

## Introduction aux Réseaux de Petri

Département Génie Biologique  
GB4 – année 2025–2026



Jean-Paul Comet

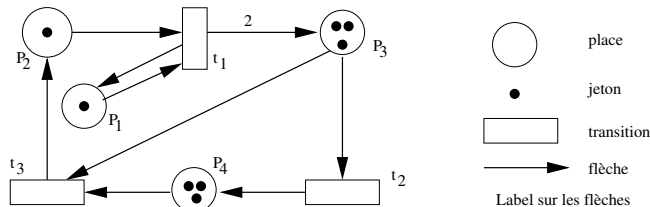
Université Côte d'Azur

20 mars 2026

## Les réseaux de Petri

- Outil graphique et mathématique
- Simuler et modéliser des systèmes dans lesquels les notions d'événements et d'évolution sont importantes
- Carl Adam Petri, 1962
- Au départ, systèmes à événements discrets. Beaucoup d'extensions ont vu le jour  
Certaines sont vraiment dédiées à la modélisation de systèmes biologiques (RdP hybrides fonctionnels)
- l'envers de la médaille d'une **grande expressivité** :  
**plus aucune propriété n'est prouvable...**
- **Avantage des réseaux de Petri** :
  - fondations mathématiques fortes,
  - leur capacité à prendre en compte la concurrence.
  - un grand nombre de logiciels permettent de simuler et d'analyser les Réseaux de Petri (WoPeD, PNSim, Tina...)

## Un exemple

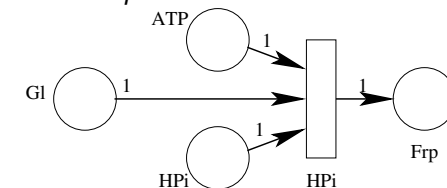


Intuitivement :

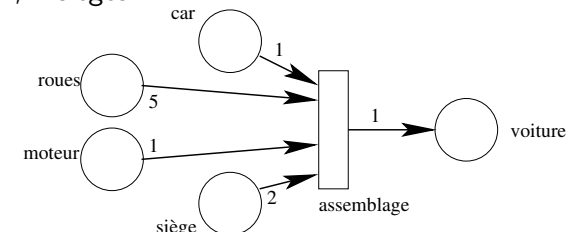
- Le nombre de jetons dans chaque place indique l'état de la variable associée à la place considérée.  
Ex : Si  $P_3$  représente l'ATP, alors, il y a 3 ATP dans le système.
- L'état initial du système : vecteur des nombres de jetons  
Ex : l'état initial du système (fig), alors  $M_0 = (1, 1, 3, 3)^t$ .  
On appelle ce vecteur le **marquage initial**
- Les transitions correspondent à des événements qui ne peuvent avoir lieu que sous certaines conditions :  
chacune des places prédécesseurs doit avoir assez de jetons (*ressources*)

## Un exemple

**Ex 1** : Représentation d'une réaction enzymatique  
 $ATP + Gl + enz \rightarrow Frp$ .

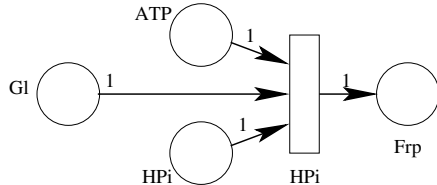


**Ex 2** : L'assemblage d'une voiture nécessite 1 châssis, 5 roues, 1 moteur, 2 sièges :



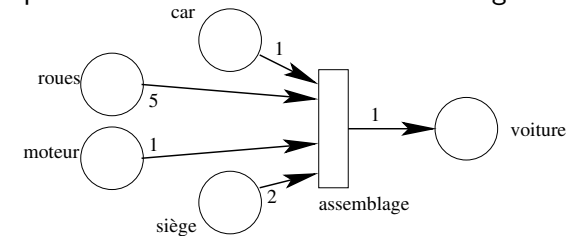
On dit alors qu'une transition est **franchissable**.

