Logique avancée

7 - Automates de Büchi et mots infinis

Master Info Nice Sophia Antipolis
E. Lozes

20 mai 2019

Contenu de la séance

- mots infinis
- langages réguliers de mots infinis
- automates de Büchi
- automates co-Büchi
- propriétés de clôture (sauf complémentation)

Mots infinis

Définition

Un mot infini sur l'alphabet Σ est une suite infinie $a_0 a_1 a_2 \ldots$ de symboles.

Conventions

On notera

- Σ^ω l'ensemble des mots infinis sur l'alphabet Σ
- $|w|_a$: le nombre d'occurrences du symbole a dans le mot w remarque : on peut avoir $|w|_a = \infty$, et même on a $|w|_a = \infty$ pour au moins un $a \in \Sigma$.
- $u.v$: la concaténation d'un mot fini $u \in \Sigma^*$ et d'un mot infini $v \in \Sigma^\omega$

Langages de mots infinis

Définition

Un langage de mots infinis est une partie $L \subseteq \Sigma^\omega$.

Opérations sur les langages

- $U.V$: la concaténation de langages, où $U \subseteq \Sigma^*$ et $V \subseteq \Sigma^\omega$.

$$U.V \triangleq \{u.v : u \in U, v \in V\}$$

- L^ω : l'ω-itération, où $L \subseteq \Sigma^*$

$$L^\omega \triangleq \{w_0.w_1.w_2 \ldots : w_i \in L \text{ pour tout } i, w_i \neq \epsilon\}$$

Objectif : généraliser ce qu'on vu sur les mots finis

Rappel

Soit $L \subseteq \Sigma^*$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- L est régulier
- L est reconnu par un NFA
- L est défini par une formule de weak MSO

La généralisation de weak MSO aux mots infinis est simplement MSO sur les mots infini. Exemple de formule

$$\exists X.\forall x.P_a(x) \Leftrightarrow X(x)$$

On quantifie sur des sous-ensemble finis ou infinis de $\mathbb{N}$.
Pour le reste, c'est moins clair comment généraliser :

- quelle est la bonne notion de langage *régulier* de mots infinis ?
- comment un automate peut-il accepter un mot infini ?

Les langages ω-réguliers

Définition

$L \subseteq \Sigma^\omega$ est (ω-)régulier s'il est de la forme

$$L = \bigcup_{i=0\dots n} U_i V_i^\omega$$

où $n \geq 0$ et $U_0, V_0, U_1, V_1, \dots, U_n, V_n$ sont des langages réguliers de mots finis, tels que $\epsilon \notin V_i$.

<u>Exemple :</u> ($\Sigma = \{a, b, c\}$)

- $L = \{w : |w|_a \neq \infty\}$ est ω-régulier, car $L = \Sigma^*.(b+c)^\omega$
- $L = \{w : |w|_a = \infty\}$ est ω-régulier, car $L = \{\epsilon\}.(\Sigma^* a)^\omega$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_1 = (\Sigma^* a)^\omega \cup \Sigma^*.(a+c)^\omega$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_1 = (\Sigma^* a)^\omega \cup \Sigma^*.(a + c)^\omega$

2. $L_2 = \{w : |w|_a = \infty \text{ et } |w|_b \neq \infty\}$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_1 = (\Sigma^* a)^\omega \cup \Sigma^*.(a + c)^\omega$

2. $L_2 = \{w : |w|_a = \infty \text{ et } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_2 = \Sigma^*.(ac^*)^\omega$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_1 = (\Sigma^* a)^\omega \cup \Sigma^*.(a + c)^\omega$

2. $L_2 = \{w : |w|_a = \infty \text{ et } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_2 = \Sigma^*.(ac^*)^\omega$

3. $\text{Period}_n = \{www\dots : w \in \Sigma^n\}$

Exercice

Montrer que les langages suivants sont ω-réguliers

1. $L_1 \triangleq \{w : |w|_a = \infty \text{ ou } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_1 = (\Sigma^* a)^\omega \cup \Sigma^*.(a+c)^\omega$

2. $L_2 = \{w : |w|_a = \infty \text{ et } |w|_b \neq \infty\}$
   $L_2 = \Sigma^*.(ac^*)^\omega$

3. $\text{Period}_n = \{www\ldots : w \in \Sigma^n\}$

$$\text{Period}_n = \bigcup_{w \in \Sigma^n} \epsilon.\{w\}^\omega$$

Propriétés de clôture

Théorème

Si $U \subseteq \Sigma^*$ est régulier, et si $V \subseteq \Sigma^\omega$ est ω-régulier ist, alors UV est ω-régulier.

