Université de Nice – Sophia Antipolis | Licence Informatique 2
Outils Mathématiques pour l'Informatique | 2012–2013

TD n3

Relations, fonctions et ordres

1 Echauffement

Exercice 1) Etudier les définitions de majorant, minorant, élément maximal, minimal, plus grand élément, plus petit élément, borne supérieure, borne inférieure. Est-ce que ces éléments existent pour la partie $A = \{6, 4, 24\}$ dans l'ensemble des entiers naturels non nuls muni de la relation d'ordre "divise" ? Remplacez A par un autre ensemble de votre choix et posez vous les mêmes questions jusqu'à ce que vous ayez parfaitement intégré toutes ces notions.

---

4 et 6 sont éléments minimaux, 24 est élément maximal, plus grand élément et donc borne sup. La borne inf est 2.

Exercice 2) Donner une définition précise de l'ordre lexicographique (l'ordre du dictionnaire). Montrer que c'est un ordre total.

Comparer deux mots, caractère par caractère. Si les n premiers caractères sont identiques, on prend le suivant. Si le n-ième caractère diffère, l'ordre est établi. Au-delà de la dernière lettre de l'un des deux mots, le mot le plus court (le préfixe) est considéré comme plus petit.

Exercice 3) Soit A l'alphabet composé des 26 lettres usuelles $a, b, c, \ldots$ On note A^* l'ensemble des mots (finis) formés à l'aide des éléments de A (sans se préoccuper de savoir s'ils ont un sens) ; ε désignera le mot vide, de longueur 0. On définit sur A^* la *relation préfixe*, notée $\ll$, par la condition suivante :
$m \ll n$ si, et seulement si, le mot n commence par le mot m.

1. Démontrer que la relation $\ll$ définit un ordre sur A* . Cet ordre est appelé *ordre préfixe*.

   ---

   w est un préfixe de lui-même. u préfixe de v et v préfixe de u implique $u = v$. u préfixe de v et v préfixe de z implique u préfixe de z.

   ---

2. Cet ordre est-il total ?

   Non, exemple a et b.

   ---

3. Comparer cet ordre avec l'ordre lexicographique (celui du dictionnaire).

   En fait l'ordre lexicographique est une linéarisation de l'ordre préfixe.

   ---

4. L'ensemble ordonné (A^* , $\ll$) possède-t-il un plus petit élément ? Et un plus grand élément ?

   ε est préfixe de tout mot, donc plus petit élément. Il n'y a pas de plus grand élément.

5. Déterminer, s'ils existent, les mots suivants :

   (a) max{"mer","merveille"}, sup{"mer","merveille"},

   max=sup="merveille".

   (b) min{"mer","merveille"}, inf{"mer","merveille"},

   min=inf="mer".

   (c) max{"toto","totem"}, sup{"toto","totem"},

   pas de max, pas de sup.

   (d) min{"toto","totem"}, inf{"toto","totem"}

   pas de min, inf="tot".

   (e) max{"malicieux","malveillant","maternel"}, sup{"malicieux","malveillant","maternel"},

   pas de max, pas de sup.

   (f) min {"malicieux","malveillant","maternel"}, inf{"malicieux","malveillant","maternel"}.

   pas de min, inf="ma".

Exercice 4) Donner les propriétés des relations suivantes parmi celles vues en cours : réflexivité, irréflexivité, symétrie, antisymétrie, transitivité.

1. la relation d'égalité sur les entiers.

   R,S,T,AS donc c'est une relation d'équivalence ET une relation d'ordre. Question ... connaissez vous des relations qui sont relation d'équivalence ET relation d'ordre ?

2. la relation de perpendicularité sur l'ensemble des droites du plan.

   AR, S mais pas AS ni T.

3. la relation de parallélisme sur l'ensemble des droites du plan.

R,S,T donc équivalence.

---

4. la relation "être le carré de" sur les entiers.

Ni R ni AR (car 0 et 1); AS sur $\mathbb{N}$: $a = b^2$ et $b = a^2$ implique $a = a^4$, donc $a = 0$ ou $a = 1$ et donc $a = b$; non T : $16 = 4^2$, $4 = 2^2$ mais $16 \neq 2^2$.

---

5. la relation "avoir un côté qui a la même longueur" sur l'ensemble des triangles.

R S, mais non T, car il peut ne pas s'agir du même côté.

---

6. la relation "avoir deux côtés qui ont la même longueur" sur l'ensemble des triangles.

R, S et T.

En déduire lesquelles sont des ordres et lesquelles sont des relations d'équivalence.

2 Exercices d'entrainement

Exercice 5) Trouver toutes les relations sur l'ensemble $\{0, 1\}$. Déterminer lesquelles sont des relations d'équivalence ou des relations d'ordre.

$E = \{0, 1\}$ donc $E \times E = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$. Les relations (non vides) sur E sont les éléments de $\mathcal{P}(E \times E)$. On doit donc dessiner les 16 tableaux qui reprśentent toutes les relations sur E, et vérifier pour chacun d'eux les propriétés R,S, AS et T. On remarque que chaque propriété se lit sur une propriété du tableau de la relation :

- réflexivité : la diagonale est à 1
- symmétrie : le tableau est symmétrique par rapport à la diagonale.
- transitivité : cette notion concerne très peu un ensemble à deux éléments.Si $x,\ y,\ z$ sont des éléments de E, deux d'entre eux au moins doivent être égaux.