- Parmi toutes les transitions franchissables, on en choisit une en particulier. On dit que l'on **tire** la transition choisie.
- Il y a alors une modification de l'état (marquage) :
  - consommation des ressources nécessaires pour l'événement
  - production des éléments produits par l'événement



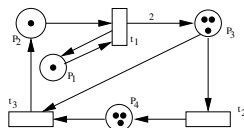
**Ex 1 :** marquage initial  $M_0 = (\text{ATP} : 3, \text{Gl} : 2, \text{HPI} : 1, \text{Frp} : 0)$   
la transition est franchissable  
 $M_1 = (\text{ATP} : 2, \text{Gl} : 1, \text{HPI} : 0, \text{Frp} : 1)$ .  
Problème ?

**Ex 2 :** Reprennons maintenant le cas du montage de la voiture.



Si le marquage initial  $M_0$  est :  
(carrosserie :15, roues :16, moteur :3, sièges :5, voiture :3)  
alors le marquage  $M_1$  est  
(carrosserie :14, roues :11, moteur :2, sièges :3, voiture :4)

Le RdP est représenté par :



- un ensemble de places : Places =  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$
- un ensemble de transitions : Transitions =  $\{t_1, t_2, t_3, t_4\}$
- une matrice *Pre* : les arcs  $\in \text{Places} \times \text{Transitions}$ .  
 $Pre(i, j)$  est différent de 0 si place<sub>i</sub>  $\rightarrow$  transition<sub>j</sub>
- une matrice *Post* : les arcs  $\in \text{Transitions} \times \text{Places}$ .  
 $Post(i, j)$  est différent de 0 si transition<sub>i</sub>  $\rightarrow$  place<sub>j</sub>.

$$Pre = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \quad Post = \begin{matrix} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \begin{matrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

A partir de ces deux matrices, on définit la *matrice d'incidence* du réseau de Petri :  $C = Post^t - Pre$ . L'élément  $(i, j)$  de la matrice  $C$  donne le bilan pour la place  $i$  du tirage de la transition  $j$ .

Pour le premier exemple de ce chapitre, on a :

$$C = \begin{matrix} & t_1 & t_2 & t_3 \\ \begin{matrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

## Réseau de Petri

Un RdP est un quadruplet  $\mathcal{R} = (P, T, Pre, Post)$  où

- $P$  : ensemble fini de places
- $Pre$  : application  $P \times T \rightarrow \mathbb{N}$
- $T$  : ensemble fini de transitions
- $Post$  : application  $T \times P \rightarrow \mathbb{N}$

On introduit la matrice d'incidence  $C = Post^t - Pre$

## Marquage

Un marquage est une application  $M : P \rightarrow \mathbb{N}$

## Transition franchissable

une transition  $t$  est franchissable si  $\forall p \in P, M(p) \geq Pre(p, t)$ .

On note parfois  $M(t >)$  ou encore  $M \xrightarrow{t}$

## Changement d'état

Si  $t$  est franchissable, pour le marquage  $M$ , le franchissement (tir) de la transition  $t$  donne le nouveau marquage  $M'$  tel que

$$\forall p \in P, M'(p) = M(p) - Pre(p, t) + Post(t, p) = M(p) + C(p, t)$$

On note  $M \xrightarrow{t} M'$  ou  $M(t >) M'$ .

En posant  $e_t$  le vecteur de base correspondant à la transition  $t$ , on peut écrire :  $M' = M + C \cdot e_t$

35

## Vecteur caractéristique

Soit  $s$  une séquence sur l'alphabet des transitions, on appelle *vecteur caractéristique* le vecteur  $\bar{s}$  formé des nombres d'occurrences de chaque transition.

**Exemple** : pour la séquence  $s = t_1 t_2 t_1 t_3 t_1$ , on a  $\bar{s} = (3, 1, 1)^t$

## Equation Fondamentale (assez triviale)

Si  $s$  correspond à une suite de transitions franchissables, alors l'état obtenu après avoir franchi les transitions de  $s$  est donné par :

$$\begin{aligned} M &= M_0 + Post^t \cdot \bar{s} - Pre \cdot \bar{s} \\ &= M_0 + C \cdot \bar{s} \end{aligned}$$

Considérons le vecteur caractéristique  $\bar{s}$ .

