Modélisation des réseaux de régulation biologique Examen du 10 décembre 2025

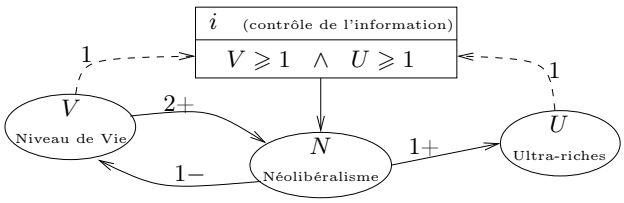
Durée 2h30. *Documents autorisés,* G. Bernot, J.-P. Comet
Ordinateur et autres moyens de communication interdits.

Rédigez les parties 1 et 2 sur deux copies séparées. **Justifiez chacune de vos réponses.**

On se propose d'étudier (sous une forme caricaturalement simplifiée) les liens entre démocratie et néolibéralisme au sein d'un pays. Nous allons considérer pour ce faire les inter-régulations entre 3 variables :

- le niveau de vie V des 99,9% de la population (qui sont également les votants de ce pays) ; on dira que $V = 0$ si une majorité écrasante de la population se considère en situation précaire, $V = 1$ si une majorité, mais non écrasante, se considère en situation précaire, et $V = 2$ si une minorité de la population se considère en situation précaire ;
- le type de gouvernement N où, pour simplifier, on considère seulement $N = 1$ pour une politique « néolibérale » et $N = 0$ pour une politique « solidaire » ;
- l'existence de quelques ultra-riches U, avec $U = 1$ s'ils le sont assez pour contrôler en bonne partie les médias et enfin $U = 0$ sinon.

De plus, le multiplexe i traduit l'idée que, tant qu'il n'y a pas une majorité écrasante de la population en situation précaire ($V \neq 0$), le contrôle de l'information tend à favoriser un régime néolibéral, donc est une ressource pour N.



- L'inhibition de N sur V traduit que le néolibéralisme accentue les différences de niveau de vie entre les 99,9% et les 0,1%, et l'activation de N sur U qu'il favorise les ultra-riches.
- L'activation de V sur N traduit que si la population ne se sent pas en majorité défavorisée ($V = 2$) alors elle a une tendance à voter pour le néolibéralisme.

Partie 1

On analyse la situation au travers du formalisme discret de René Thomas et nous sommes dans un contexte où la contrainte de Snoussi s'applique.

Exercice 1 : Indiquez le nombre d'états discrets du système modélisé et donnez la liste des paramètres discrets à identifier.

Exercice 2 :

1. On suppose avoir observé que, dans les pays où le néolibéralisme est appliqué sur une longue période sans relâche, on finit par avoir, d'une part, une majorité écrasante de la population en situation précaire et, d'autre part, quelques ultra-riches contrôlant les médias. Quelles valeurs de paramètres sont ainsi fixées ?
2. Par ailleurs, dans les pays où seulement une minorité de la population est en situation précaire, les votants optent très majoritairement pour le néolibéralisme (dans l'espoir de devenir encore plus aisés) et mettent au pouvoir un gouvernement néolibéral. Quelles valeurs de paramètres sont ainsi fixées ?
3. Enfin, dans les pays où une majorité écrasante de la population est en situation précaire, i n'est plus effectif et les votes rejettent toujours majoritairement le néolibéralisme, mettant au pouvoir un gouvernement solidaire. Quelle valeur de paramètre est ainsi fixée ?
4. Énumérez les valeurs possibles des paramètres restant à identifier.

Exercice 3 : Dans plusieurs pays, on a déjà observé l'évolution suivante : $\left\{ \begin{array}{l} N = 0 \\ U = 1 \end{array} \right\} V+; N+; V- \left\{ \begin{array}{l} V = 0 \end{array} \right\}$ Quelles valeurs possibles de paramètres en déduisez-vous ?

