

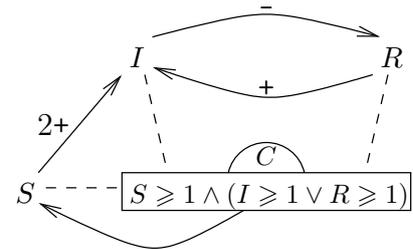
Durée 2h30. Documents autorisés,  
Ordinateur et autres moyens de communication interdits.

G. Bernot, J.-P. Comet

**Rédigez les parties 1 et 2 sur deux copies séparées. Justifiez chacune de vos réponses.**

Il s'agit d'étudier une version simplifiée des inter-régulations entre *Ressources* naturelles, *Industrialisation* et *Surpopulation* au niveau d'un territoire sur de très longues échelles de temps. Pour simplifier le modèle, on n'y intègre pas des phénomènes néanmoins importants, comme les migrations, les importations de ressources extérieures, etc.

Dans le graphe de régulation ci-contre,  $S$  représente le niveau de *surpopulation* du territoire,  $I$  indique s'il est sensiblement *industrialisé* et  $R$  si ses *ressources naturelles* sont suffisantes. On considère de plus que des conditions de *croissance* de la population (multiplex  $C$ ) peuvent être réunies si le territoire présente déjà des signes de surpopulation (niveau au moins 1) et s'il est industrialisé ou dispose de suffisamment de ressources naturelles. De plus, une forte surpopulation (niveau 2) pourrait induire une industrialisation sensible.



Enfin, bien sûr, l'industrialisation est prédatrice des ressources naturelles.

## Partie 1

On se place dans le cadre de la théorie de Thomas où la contrainte de Snoussi est toujours satisfaite.

**Exercice 1 :** Indiquez les valeurs que peuvent prendre chacune des variables  $S$ ,  $I$  et  $R$ . Donnez ensuite la liste des paramètres qui pilotent la dynamique du système.

Il a été observé que, sans surpopulation, la situation « agricole et artisanale » ( $S = 0, I = 0, R = 1$ ) est stable au cours du temps.

**Exercice 2 :** Qu'en déduisez-vous sur les valeurs des paramètres ? Construisez d'abord le tableau des ressources, en respectant l'ordre  $S, I, R$ . Utilisez également les contraintes de Snoussi.

Certains territoires très attractifs ont maintenu artificiellement une forte surpopulation sur une très longue période. Dans ces territoires, on a observé des oscillations des ressources naturelles et ces oscillations perdurent au cours du temps.

**Exercice 3 :** Par quelles interactions au sein du modèle ces oscillations peuvent-elles être engendrées ? Quelles valeurs de paramètres en déduit-on ?

Sur d'autres territoires, on a observé l'historique suivant (exprimé ici en triplet de Hoare) :

$$\{I = 0 \wedge R = 0\} S- ; R+ ; S+ \{S = 2\}.$$

**Exercice 4 :** Quelles valeurs de paramètres en déduit-on ? détaillez les étapes successives de vos calculs.

**Exercice 5 :** Maintenant que toutes les valeurs de paramètres sont connues, tracez le graphe de transitions. On pourra utiliser le schéma en annexe avec  $S=0$  au premier plan,  $S=1$  comme plan intermédiaire et  $S=2$  comme plan arrière.

On considère qu'un territoire tombe en *famine* si  $I = 0$  et  $R = 0$ . Il est dit en *prospérité* si  $I = 1$ .

**Exercice 6 :** Ecrivez en CTL les trois propriétés suivantes :

1. Tout territoire connaîtra un jour ou l'autre une période de prospérité ;
2. Un territoire sans aucune surpopulation (forte ou non) le restera toujours.
3. Partant d'une surpopulation (forte ou non), le territoire ne pourra pas échapper à une période de famine ;

Pour chacune d'elles, dites si elle est satisfaite dans votre modèle, et pourquoi.