$\Delta = C \times \bar{s}$  : vecteur de  $p$  entiers, où  $\Delta_i$  correspond au gain/perte de la place  $i$  à la suite de la séquence de transitions :  $\Delta_i = \sum_{k=1}^n C_{i,k} \bar{s}_k$ .

Dans cette expression,  $\bar{s}_k \times C_{i,k}$  correspond au nombre de fois où la transition  $k$  apparaît multiplié par le gain/perte de jetons de la place  $i$  pour un seul tirage de la transition  $k$

11/35

## Conflit/parallélisme

- Deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en *conflit structurel* si elles ont une place d'entrée en commun.
- Deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont en *conflit effectif* pour le marquage  $M$  si  $t_1$  et  $t_2$  sont en conflit structurel et si les 2 transitions sont franchissables.
- Deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont *parallèles structurellement* si elles n'ont aucune place d'entrée en commun.
- Deux transitions  $t_1$  et  $t_2$  sont *parallèles pour un marquage donné*  $M$  si elles sont parallèles structurellement et si elles sont franchissables.

## Marquages accessibles

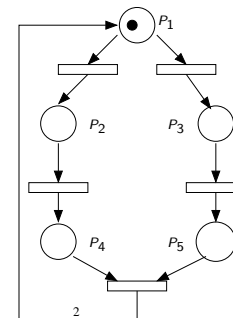
L'ensemble des marquages accessibles  $A(\mathcal{R}, M_0)$  d'un RdP  $\mathcal{R}$  à partir d'un état initial  $M_0$  est l'ensemble des marquages que l'on peut atteindre à partir de  $M_0$ .

12/35

On utilise le **graphe de marquages** quand le nombre de marquages accessibles est fini :

- ensemble des sommets = ens des marquages possibles
- il existe une flèche  $M_1 \rightarrow M_2$  s'il existe à partir du marquage  $M_1$  une transition franchissable qui mène au marquage  $M_2$ .

**Exemple.** Tracer le graphe de marquage pour le RdP suivant :



13/35

## Ordre partiel sur les vecteurs

Soient 2 vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  de même dimension.

- $v_1 \leq v_2$  si on a  $v_1(i) \leq v_2(i)$  pour tout  $i$   
(si l'inégalité est vraie composante par composante).
- $v_1 < v_2$  si d'une part on a  $v_1(i) \leq v_2(i)$  et  
si  $\exists k$  pour laquelle on a  $v_1(k) < v_2(k)$

## Exemples :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

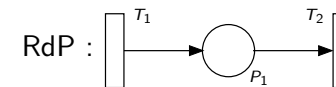
- Le marquage symbolique  $\omega$  désigne un nombre de jetons dans une place  $P_i$  qui peut atteindre un nombre arbitrairement grand (l'infini).  
Il représente en effet une infinité de marquages possibles.
- Les opérations arithmétiques avec  $\omega$  sont simples :  

$$\omega + k = \omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$\omega - k = \omega \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

## Algorithme de construction d'un graphe de couverture

- ① A partir du marquage initial  $M_0$ , calculer toutes les transitions franchissables ainsi que les marquages successeurs correspondants. Si un des marquages est strictement supérieur à  $M_0$ , on met la variable  $\omega$  pour chacune des composantes supérieures aux composantes de  $M_0$ .
- ② Pour chaque nouveau marquage  $M_i$ , on fait l'une des étapes suivantes :
  - ① S'il existe sur le chemin de  $M_0$  jusqu'à  $M_i$  (ce dernier exclu) un marquage  $M_j = M_i$  alors on confronte  $M_i$  avec  $M_j$  et il n'est donc plus nécessaire de développer l'arbre à partir de  $M_i$ .
  - ② Sinon, on prolonge le graphe avec les successeurs  $M_k$  de  $M_i$  : Une composante  $\omega$  de  $M_i$  reste une composante  $\omega$  de  $M_k$ . S'il existe un marquage  $M_j$  sur le chemin de  $M_0$  à  $M_k$  tel que  $M_k > M_j$ , alors on met  $\omega$  pour chacune des composantes supérieures aux composantes de  $M_j$ .