Théorème

Si $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ sont réguliers, alors $L_1 \cup L_2$ est aussi ω-régulier.

Automates acceptants des mots infinis

On voit bien comment on peut généraliser la notion d'exécution à un mot infini en considérant une suite infinie d'états... mais comment « généraliser » la condition d'acceptation ?

Il y a plusieurs réponses possibles, plus ou moins équivalentes. La plus simple, et la seule que l'on verra, se nomme condition de Büchi.

Condition de Büchi

Une exécution est acceptante si

l'exécution passe infiniment souvent par un état acceptant

Automates de Büchi

Définition

Un automate de Büchi non-déterministe (NBA) est un tuple

$$\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F),$$

où Q est un ensemble fini d'états, Σ un alphabet fini, $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ une fonction de transition, $q_I \in Q$ un état initial, et F l'ensemble des états acceptants.

Un automate de Büchi déterministe est un tuple

$$\mathcal{A}(Q, \Sigma, \delta, q_I, F),$$

où $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ est une fonction de transition déterministe.

Condition de Büchi

Une exécution ρ d'un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ sur le mot $w = a_0 a_1 a_2 \cdots \in \Sigma^\omega$ est une suite

$$\rho \quad = \quad q_0 \xrightarrow{a_0} q_1 \xrightarrow{a_1} q_2 \xrightarrow{a_2} \ldots$$

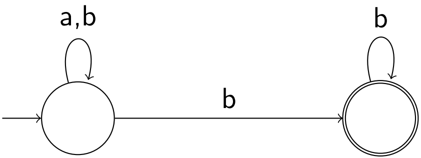
Soit $\mathrm{Inf}(\rho)$ l'ensemble des états q tels que $|\rho|_q = \infty$.

On a nécessairement $\mathrm{Inf}(\rho) \neq \emptyset$.

Définition

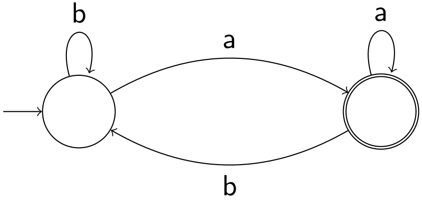
Une exécution ρ est acceptante si $\mathrm{Inf}(\rho) \cap F \neq \emptyset$.

Exemple de NBA



$$L(\mathcal{A}_1) = \{w \in \Sigma^\omega : |w|_a \neq \infty\} = L_1$$

Exemple de DBA



$$L(\mathcal{A}_2) = \{w \in \Sigma^\omega : |w|_a = \infty\} = L_2$$

Exercices

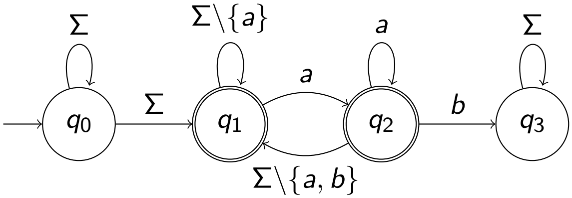
1) Dessinez un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ tel que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}) &= \{w \ : \ ab \text{ apparait un nombre fini de fois dans } w\} \\ &= \Sigma^\omega \setminus \Sigma^*.(\Sigma^* ab)^\omega. \end{aligned}$$

Exercices

1) Dessinez un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ tel que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}) &= \{w \ : \ ab \text{ apparait un nombre fini de fois dans } w\} \\ &= \Sigma^\omega \setminus \Sigma^*.(\Sigma^* ab)^\omega. \end{aligned}$$

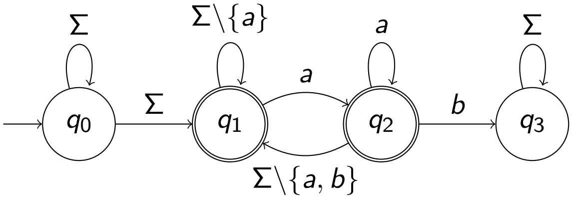


2) Quel est le langage reconnu par l'automate dual
$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$?