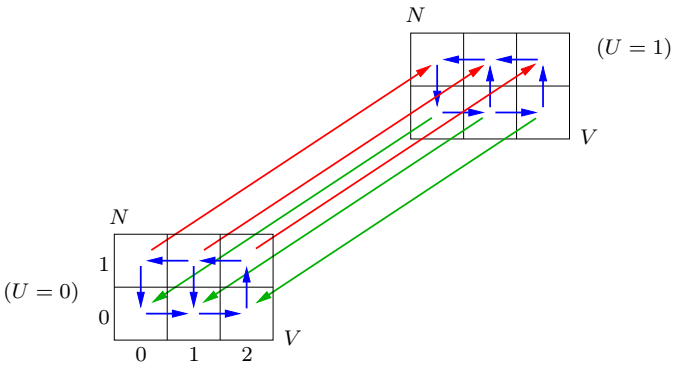
Exercice 4 : Dans les pays où le pouvoir des ultra-riches est strictement encadré (la variable U reste toujours à 0), on observe sur le long terme une oscillation de V. Par quoi peut-elle être engendrée ? Quelle valeur de paramètre en déduisez-vous ?

Exercice 5 : Plusieurs pays ont maintenu de manière volontariste leur population dans l'état $V = 1$ sur une très longue période (*e.g.* « les trente glorieuses »). On observe que certains d'entre eux basculent dans un état stable néolibéral et d'autres au contraire dans un état stable solidaire. Par quoi ces deux bassins d'attraction peuvent-ils être engendrés ? Quelle valeur de paramètre en déduisez-vous ?

Exercice 6 : Avec les valeurs de paramètres que vous avez trouvées, tracez le graphe de transitions (un schéma vierge est fourni en annexe).

Partie 2

Cette partie se focalise sur le model-checking ainsi que sur le lien entre le cadre de modélisation de René Thomas et le cadre différentiel. Pour cette partie, indépendante de la première, nous considérons les valeurs des paramètres suivantes : $K_V = 0$, $K_{V,N} = 2$, $K_N = 0$, $K_{N,i} = 1$, $K_{N,V} = 1$, $K_{N,iV} = 1$, $K_U = 0$ et $K_{U,N} = 1$.
Ces paramètres mènent au graphe de transitions représenté ci-contre.



Exercice 7 : Dans ce contexte, on souhaite étudier la boucle négative entre les variables V et N passant par le multiplexe i.

1. Énumérez les états caractéristiques associés à cette boucle négative.
2. Pour chaque état caractéristique, écrivez la formule CTL qui exprime qu'il est possible de tourner autour de l'état caractéristique. On exprimera qu'à partir d'un des états réguliers adjacents à l'état caractéristique, il existe un chemin qui le quitte puis revient au point de départ sans jamais sortir de l'ensemble des 4 états réguliers adjacents.
3. Pour chacune des deux formules obtenues à la question précédente, dites si elle est satisfaite pour le modèle de cette partie 2.
4. Est-ce que la boucle est fonctionnelle ? Si oui, autour de quel état caractéristique ?

Exercice 8 : Ecrivez en CTL les trois propriétés suivantes :

1. Tôt ou tard, le système arrivera à une situation où une minorité de la population se considèrera en situation précaire.
2. Si les ultra-riches sont assez puissants pour contrôler en bonne partie les médias, alors au bout d'un moment, la politique sera néolibérale et ne pourra plus jamais devenir solidaire.
3. L'espoir est toujours possible : à partir d'une situation où une majorité écrasante de la population se considère en situation précaire, il est toujours possible d'arriver à une situation où une minorité de la population se considère en situation précaire.

Pour chacune d'elles, dites si elle est satisfaite dans le modèle considéré dans cette partie 2. Justifiez vos réponses.

Exercice 9 :

1. Écrivez la formule CTL qui exprime le fait que si le contrôle des ultra-riches sur les médias reste strictement encadré *ad vitam eternam* (la variable U reste toujours à 0), il y a un cycle qui fait alterner la politique, autrement dit,
   - que si le système part d'un état où la politique est solidaire et où les ultra-riches n'ont pas le contrôle sur les médias, il existe un chemin qui atteint un état où la politique est néolibérale sans jamais passer par un état où les médias sont contrôlés par des ultra-riches, et
   - que si le système part d'un état où la politique est néolibérale et où les ultra-riches n'ont pas le contrôle sur les médias, il existe un chemin qui atteint un état où la politique est solidaire sans jamais passer par un état où les médias sont contrôlés par des ultra-riches.