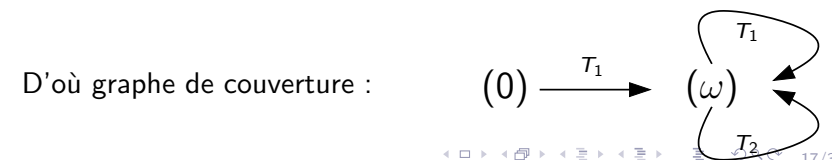


$T_1$  : transition source, franchissable un nombre infini de fois.  
 $\Rightarrow$  recours au graphe de couverture.

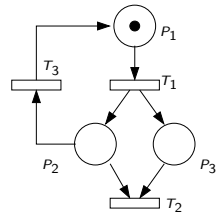
A partir du marquage initial  $M_0 = (0)$ , seule la transition  $T_1$  est franchissable :  $M_0 \xrightarrow{T_1} M_1 = (1)$ .  $M_1$  est supérieur à  $M_0$  donc  $M_1 = (\omega)$ .

A partir de  $M_1$ , les deux transitions  $T_1$  et  $T_2$  sont franchissables :

- Si on franchit  $T_1$  :  $M_2 = (\omega + 1) = (\omega) = M_1$  et on ne cherche plus les successeurs de  $M_2$ .
- Si on franchit  $T_2$  :  $M_3 = (\omega - 1) = (\omega) = M_1$  et on ne cherche plus les successeurs de  $M_3$ .



Utilisez l'algorithme de construction du graphe de couverture sur le RdP représenté ci-dessous à gauche :



Un RdP ne peut pas atteindre n'importe quel marquage, et on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions. Quelques propriétés classiquement utilisées :

- Une transition  $t$  d'un RdP marqué  $(\mathcal{R}, M_0)$  est **vivante** si de tout état accessible à partir de  $M_0$ , il existe une séquence de franchissement qui utilise  $t$  :

$$\forall M' \in A(\mathcal{R}, M_0), \exists s \text{ telle que } M' \xrightarrow{s} M'' \text{ et } M'' \xrightarrow{t}$$

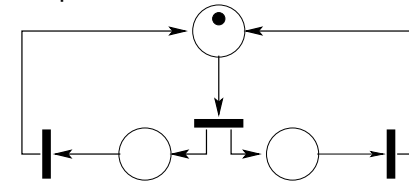
un RdP est dit **vivant** si toutes ses transitions le sont.

- Un RdP est **réinitialisable (propre)** si de tout état accessible, il est possible de revenir à l'état initial :

$$\forall M \in A(\mathcal{R}, M_0), \exists s \text{ telle que } M \xrightarrow{s} M_0$$

Un RdP ne peut pas atteindre n'importe quel marquage, et on ne pourra pas franchir n'importe quelle séquence de transitions. Quelques propriétés classiquement utilisées :

- une place  $p$  d'un RdP marquée (avec marquage initial) est  **$k$ -bornée** si  $\forall M' \in A(\mathcal{R}, M_0), M'(p) \leq k$ .  
Si  $k = 1$ , la place est dite **binaire**.
- un RdP marqué est  **$k$ -borné (bounded)** si toutes les places sont  $k$ -bornées. Si  $k$  vaut 1, le RdP est dit **binaire**.  
Voici un exemple de réseau non borné :



- Une transition  $t$  d'un RdP marqué  $(\mathcal{R}, M_0)$  est **quasi-vivante** s'il existe un état  $M'$  accessible à partir de  $M_0$  pour lequel la transition  $t$  soit franchissable :  $M_0 \rightarrow^s M$  et  $M \xrightarrow{t}$ .