## Partie 2

Cette partie se focalise sur le model-checking ainsi que sur le lien entre cadre de modélisation de René Thomas et le cadre différentiel.

### Exercice 7 :

1. Écrivez une formule CTL qui exprime que, partant d'un état de surpopulation (forte ou non), il est possible d'entrer dans un cycle qui alterne *famine* et *prospérité* (au sens de la première partie) sans jamais passer par un état sans surpopulation. Autrement dit, partant d'un état de *famine* on peut éventuellement atteindre un état de *prospérité*, et inversement, sans jamais passer par un état sans surpopulation.
2. Est-ce que cette formule est satisfaite par le graphe construit à l'exercice 5? Justifiez votre réponse.
3. Traduisez si nécessaire la formule en une formule équivalente mais sous une forme qui facilite le model checking.
4. En étiquetant les états successivement par les sous-formules de votre formule traduite, comme le fait l'algorithme basique de model checking, déterminez tous les états qui satisfont cette formule.

*Indication* : pour éviter de surcharger la figure, vous pouvez en faire une par sous-formule en utilisant la feuille en annexe. Il suffit alors d'indiquer la sous-formule considérée et de hachurer les états qu'elle étiquette par l'algorithme de model checking. La feuille contient assez de figures successives utiles, sinon plus.

Nous supposerons dans la suite qu'il existe dans le modèle un cycle qui fait alterner *famine* et *prospérité*.

**Exercice 8 :** D'après tout ce qui précède, il y a multi-stationarité puisque d'une part, il existe un état stable (la situation « agricole artisanale » ( $S = 0, I = 0, R = 1$ )), et que d'autre part, il y a les cycles de l'exercice précédent. D'après les théorèmes vus en cours, il y a au moins une boucle positive fonctionnelle.

1. Listez toutes les boucles positives.
2. Pour chacune des boucles positives,
  - (a) Énumérez les états caractéristiques, avec les notations de l'exercice 9 pour les seuils réels.
  - (b) Pour chaque état caractéristique, écrivez la formule CTL qui exprime sa fonctionnalité (on utilisera son ou ses états caractéristiques). On dira ici simplement que l'état caractéristique définit deux zones dans lesquels les trajectoires ne se rapprochent pas de l'état caractéristique.
  - (c) Est-ce que la formule est satisfaite pour le modèle obtenu à l'exercice 5?

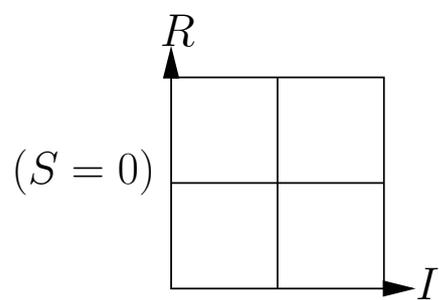
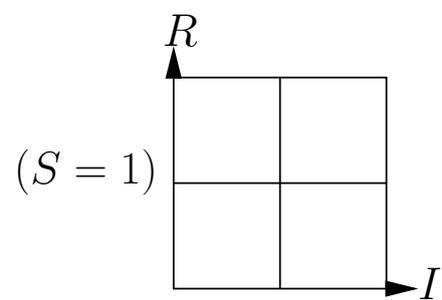
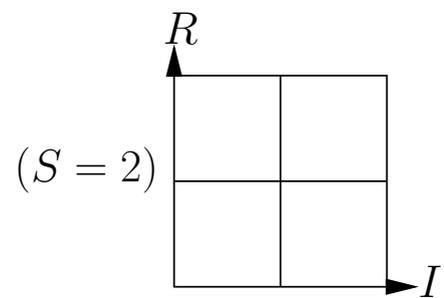
La suite de cette partie a pour but de construire un modèle continu de ce système. Nous utiliserons le cadre de modélisation par équations différentielles linéaires par morceau.