Exercices

1) Dessinez un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ tel que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}) &= \{w \ : \ ab \text{ apparait un nombre fini de fois dans } w\} \\ &= \Sigma^\omega \setminus \Sigma^*.(\Sigma^* ab)^\omega. \end{aligned}$$

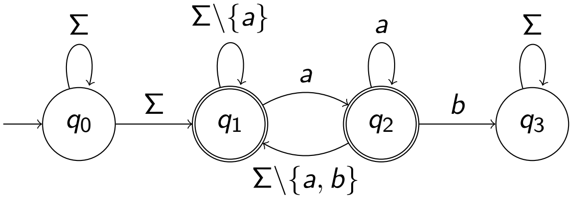


2) Quel est le langage reconnu par l'automate dual $\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \setminus F)$?

Exercices

1) Dessinez un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ tel que

$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}) &= \{w \;:\; ab \text{ apparait un nombre fini de fois dans } w\} \\ &= \Sigma^\omega \setminus \Sigma^*.(\Sigma^* ab)^\omega. \end{aligned}$$

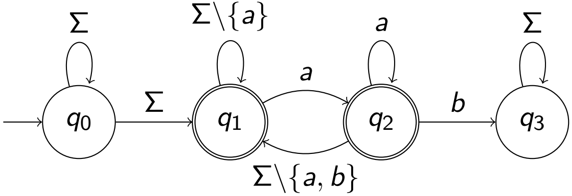


2) Quel est le langage reconnu par l'automate dual
$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \setminus F)$?
$L(\mathcal{A}') = \Sigma^\omega$, car $q_0 \xrightarrow{a_0} q_0 \xrightarrow{a_1} \ldots$ est acceptant.

Exercices

1) Dessinez un NBA $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, F)$ tel que

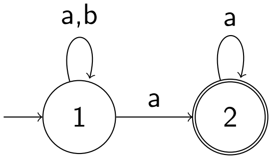
$$\begin{aligned} L(\mathcal{A}) &= \{w \;:\; ab \text{ apparait un nombre fini de fois dans } w\} \\ &= \Sigma^\omega \setminus \Sigma^*.(\Sigma^* ab)^\omega. \end{aligned}$$



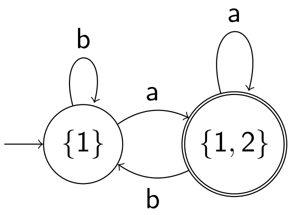
2) Quel est le langage reconnu par l'automate dual
$\mathcal{A}' = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$?
$L(\mathcal{A}') = \Sigma^\omega$, car $q_0 \xrightarrow{a_0} q_0 \xrightarrow{a_1} \dots$ est acceptant.

Dual$\neq$complementation, sans surprise, comme pour les NFA.

La construction des parties et les NBA



« un nombre fini de b »



« une infinité de a »

Les NBA ne peuvent pas être déterminisés

Théorème

Il n'existe pas de DBA $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = (a + b)^* a^\omega$.

Autrement dit le NBA vu en exemple précédemment n'a pas d'équivalent déterministe.

Les NBA ne peuvent pas être déterminisés

Théorème

Il n'existe pas de DBA $\mathcal{A}$ tel que $L(\mathcal{A}) = (a+b)^* a^\omega$.

Autrement dit le NBA vu en exemple précédemment n'a pas d'équivalent déterministe.

<u>Preuve</u> : par contradiction. Soit $\mathcal{A}$ un DBA tel que $L(\mathcal{A}) = (a+b)^* a^\omega$. Soit $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$ défini comme suit

1. $a_0 = a$
2. $a_{i+1} = a$ si $\delta^*(q_I, a_0 \dots a_i) \notin F$,
3. $a_{i+1} = b$ sinon

Si w n'est pas accepté, alors au bout d'un certain rang (2) est le seul cas qui se produit, donc $w \in (a+b)^* a^\omega$. Contradiction.
Si w est accepté, alors (3) se produit infiniment souvent, autrement dit $w \notin (a+b)^* a^\omega$. Contradiction.

Propriétés de clôture : union

Théorème

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux NBA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

Preuve : c'est la même construction que pour les NFA.

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}} \uplus \{q_I^{\mathcal{C}}\}$

Propriétés de clôture : union

Théorème

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux NBA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

<ins>Preuve</ins> : c'est la même construction que pour les NFA.

