0, 1, 1)^t$

Invariants de transitions

Exemple 2.

$$\begin{cases} a+e & \rightarrow c \\ c & \rightarrow a+e' \\ e+e' & \rightarrow \emptyset \\ b+e' & \rightarrow d \\ d & \rightarrow b+e \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{c} a \\ e \\ c \\ e' \\ b \\ d \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recherche des T-invariants : $C.\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0.$

$$\begin{cases} \alpha & = & \beta \\ \varepsilon + \alpha & = & \delta \\ \alpha & = & \beta \\ \beta & = & \gamma + \varepsilon \\ \gamma & = & \delta \end{cases}$$

Si α est nul, tous les autres sont nuls aussi. Ce n'est pas un T-invariant.
Sinon

- $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 1,\ \delta = 1,\ \varepsilon = 0.\ \Rightarrow$ 1^{er} invariant trouvé : (t_1, t_2, t_3, t_4)
- $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 0,\ \delta = 0,\ \varepsilon = 1.$ Impossible.
- $\alpha = 1,\ \beta = 1,\ \gamma = 2,\ \delta = 2,\ \varepsilon = ?.$ Impossible.

Invariants de transitions

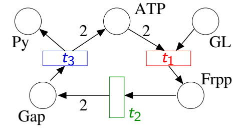
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} 2\ ATP + Gl \rightarrow Frpp \\ Frpp \rightarrow 2.GAP \\ GAP \rightarrow Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence :

$$C = \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants : $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \gamma & = & \alpha \\ \alpha & = & 0 \\ \alpha & = & \beta \\ \gamma & = & 2 \times \beta \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha & = & 0 \\ \beta & = & 0 \\ \gamma & = & 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Pas d'invariants}$$

Absence de T-invariant évidente : - consommation de Gl
- synthèse de Py

Existe-t-il un fonctionnement stationnaire de la voie métabolique si on ne compte ni la consommation de Gl ni la production de Py. Pour cela on rajoute deux réactions.

Invariants de transitions

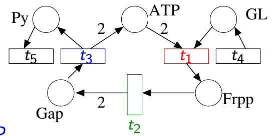
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \emptyset \rightarrow Gl \\ Py \rightarrow \emptyset \\ 2\ ATP + Gl \rightarrow Frpp \\ Frpp \rightarrow 2.GAP \\ GAP \rightarrow Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence C :

$$\begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants. $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \varepsilon \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \gamma \\ \alpha = \delta \\ \alpha = \beta \\ \gamma = 2 \times \beta \\ \gamma = \varepsilon \end{cases}$

Pas d'invariants car

$$\begin{cases} \text{si} \quad \alpha = 0, & \text{tous les autres sont nuls, et} \\ \text{si} \quad \alpha \neq 0, & \text{on arrive à une incohérence.} \end{cases}$$

Invariants de transitions

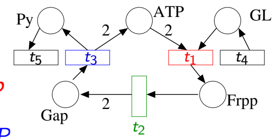
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

Exemple 3. Recherche des P-invariants et des T-invariants

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \emptyset \rightarrow Gl \\ Py \rightarrow \emptyset \\ 2\ ATP + Gl \rightarrow Frpp \\ Frpp \rightarrow 2.GAP \\ GAP \rightarrow Py + 2.ATP \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



La matrice d'incidence C :

$$\begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Recherche des P-invariants : $(a, b, c, d, e) \times C = 0$

$$\begin{array}{l} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp + Gl \\ Gap + 2Frpp + 2Gl \\ Py + Gap + 2Frpp + 2Gl \end{array} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il y a un autre P-invariant :
la ligne correspondant à (Gap + 2 Frpp) est le vecteur $(2, 0, -1)$
on peut remplacer ATP par (ATP + (Gap+2Frpp) + (Gap+2Frpp+2Gl))
Le système devient :

$$\begin{array}{r} Gl \\ Frpp + Gl \\ Gap + 2Frpp + 2Gl \\ Py + Gap + 2Frpp + 2Gl \\ ATP + (Gap + 2Frpp) + (Gap + 2Frpp + 2Gl) \end{array} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

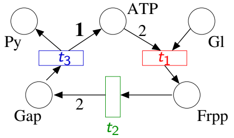
Invariants de transitions

Exemple 4 : recherche des P-invariants et des T-invariants :

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \color{red}{2.ATP + Gl \rightarrow Frpp} \\ \color{green}{Frpp \rightarrow 2.GAP} \\ \color{blue}{GAP \rightarrow Py + ATP} \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



$$C = \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ GAP \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} \color{red}{-2} & \color{green}{0} & \color{blue}{1} \\ \color{red}{-1} & \color{green}{0} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{1} & \color{green}{-1} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{0} & \color{green}{2} & \color{blue}{-1} \\ \color{red}{0} & \color{green}{0} & \color{blue}{1} \end{pmatrix}$$

1. Recherche des T-invariants : $C \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -2\alpha & & +\gamma & = & 0 \\ -\alpha & & & = & 0 \\ \alpha & -\beta & & = & 0 \\ & 2\beta & -\gamma & = & 0 \\ & & \gamma & = & 0 \end{cases} \Longrightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

Il n'existe pas de vecteur y non nul tel que $C.y = 0$. Il n'y a donc pas d'invariant de transitions.

CÔTE D'AZUR
Introduction aux Réseau de Petri
Jean-Paul Comet
Concepts généraux
Représentation Matricielle
Définitions formelles
Représentation de la dynamique
Quelques propriétés
P-invariants
T-invariants
ADT sets

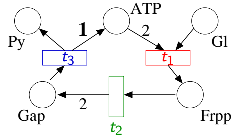
Invariants de transitions

Exemple 4 : recherche des P-invariants et des T-invariants :

Équations chimiques :

$$\begin{cases} \color{red}{2.ATP + Gl \rightarrow Frpp} \\ \color{green}{Frpp \rightarrow 2.GAP} \\ \color{blue}{GAP \rightarrow Py + ATP} \end{cases}$$

Le réseau de Petri :



$$C = \begin{array}{r} ATP \\ Gl \\ Frpp \\ GAP \\ Py \end{array} \begin{pmatrix} \color{red}{-2} & \color{green}{0} & \color{blue}{1} \\ \color{red}{-1} & \color{green}{0} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{1} & \color{green}{-1} & \color{blue}{0} \\ \color{red}{0} & \color{green}{2} & \color{blue}{-1} \\ \color{red}{0} & \color{green}{0} & \color{blue}{1} \end{pmatrix}$$

2. Recherche des P-invariants : $(a, b, c, d, e)C = 0$

$$\begin{array}{r} \\ ATP \\ Gl \\ Frpp \\ Gap \\ Py \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} \\ ATP + Frpp \\ Gl + Frpp \\ Gap + 2(Gl + Frpp) \\ Frpp + (ATP + Frpp) + Gap \\ Py \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \begin{array}{r} \\ ATP + Frpp \\ Gl + Frpp \\ Gap + 2(Gl + Frpp) \\ Frpp + (ATP + Frpp) + Gap \\ Py + (2 \times (Frpp + Gl) + Gap) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} t_1 & t_2 & t_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Il y a donc 2 P-invariants.