**Exercice 9 :** Écrivez les équations différentielles régissant  $S$ ,  $I$  et  $R$  correspondant au système décrit par la figure du début de l'énoncé. On notera  $x_S$ ,  $x_I$  et  $x_R$  les variables représentant des indicateurs continus de la surpopulation, de l'industrialisation et de la disponibilité des ressources naturelles. De plus on notera les seuils de déclenchement des interactions  $\theta_S^1$ ,  $\theta_S^2$ ,  $\theta_I^1$  et  $\theta_R^1$ ; les constantes de synthèse seront notées  $\kappa$  avec des indices convenables et les constantes de dégradation  $\gamma_S$ ,  $\gamma_I$  et  $\gamma_R$ .

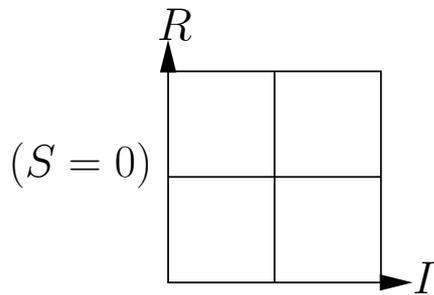
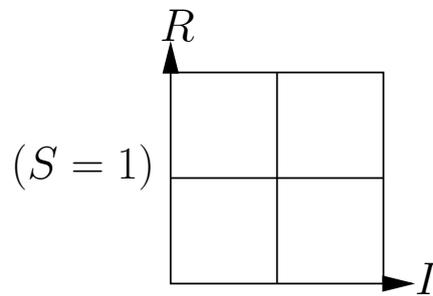
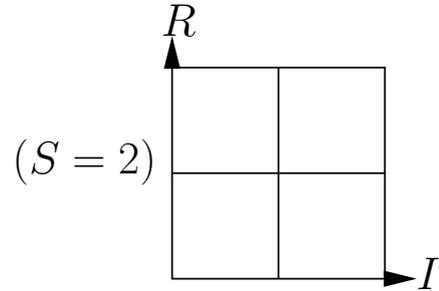
**Exercice 10 :** Écrivez, et justifiez, les contraintes sur les paramètres du système d'équations différentielles pour que le modèle soit cohérent avec le modèle discret obtenu à l'exercice 5.

## Annexe de la *Partie 1*

Si vous utilisez cette feuille, insérez-la dans la copie double de la *Partie 1*.