- $Q_\mathcal{C} = Q_\mathcal{A} \uplus Q_\mathcal{B} \uplus \{q_I^\mathcal{C}\}$
- $\delta_\mathcal{C}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a)$ si $q \in Q_\mathcal{A}$
  $\delta_\mathcal{C}(q, a) = \delta_\mathcal{B}(q, a)$ si $q \in Q_\mathcal{B}$
  $\delta_\mathcal{C}(q_I^\mathcal{C}, a) = \delta_\mathcal{A}(q_I^\mathcal{A}, a) \cup \delta_\mathcal{B}(q_I^\mathcal{B}, a)$

Propriétés de clôture : union

Théorème

Soient $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ deux NBA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$.

Preuve : c'est la même construction que pour les NFA.

- $Q_\mathcal{C} = Q_\mathcal{A} \uplus Q_\mathcal{B} \uplus \{q_I^\mathcal{C}\}$
- $\delta_\mathcal{C}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a)$ si $q \in Q_\mathcal{A}$
  $\delta_\mathcal{C}(q, a) = \delta_\mathcal{B}(q, a)$ si $q \in Q_\mathcal{B}$
  $\delta_\mathcal{C}(q_I^\mathcal{C}, a) = \delta_\mathcal{A}(q_I^\mathcal{A}, a) \cup \delta_\mathcal{B}(q_I^\mathcal{B}, a)$
- $F_\mathcal{C} = F_\mathcal{A} \cup F_\mathcal{B}$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} =$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} =$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}}$
- $q_I^{\mathcal{C}} = q_I^{\mathcal{A}}$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}}$
- $q_I^{\mathcal{C}} = q_I^{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{A}} \backslash F_{\mathcal{A}}$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}}$
- $q_I^{\mathcal{C}} = q_I^{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{A}} \backslash F_{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a) \cup \delta_{\mathcal{B}}(q_I^{\mathcal{B}}, a)$ si $q \in F_{\mathcal{A}}$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}}$
- $q_I^{\mathcal{C}} = q_I^{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{A}} \backslash F_{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a) \cup \delta_{\mathcal{B}}(q_I^{\mathcal{B}}, a)$ si $q \in F_{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{B}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{B}}$

Propriétés de clôture : concaténation

Théorème

Soient $\mathcal{A}$ un NFA et $\mathcal{B}$ un NBA. Il existe un *NBA* $\mathcal{C}$ tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}).L(\mathcal{B})$.

Preuve : même construction que pour les NFA

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \uplus Q_{\mathcal{B}}$
- $q_I^{\mathcal{C}} = q_I^{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{A}} \backslash F_{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{A}}(q, a) \cup \delta_{\mathcal{B}}(q_I^{\mathcal{B}}, a)$ si $q \in F_{\mathcal{A}}$
- $\delta_{\mathcal{C}}(q, a) = \delta_{\mathcal{B}}(q, a)$ si $q \in Q_{\mathcal{B}}$
- $F_{\mathcal{C}} = F_{\mathcal{B}}$

Propriétés de clôture : ω-itération

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{B}$ tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^{\omega}$

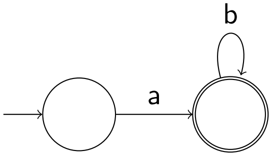
Preuve : exercice.

Propriétés de clôture : ω-itération

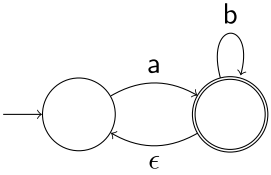
Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{B}$ tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^{\omega}$

<u>Preuve</u> : exercice.
Une idée qui ne marche pas : rajouter simplement une ϵ-Transition des états finaux vers l'état initial. Contre-exemple



NFA $\mathcal{A}$



NBA $\mathcal{B}$

$L(\mathcal{A}) = ab^*$

$L(\mathcal{B}) = a(a+b)^{\omega} \neq L(\mathcal{A})^{\omega}$

Propriétés de clôture : ω-itération

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{B}$ tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$

Preuve : exercice.
Une solution : accepter « sur » l'ϵ-transition.

- $Q_\mathcal{B} = Q_\mathcal{A} \cup \{q_\epsilon\}$
- $q_I^\mathcal{B} = q_I^\mathcal{A}$

Propriétés de clôture : ω-itération

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{B}$ tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$

Preuve : exercice.
Une solution : accepter « sur » l'ϵ-transition.

