

# Logique avancée

Examen blanc

M1 Informatique – Université Nice Sophia Antipolis

**Durée :** 30 minutes.

- Aucun document ni aucune machine ne sont autorisés.
- Les téléphones doivent être rangés.
- Les réponses sont à reporter sur les feuilles de réponse en fin de sujet. Ces feuilles sont à dégrafer du sujet et à rendre en fin d'épreuve sans agrafe.
- Les réponses doivent être écrites lisiblement. Le correcteur blanc et l'effaceur sont autorisés, ils peuvent être utilisés pour décocher une case cochée par erreur, mais dans ce cas, n'essayez pas de redessiner la case.
- Pour les QCM, cochez la case avec une croix au **stylo noir**, ou à défaut bleu.

## QCM mots finis (7 points)

**Question 1** Parmi les assertions suivantes, laquelle est vraie ?

- A tout langage régulier contient un nombre fini de mots
- B tout langage  $L \subseteq \Sigma^*$  qui contient un nombre infini de mots est régulier
- C tout langage régulier contient un nombre infini de mots (lemme de pompage)
- D tout langage  $L \subseteq \Sigma^*$  qui contient un nombre fini de mots est régulier

**Question 2** Parmi les assertions suivantes, laquelle est fausse ?

- A si  $L$  est reconnu par un AFA avec  $n$  états, alors  $\Sigma^* \setminus L$  est reconnu par un AFA avec  $n$  états
- B pour un langage  $L$  bien choisi, le DFA minimal qui reconnaît  $L$  contient plus d'états que certains NFA qui reconnaissent  $L$ .
- C le langage reconnu par un AFA est toujours régulier
- D si  $L \subseteq L'$  et  $L$  est reconnaissable par un DFA, alors  $L'$  est reconnaissable par un NFA.

**Question 3** Parmi les formules de weak MSO suivantes, laquelle n'est pas équivalente aux deux autres ?

- A  $\exists X. \forall y. \forall z. X(y) \Rightarrow (y < z \wedge X(z))$
- B  $\exists X. \forall y. \forall z. (X(y) \wedge y < z) \Rightarrow X(z)$
- C  $\exists X. \forall y. \forall z. X(y) \Rightarrow (y < z \Rightarrow X(z))$

**Question 4** L'universalité d'un NFA peut être décidée

- A NP : en temps non-déterministe polynomial, mais a priori pas en temps déterministe polynomial
- B PSPACE : en espace polynomial mais a priori pas en temps non-déterministe polynomial
- C EXPTIME : en temps déterministe exponentiel, mais a priori pas en espace polynomial
- D P : en temps déterministe polynomial

**Question 5** L'universalité d'un DFA peut être décidée

- A NP : en temps non-déterministe polynomial, mais a priori pas en temps déterministe polynomial
- B P : en temps déterministe polynomial
- C EXPTIME : en temps déterministe exponentiel, mais a priori pas en espace polynomial
- D PSPACE : en espace polynomial mais a priori pas en temps non-déterministe polynomial

**Question 6** Le problème du mot pour un DFA peut être décidé

- A NP : en temps non-déterministe polynomial, mais a priori pas en temps déterministe polynomial
- B PSPACE : en espace polynomial mais a priori pas en temps non-déterministe polynomial
- C P : en temps déterministe polynomial
- D EXPTIME : en temps déterministe exponentiel, mais a priori pas en espace polynomial

**Question 7** Le problème du mot pour un NFA peut être décidé

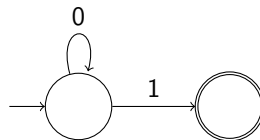
- A NP : en temps non-déterministe polynomial, mais a priori pas en temps déterministe polynomial
- B P : en temps déterministe polynomial
- C EXPTIME : en temps déterministe exponentiel, mais a priori pas en espace polynomial
- D PSPACE : en espace polynomial mais a priori pas en temps non-déterministe polynomial

**QCM Presburger (3 points)**

**Question 8** Parmi les propriétés suivantes, laquelle est exprimable dans l'arithmétique de Presburger ?

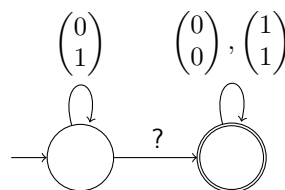
- A  $x=y+1$  modulo 2
- B  $x$  est une puissance de 2
- C  $x$  est un carré

**Question 9** Quel est l'ensemble des entiers  $x$  dont la représentation binaire avec bit de poids faible en tête est reconnu par cet automate ?



