Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence Math-Info 2
Outils Mathématiques pour l'Informatique | 2011–2012

TD n3

Relations, fonctions et ordres

1 Echauffement

Exercice 1) Etudier les définitions de majorant, minorant, élément maximal, minimal, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure. Est-ce que ces éléments existent pour la partie $A = \{6, 4, 24\}$ dans l'ensemble des entiers naturels non nuls muni de la relation d'ordre "divise" ? Remplacez A par un autre ensemble de votre choix et posez vous les mêmes questions jusqu'à ce que vous ayez parfaitement intégré toutes ces notions.

Exercice 2) Donner une définition précise de l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire). Montrer que c'est un ordre total.

Exercice 3) Soit A l'alphabet composé des 26 lettres usuelles $a, b, c, \ldots$ On note A^* l'ensemble des mots (finis) formés à l'aide des éléments de A (sans se préoccuper de savoir s'ils ont un sens) ; ε désignera le mot vide, de longueur 0. On définit sur A^* la *relation préfixe*, notée $\ll$, par la condition suivante :
$m \ll n$ si, et seulement si, le mot n commence par le mot m.

1. Démontrer que la relation $\ll$ définit un ordre sur A* . Cet ordre est appelé *ordre préfixe*.
2. Cet ordre est-il total ?
3. Comparer cet ordre avec l'ordre lexicographique (celui du dictionnaire).
4. L'ensemble ordonné (A^* , $\ll$) possède-t-il un plus petit élément ? Et un plus grand élément ?
5. Déterminer, s'ils existent, les mots suivants :
   (a) max{"mer","merveille"}, sup{"mer","merveille"},
   (b) min{"mer","merveille"}, inf{"mer","merveille"},
   (c) max{"toto","totem"}, sup{"toto","totem"},
   (d) min{"toto","totem"}, inf{"toto","totem"}
   (e) max{"malicieux","malveillant","maternel"}, sup{"malicieux","malveillant","maternel"},
   (f) min {"malicieux","malveillant","maternel"}, inf{"malicieux","malveillant","maternel"}.

Exercice 4) Donner les propriétés des relations suivantes parmi celles vues en cours : réflexivité, irréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.

1. la relation d'égalité sur les entiers.
2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan.
3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.
4. la relation "être le carré de" sur les entiers.
5. la relation "avoir un côté qui a la même longueur" sur l'ensemble des triangles.

6. la relation “avoir deux côtés qui ont la même longueur” sur l’ensemble des triangles.

En déduire lesquelles sont des ordres et lesquelles sont des relations d’équivalence.

2 Exercices d’entrainement

Exercice 5) Trouver toutes les relations sur l’ensemble $\{0, 1\}$. Déterminer lesquelles sont des relations d’équivalence ou des relations d’ordre.

Exercice 6) Ordonnancement de taches. Voici un certain nombre de taches excuter le matin avant de sortir de chez soi : (1) se lever , (2) verser son lait au chat , (3) partir , (4) s’habiller , (5) se réveiller , (6) prendre son petit-djener , (7) se laver. Questions :

1. Définir un ordre partiel sur ces sept éléments.
2. Tracer le diagramme de Hasse de cet ordre.
3. Appliquer l’algorihme de *linéarisation* à cet ordre de sorte à en trouver une extension linéaire.
4. En existe-t-il d’autres ? Pourquoi ?

Exercice 7) Sur $\mathbb{N}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si l’une des conditions suivantes est réalisée :

- $x = y$;
- x est impair, et $x < y$.

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est un ordre. Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8. Y a-t-il pour cet ordre des éléments minimaux ? maximaux ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

Exercice 8) Donner une bijection entre l’ensemble des entiers naturels et l’ensemble des entiers relatifs. Exprimer également la bijection inverse correspondante.

Exercice 9) Prouver que la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n’est pas une relation d’ordre.

3 Pour aller plus loin

Exercice 10) Soit f une fonction d’un ensemble E vers un ensemble Y. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- f est injective
- Pour tous sous-ensembles A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- Pour tous sous-ensembles A et B de X, $f(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

Exercice 11) Montrer que si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des applications injectives (resp. surjectives), alors il en est de même de $g \circ f$. Inversement, si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), que peut-on en déduire de f et de g ?

Exercice 12) Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie P de E, on note $f(P) = \{f(x) \mid x \in P\}$. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A et B de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.