- $Q_\mathcal{B} = Q_\mathcal{A} \cup \{q_\epsilon\}$
- $q_I^\mathcal{B} = q_I^\mathcal{A}$
- $\delta_\mathcal{B}(q_\epsilon, a) = \delta_\mathcal{A}(q_I^\mathcal{A}, a) \cup \{q_\epsilon \mid q_I^\mathcal{A} \in \delta(q_I^\mathcal{A}, a)\}$
  $\delta_\mathcal{B}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a)$ si $\delta_\mathcal{A}(q, a) \cap F_\mathcal{A} = \emptyset$
  $\delta_\mathcal{B}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a) \cup \{q_\epsilon\}$ sinon.

Propriétés de clôture : ω-itération

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ un NFA. Alors il existe un *NBA* $\mathcal{B}$ tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A})^\omega$

Preuve : exercice.
Une solution : accepter « sur » l'ϵ-transition.

- $Q_\mathcal{B} = Q_\mathcal{A} \cup \{q_\epsilon\}$
- $q_I^\mathcal{B} = q_I^\mathcal{A}$
- $\delta_\mathcal{B}(q_\epsilon, a) = \delta_\mathcal{A}(q_I^\mathcal{A}, a) \cup \{q_\epsilon \mid q_I^\mathcal{A} \in \delta(q_I^\mathcal{A}, a)\}$
  $\delta_\mathcal{B}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a)$ si $\delta_\mathcal{A}(q, a) \cap F_\mathcal{A} = \emptyset$
  $\delta_\mathcal{B}(q, a) = \delta_\mathcal{A}(q, a) \cup \{q_\epsilon\}$ sinon.
- $F_\mathcal{B} = \{q_\epsilon\}$

Regulier $\Leftrightarrow$ reconnaissable par NBA

Théorème

Soit $L \subseteq \Sigma^\omega$ un ω-langage. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L est régulier.
2. il existe un NBA $\mathcal{A}$ tel que $L = L(\mathcal{A})$.

Regulier $\Leftrightarrow$ reconnaissable par NBA

Théorème

Soit $L \subseteq \Sigma^\omega$ un ω-langage. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L est régulier.
2. il existe un NBA $\mathcal{A}$ tel que $L = L(\mathcal{A})$.

Preuve :

(1)$\Rightarrow$(2) $L = \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} U_i.V_i^\omega$, et les propriétés de clôture des NBA.

(2)$\Rightarrow$(1) $L(\mathcal{A}) = \displaystyle\bigcup_{q \in F} L_{q_I,q}.L_{q,q}^\omega$, où $L_{q,q'} = \{w : q \xrightarrow{w} q'\}$.

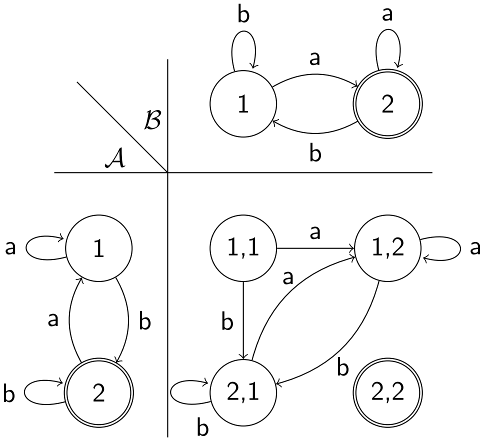
Propriétés de clôture : intersection

Théorème

Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux NBA. Alors il existe un NBA $\mathcal{C}$, tel que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B})$

Difficulté

Le produit synchrone $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ ne marche pas !



$$L(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = \emptyset \qquad L(\mathcal{A}) \cap L(\mathcal{B}) = \{w : |w|_a = |w|_b = \infty\} \neq \emptyset$$

Preuve

Intuition

L'automate attend de passer par un état acceptant de $\mathcal{A}$. Puis il se souvient d'avoir vu un état acceptant de $\mathcal{A}$ et attend de visiter un état acceptant de $\mathcal{B}$. Lorsque cela se produit, il passe par un état acceptant (de lui-même) et il se remet en attente d'un état acceptant de $\mathcal{A}$.

Définition formelle

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \times \{0, 1, 2\}$

Preuve

Intuition

L'automate attend de passer par un état acceptant de $\mathcal{A}$. Puis il se souvient d'avoir vu un état acceptant de $\mathcal{A}$ et attend de visiter un état acceptant de $\mathcal{B}$. Lorsque cela se produit, il passe par un état acceptant (de lui-même) et il se remet en attente d'un état acceptant de $\mathcal{A}$.