- A  $x$  est une puissance de 2
- B  $x=1$  modulo 2
- C  $x$  est un carré

**Question 10** On se donne l'alphabet  $\Sigma = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$  avec la première ligne qui code un bit de  $x$  et la seconde un bit de  $y$ . Comment compléter la transition manquante de l'automate ci-dessous pour qu'il reconnaisse le langage des codages de la relation  $x = y + 1$  ?



**Automates alternants (3 points)**

**Question 11** On pose  $\Sigma = \{0, 1\}$ ,  $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_{\perp}\}$ ,  $q_I = q_0$ ,  $F = Q \setminus \{q_{\perp}\}$ , et  $\delta$  :

	0	1		0	1
$q_0$	$q_0 \wedge q_1$	$q_0 \wedge q_4$		$q_4$	$q_5$
$q_1$	$q_2$	$q_2$		$q_5$	$q_{\perp}$
$q_2$	$q_3$	$q_{\perp}$		$q_6$	$q_7$
$q_3$	$q_7$	$q_7$		$q_7$	$q_{\perp}$

Représentez cet automate et donnez le langage qu'il reconnaît.

## Automates d'arbre (2 points)

**Question 12** On se donne l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1, +, \times\}$  avec arité 0 pour 0 et 1 et arité 2 pour + et  $\times$ . Définissez un BUTA qui accepte un arbre s'il correspond à une expression arithmétique qui s'évalue à 0.

**Question 13** Justifiez pourquoi ce langage d'arbre n'est pas reconnaissable par un DTDTA.





<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> 0
<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 1
<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 2
<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 3
<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 4
<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 5
<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 6
<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 7
<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 8
<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 9

← Codez ci-contre votre numéro d'étudiant : cochez dans la première colonne le premier chiffre (a priori un 2), puis dans la deuxième colonne le deuxième chiffre, etc

Nom et prénom :  
 .....

**Les réponses aux questions sont à donner exclusivement sur ces 4 feuilles : les réponses données sur les feuilles précédentes ne seront pas prises en compte.**

RÉPONSE À LA QUESTION 1 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 2 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 3 : A B C

RÉPONSE À LA QUESTION 4 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 5 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 6 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 7 : A B C D

RÉPONSE À LA QUESTION 8 : A B C

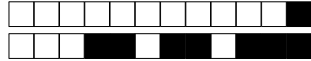
RÉPONSE À LA QUESTION 9 : A B C

RÉPONSE À LA QUESTION 10 : 0 1 *Cases réservées à la correction*

la transition a lieu pour la lettre  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (fin de propagation de la retenue)

RÉPONSE À LA QUESTION 11 : 0 1 2 *Cases réservées à la correction*

Cet automate reconnaît le langage des mots de longueur au plus 4 qui répètent la même lettre une fois sur deux, autrement dit  $L = \{\epsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 010, 101, 111, 0000, 0101, 1010, 1111\}$



+1/6/55+

RÉPONSE À LA QUESTION 12 :

0  1  2 *Cases réservées à la correction*

$Q = \{N, P\}$ ,  $+(N, N) \rightarrow N$ ,  $+(P, q) \rightarrow P$ ,  $+(q, P) \rightarrow P$ ,  $\times(N, q) \rightarrow N$ ,  
 $\times(q, N) \rightarrow N$ ,  $\times(P, P) \rightarrow P$ ,  $0 \rightarrow N$ ,  $1 \rightarrow P$ ,  $F = \{N\}$

RÉPONSE À LA QUESTION 13 :

0  1  2 *Cases réservées à la correction*

Par l'absurde, supposons qu'un tel automate existe. Soit  $q_I$  son état initial et soit  $(q_1, q_2) = \delta_{\times}(q_I)$ . Comme  $\times(0, 1)$  est accepté,  $\delta_1(q_2) = \text{accept}$ . Comme  $\times(1, 0)$  est accepté,  $\delta_1(q_1) = \text{accept}$ . Donc  $\times(1, 1)$  est accepté : contradiction.