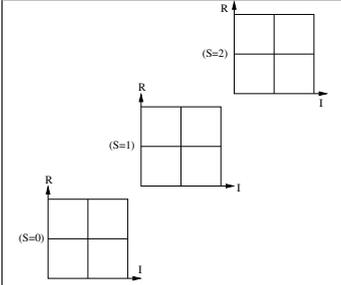
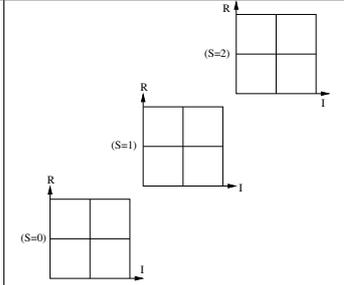
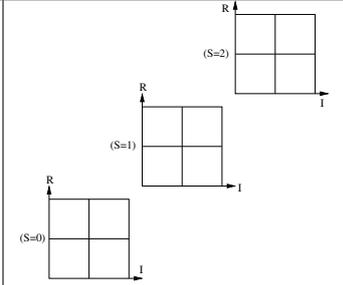
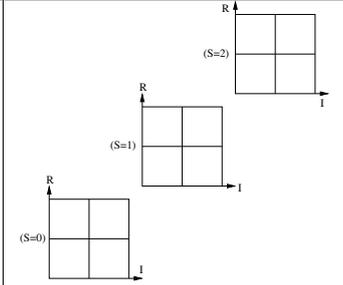
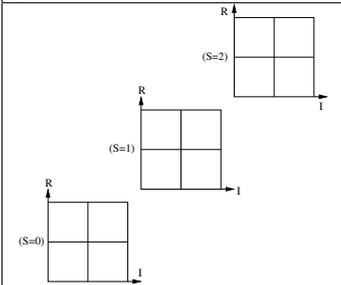
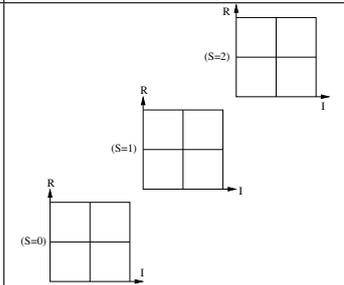
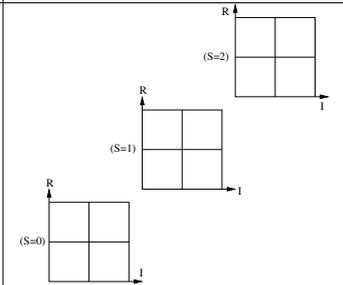
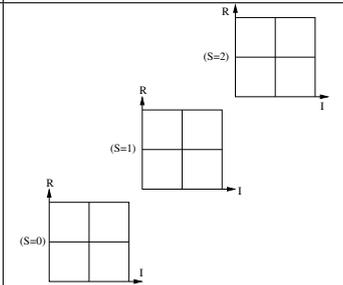
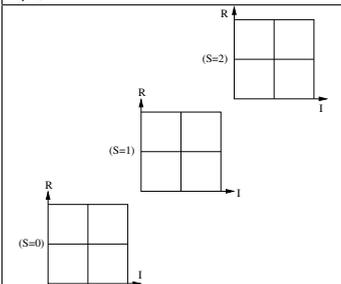
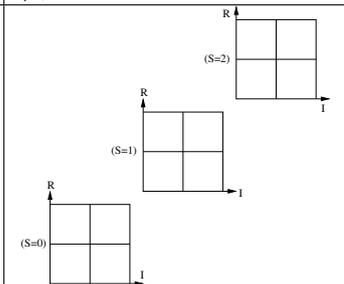
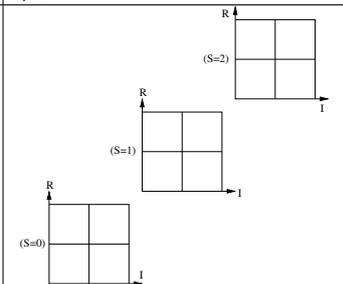
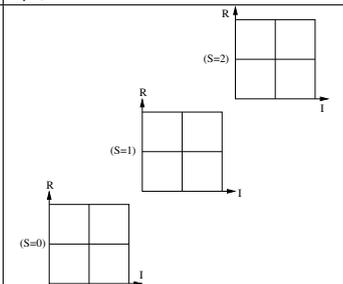
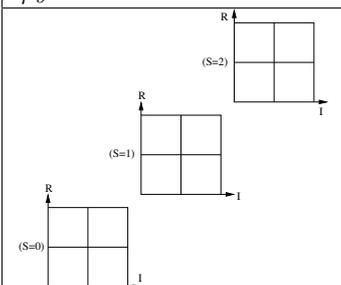
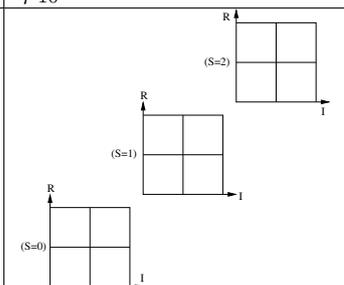
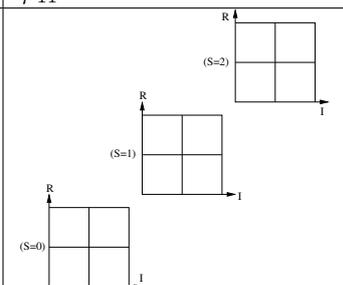
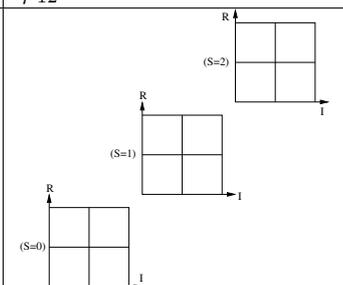
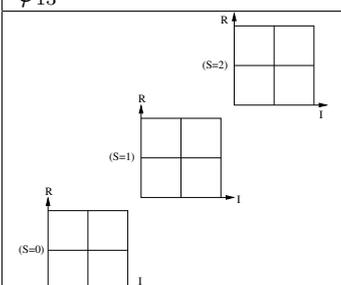
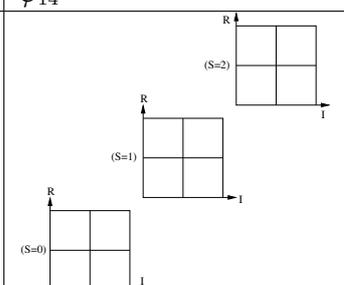
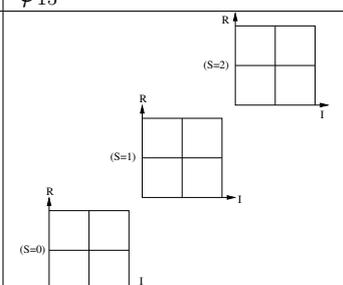
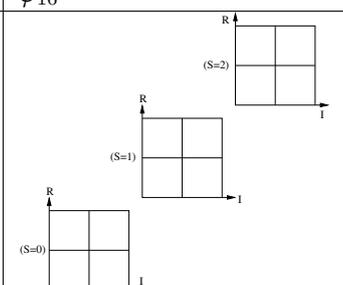