2. Sans utiliser l'algorithme de model-checking, vérifiez si la formule donnée est satisfaite par le graphe de transitions de la partie 2. Justifiez votre réponse en vous appuyant sur les propriétés du graphe de transitions.
3. Traduisez si nécessaire la formule en une formule équivalente mais sous une forme qui facilite le model-checking.
4. En étiquetant les états successivement par les sous-formules de votre formule traduite, comme le fait l'algorithme basique de model-checking, déterminez tous les états qui satisfont cette formule.
   Indication : pour éviter de surcharger la figure, vous pouvez en faire une par sous-formule en utilisant la feuille en annexe. Il suffit alors d'indiquer la sous-formule considérée et de hachurer les états qu'elle étiquette par l'algorithme de model-checking. La feuille contient assez de figures successives utiles, sinon plus.

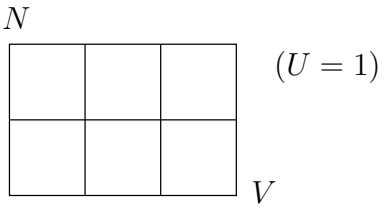
La suite de cette partie a pour but de construire un modèle continu de ce système. Nous utiliserons le cadre de modélisation par équations différentielles linéaires par morceau.

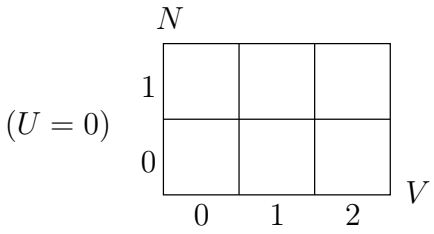
Exercice 10 : Ecrivez les équations différentielles linéaires par morceau régissant V, N et U correspondant au système décrit par la figure du début de l'énoncé. On notera x_v, x_n et x_u les variables représentant des indicateurs continus du niveau de vie V, du type de gouvernement N dont la politique peut aller d'une politique solidaire à une politique néolibérale (il y a un certain continuum) et du contrôle plus ou moins forts des médias par les ultra-riches. De plus on notera les seuils de déclenchement des interactions θ_V^1, θ_V^2, θ_N^1 et θ_U^1 ; les constantes qui contribuent positivement à la dérivée des variables (les équivalents des taux de *synthèse* dans le cas des réseaux génétiques) seront notées κ avec des indices convenables et les constantes de «*dégradation*» γ_V, γ_N et γ_U.

Exercice 11 : Ecrivez, *et justifiez*, les contraintes sur les paramètres du système d'équations différentielles pour que le modèle soit cohérent avec le modèle discret considéré dans cette partie 2.

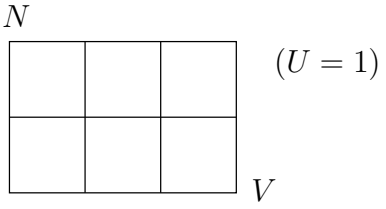
Annexe de la *Partie 1*

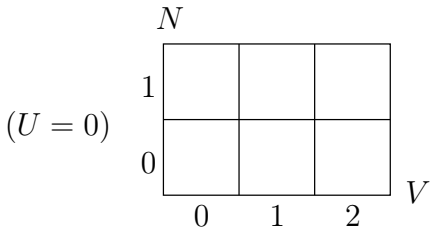
Si vous utilisez cette feuille, insérez-la dans la copie double de la Partie 1.





(Ce doublon est disponible en cas d'erreur sur la première version).
Si vous l'utilisez, rayez très clairement la version erronée !





Annexe de la *Partie 2*

Si vous utilisez cette feuille, insérez-la dans la copie double de la Partie 2.