Définition formelle

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \times \{0, 1, 2\}$
- $\delta_{\mathcal{C}}\big((p, q, i), a\big) = \{(p', q', j) : p' \in \delta_{\mathcal{A}}(p, a), q' \in \delta_{\mathcal{B}}(q, a)\}$, où

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } p' \in F_{\mathcal{A}}, \text{ si } i = 1 \text{ et } q' \notin F_{\mathcal{B}} \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ et } q' \in F_{\mathcal{B}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Preuve

Intuition

L'automate attend de passer par un état acceptant de $\mathcal{A}$. Puis il se souvient d'avoir vu un état acceptant de $\mathcal{A}$ et attend de visiter un état acceptant de $\mathcal{B}$. Lorsque cela se produit, il passe par un état acceptant (de lui-même) et il se remet en attente d'un état acceptant de $\mathcal{A}$.

Définition formelle

- $Q_\mathcal{C} = Q_\mathcal{A} \times Q_\mathcal{B} \times \{0, 1, 2\}$
- $\delta_\mathcal{C}\big((p, q, i), a\big) = \{(p', q', j) : p' \in \delta_\mathcal{A}(p, a), q' \in \delta_\mathcal{B}(q, a)\}$, où

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } p' \in F_\mathcal{A}, \text{ si } i = 1 \text{ et } q' \notin F_\mathcal{B} \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ et } q' \in F_\mathcal{B} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $F_\mathcal{C} =$

Preuve

Intuition

L'automate attend de passer par un état acceptant de $\mathcal{A}$. Puis il se souvient d'avoir vu un état acceptant de $\mathcal{A}$ et attend de visiter un état acceptant de $\mathcal{B}$. Lorsque cela se produit, il passe par un état acceptant (de lui-même) et il se remet en attente d'un état acceptant de $\mathcal{A}$.

Définition formelle

- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \times \{0, 1, 2\}$
- $\delta_{\mathcal{C}}\big((p, q, i), a\big) = \{(p', q', j) : p' \in \delta_{\mathcal{A}}(p, a), q' \in \delta_{\mathcal{B}}(q, a)\}$, où

$$j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } p' \in F_{\mathcal{A}}, \text{ si } i = 1 \text{ et } q' \notin F_{\mathcal{B}} \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ et } q' \in F_{\mathcal{B}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $F_{\mathcal{C}} =$

Preuve

Intuition

L'automate attend de passer par un état acceptant de $\mathcal{A}$. Puis il se souvient d'avoir vu un état acceptant de $\mathcal{A}$ et attend de visiter un état acceptant de $\mathcal{B}$. Lorsque cela se produit, il passe par un état acceptant (de lui-même) et il se remet en attente d'un état acceptant de $\mathcal{A}$.

Définition formelle

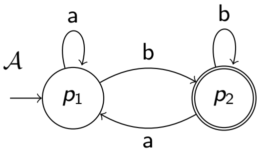
- $Q_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \times \{0, 1, 2\}$
- $\delta_{\mathcal{C}}\big((p, q, i), a\big) = \{(p', q', j) : p' \in \delta_{\mathcal{A}}(p, a), q' \in \delta_{\mathcal{B}}(q, a)\}$, où

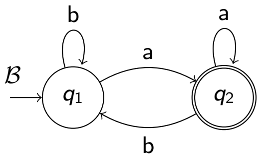
$$j = \begin{cases} 1 & \text{si } i = 0 \text{ et } p' \in F_{\mathcal{A}}, \text{ si } i = 1 \text{ et } q' \notin F_{\mathcal{B}} \\ 2 & \text{si } i = 1 \text{ et } q' \in F_{\mathcal{B}} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- $F_{\mathcal{C}} = Q_{\mathcal{A}} \times Q_{\mathcal{B}} \times \{2\}$