(Ce doublon au verso est disponible en cas d'erreur au recto).  
*Si vous l'utilisez, rayez très clairement la version erronée !*



## Annexe de la *Partie 2*

*Si vous utilisez cette feuille, insérez-la dans la copie double de la Partie 2.*

 <p><math>\varphi_1</math></p>	 <p><math>\varphi_2</math></p>	 <p><math>\varphi_3</math></p>	 <p><math>\varphi_4</math></p>
 <p><math>\varphi_5</math></p>	 <p><math>\varphi_6</math></p>	 <p><math>\varphi_7</math></p>	 <p><math>\varphi_8</math></p>
 <p><math>\varphi_9</math></p>	 <p><math>\varphi_{10}</math></p>	 <p><math>\varphi_{11}</math></p>	 <p><math>\varphi_{12}</math></p>
 <p><math>\varphi_{13}</math></p>	 <p><math>\varphi_{14}</math></p>	 <p><math>\varphi_{15}</math></p>	 <p><math>\varphi_{16}</math></p>
 <p><math>\varphi_{17}</math></p>	 <p><math>\varphi_{18}</math></p>	 <p><math>\varphi_{19}</math></p>	 <p><math>\varphi_{20}</math></p>

(Ce doublon au verso est disponible en cas d'erreur au recto).  
 Si vous l'utilisez, rayez très clairement la version erronée !

<p><math>\varphi_1</math></p>	<p><math>\varphi_2</math></p>	<p><math>\varphi_3</math></p>	<p><math>\varphi_4</math></p>
<p><math>\varphi_5</math></p>	<p><math>\varphi_6</math></p>	<p><math>\varphi_7</math></p>	<p><math>\varphi_8</math></p>
<p><math>\varphi_9</math></p>	<p><math>\varphi_{10}</math></p>	<p><math>\varphi_{11}</math></p>	<p><math>\varphi_{12}</math></p>
<p><math>\varphi_{13}</math></p>	<p><math>\varphi_{14}</math></p>	<p><math>\varphi_{15}</math></p>	<p><math>\varphi_{16}</math></p>
<p><math>\varphi_{17}</math></p>	<p><math>\varphi_{18}</math></p>	<p><math>\varphi_{19}</math></p>	<p><math>\varphi_{20}</math></p>