Exercice

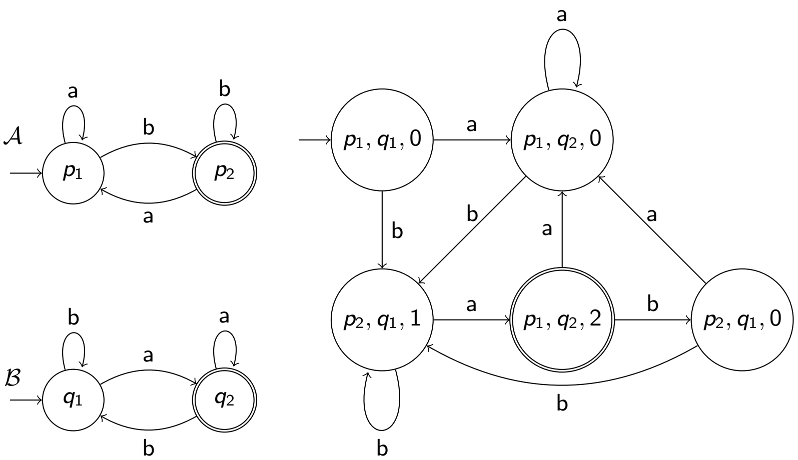
Définissez le NBA de l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme ci-dessous.





Exercice

Définissez le NBA de l'intersection de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ comme ci-dessous.



Propriété de clôture : complémentation ?

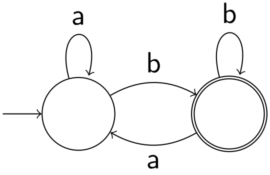
Pourquoi la complémentation de NBA n'est pas simple

- pas de déterminisation
- le dual d'un NBA reconnait pas le complémentaire

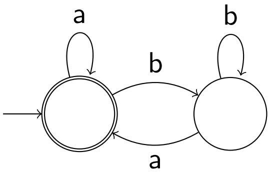
Propriété de clôture : complémentation ?

Pourquoi la complémentation de NBA n'est pas simple

- pas de déterminisation
- le dual d'un NBA reconnait pas le complémentaire
- ... et d'ailleurs le dual d'un DBA non plus !



$\mathcal{A}$



$\mathcal{B}$

$L(\mathcal{A}) = (a^* b)^\omega \qquad L(\mathcal{B}) = (b^* a)^\omega$

Condition de co-Büchi

Analyse du problème avec l'exemple précédent

w n'est pas accepté par le DBA $\mathcal{A}$ ssi *l'exécution* sur w ne visite pas un état acceptant infiniment souvent.

Condition de co-Büchi

$\ll$ à partir d'un certain rang, uniquement des états acceptants $\gg$

Condition de co-Büchi

Analyse du problème avec l'exemple précédent

w n'est pas accepté par le DBA $\mathcal{A}$ ssi *l'exécution* sur w ne visite pas un état acceptant infiniment souvent.

Condition de co-Büchi

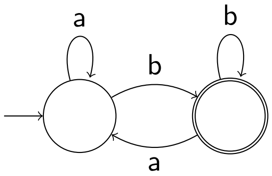
« à partir d'un certain rang, uniquement des états acceptants »

Automate co-Büchi

Un automate co-Büchi $\mathcal{A}$ (NcoBA/DcoBA) est syntaxiquement la même chose qu'un NBA/DBA, mais avec une condition de co-Büchi pour accepter.

$$L(\mathcal{A}) = \{w : \text{il existe une exécution } \rho \text{ telle que } \mathrm{Inf}(\rho) \subseteq F\}.$$

Exemple de NcoBA



NcoBA $\mathcal{A}$

$$L(\mathcal{A}) = (a+b)^* b^\omega$$

Complémentation d'un DBA

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.

Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Complémentation d'un DBA

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.
Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u> :
Soit le DcoBA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$.
Alors $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\overline{\mathcal{A}})$.
En effet, pour tout $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$

$$w \notin L(\mathcal{A}) \;\Leftrightarrow\; \text{non}\Big(\delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) \in F \text{ pour une infinité de } i \geq 0\Big)$$

Complémentation d'un DBA

Théorème
Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.
Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u> :
Soit le DcoBA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$.
Alors $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\overline{\mathcal{A}})$.
En effet, pour tout $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$

$$\begin{aligned} w \notin L(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \text{non}\Big(\delta^*(q_I, a_0 a_1 \dots a_i) \in F \text{ pour une infinité de } i \geq 0\Big) \\ &\Leftrightarrow \delta^*(q_I, a_0 a_1 \dots a_i) \in F \text{ pour un nombre fini de } i \geq 0 \end{aligned}$$

Complémentation d'un DBA

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.
Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Preuve :
Soit le DcoBA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$.
Alors $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\overline{\mathcal{A}})$.
En effet, pour tout $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$

$$\begin{aligned} w \notin L(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \text{non}\Big(\delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) \in F \text{ pour une infinité de } i \geq 0\Big) \\ &\Leftrightarrow \delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) \in F \text{ pour un nombre fini de } i \geq 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{Inf}\{\delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) : i = 0, 1, \ldots\} \subseteq Q \backslash F \end{aligned}$$

Complémentation d'un DBA

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.
Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u> :
Soit le DcoBA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$.
Alors $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\overline{\mathcal{A}})$.
En effet, pour tout $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$

$$
\begin{aligned}
w \notin L(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \text{non}\Big(\delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) \in F \text{ pour une infinité de } i \geq 0\Big) \\
&\Leftrightarrow \delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) \in F \text{ pour un nombre fini de } i \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \mathrm{Inf}\{\delta^*(q_I, a_0 a_1 \ldots a_i) : i = 0, 1, \ldots\} \subseteq Q \backslash F \\
&\Leftrightarrow w \in \overline{\mathcal{A}}
\end{aligned}
$$

Complémentation d'un DBA

Théorème

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un DBA.
Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Preuve :
Soit le DcoBA $\overline{\mathcal{A}} = (Q, \Sigma, \delta, q_I, Q \backslash F)$.
Alors $\Sigma^\omega \backslash L(\mathcal{A}) = L(\overline{\mathcal{A}})$.
En effet, pour tout $w = a_0 a_1 a_2 \in \Sigma^\omega$

$$\begin{aligned}
w \notin L(\mathcal{A}) \;&\Leftrightarrow\; \text{non}\Big(\delta^*(q_I, a_0 a_1 \dots a_i) \in F \text{ pour une infinité de } i \geq 0\Big) \\
&\Leftrightarrow\; \delta^*(q_I, a_0 a_1 \dots a_i) \in F \text{ pour un nombre fini de } i \geq 0 \\
&\Leftrightarrow\; \mathrm{Inf}\{\delta^*(q_I, a_0 a_1 \dots a_i) : i = 0, 1, \dots\} \subseteq Q \backslash F \\
&\Leftrightarrow\; w \in \overline{\mathcal{A}}
\end{aligned}$$

Il nous reste à montrer qu'on peut convertir un DcoBA en un NBA.

Convertir un NcoBA en NBA

Satz

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un NcoBA. Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

Convertir un NcoBA en NBA

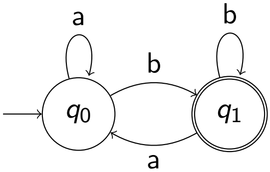
Satz

Soit $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_i, F)$ un NcoBA. Alors il existe un NBA $\mathcal{B}$, tel que $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$.

<u>Preuve</u> :
De manière non-déterministe, à partir d'un certain rang, l'automate ne permet plus que des transitions qui vont vers un état acceptant.

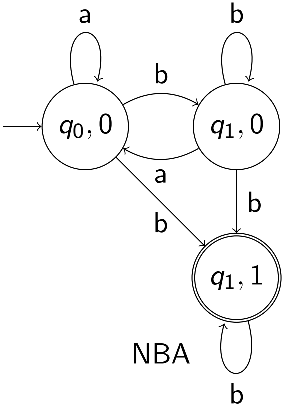
- $Q_{\mathcal{B}} = \{\langle q, 0\rangle : q \in Q\} \cup \{\langle q, 1\rangle : q \in F\}$
- $q_I^{\mathcal{B}} = \langle q_I^{\mathcal{A}}, 0\rangle$
- $\delta_{\mathcal{B}}(\langle q, 0\rangle, a) = \{\langle \delta(q, a), 0\rangle, \langle \delta(q, a), 1\rangle\} \cap Q_{\mathcal{B}}$
  $\delta_{\mathcal{B}}(\langle q, 1\rangle, a) = \{\langle \delta(q, a), 1\rangle\} \cap Q_{\mathcal{B}}$
- $F_{\mathcal{B}} = \{\langle q, 1\rangle : q \in F\}$

Exemple



NcoBA $\mathcal{A}$

$L(\mathcal{A}) = (a+b)^* b^\omega$



NBA

Résumé

- Condition de Büchi : *passer infiniment souvent par un état acceptant*
- co-Büchi Bedingung : *passer uniquement par des états acceptants à partir d'un certain rang*

- La complémentation d'un NBA n'est pas aussi facile que celle d'un NFA
  - Les NBA ne sont pas déterminisables
  - Le complémentaire d'un DBA est un DcoBA
- On peut complémenter un DBA
  - car un NcoBA peut être converti en un NBA

- prochain épisode : la complémentation des NBA