On en déduit que

- $\{(0, 0), (1, 1)\}$ (l'égalité) est à la fois relation d'équivalence et relation d'ordre
- $E \times E$ (chaque élément est en relation avec n'importe quel autre) est relation d'équivalence, mais pas relation d'ordre .
- Il y a deux autres relations d'ordre : $\{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ (0<1) et $\{(0, 0), (1, 0), (1, 1)\}$ (1<0)

Exercice 6) Ordonnancement de taches. Voici un certain nombre de taches excuter le matin avant de sortir de chez soi : (1) se lever , (2) verser son lait au chat , (3) partir , (4) s'habiller , (5) se réveiller , (6) prendre son petit-djener , (7) se laver. Questions :

1. Définir un ordre partiel sur ces sept éléments.
2. Tracer le diagramme de Hasse de cet ordre.
3. Appliquer l'algorihme de *linéarisation* à cet ordre de sorte à en trouver une extension linéaire.
4. En existe-t-il d'autres ? Pourquoi ?

$(5,1),(1,7),(1,6),(1,2),(7,4),(4,3),(6,3),(2,3)$. Exemples de linéarisations : $(5,1,7,6,2,4,3)$, $(5,1,6,2,7,4,3)$, $(5,1,6,7,4,2,3)$.

Exercice 7) Sur $\mathbb{N}$ on considère la relation $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- $x = y$;
- x est impair, et $x < y$.

Montrer que la relation $\mathcal{R}$ est un ordre. Dessiner le diagramme de Hasse pour les entiers inférieurs à 8. Y a-t-il pour cet ordre des éléments minimaux ? maximaux ? un plus petit élément ? un plus grand élément ?

$x = x$ donc R. Supposons xRy et yRx ; la seule possibilité est que $x = y$, donc AS. Supposons xRy et yRz. Si $x = y$ ou $y = z$ alors xRz. Sinon x et y sont impairs et $x < y$ et $y < z$, ce qui implique xRz.

Dans $\{1,2,3,4,5,6,7\}$ on a $(1,2),(1,3),(3,4),(3,5),(5,6),(5,7)$. 1 est plus petit élément, pas de plus grand élément. Le seul élément minimal est 1. Les éléments maximaux sont les nombres pairs et 7.

Exercice 8) Donner une bijection entre l'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des entiers relatifs. Exprimer également la bijection inverse correspondante.

Une bijection possible consiste à associer à chaque entier pair $2n$ le nombre entier positif n et à chaqe entier impair de la forme $2n+1$ l'entier $-n$. On a alors le dénombrement $0,-1,1,-2,2,\ldots$. La bijection inverse consiste à envoyer les nombre positifs n sur leur double $2n$, et les négatifs $-n$ sur $-2n+1$.

On aurait tout aussi bien dénombrer les entiers relatifs ainsi : $0,1,-1,2,-2,\ldots$. La bijection est $n \mapsto \lceil n/2 \rceil$ si n est impair, $n \mapsto -n/2$ si n est pair. La bijection inverse est $n \mapsto 2n-1$ si n est positif, $n \mapsto -2n$ si n est non positif.

Exercice 9) Prouver que la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre.

En fait elle n'est pas AS, car si $a|b$ et $b|a$ on pourrait avoir $a \neq b$ (si $a = -b$).

---

3 Pour aller plus loin

Exercice 10) Soit f une fonction d'un ensemble E vers un ensemble Y. Montrer que les trois propositions suivantes sont équivalentes.

- f est injective
- Pour tous sous-ensembles A et B de X, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
- Pour tous sous-ensembles A et B de X, $f(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$

- Si f est injective, montrons que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ par double inclusion
  - Si y est élément de $f(A \cap B)$ alors il existe un x (unique car f est injective) qui est élément de $A \cap B$ et par conséquent $f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B)$
  - Soit z un élément de$f(A) \cap f(B)$, il existe donc a dans A et b dans B tel que $z = f(a) = f(b)$, mais comme f est injective, $a = b$ est dans $A \cap B$ et donc $z \in f(A \cap B)$.
- (2) entraine (3) évidemment, car c'en est un cas particulier.
- Supposons enfin que, pour tous sous-ensembles A et B de X, $f(A \cap B) = \emptyset \Rightarrow f(A) \cap f(B) = \emptyset$. Et considérons deux éléments a et b de E tels que $f(a) = f(b)$. Si $a \neq b$, il suffit de définir $A = \{a\}$ et $B = \{b\}$ pour obtenir une contradiction à (3).

Exercice 11) Montrer que si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont des applications injectives (resp. surjectives), alors il en est de même de $g \circ f$. Inversement, si $g \circ f$ est injective (resp. surjective), que peut-on en déduire de f et de g ?

- Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont injectives, considérons a et b tels que $g \circ f(a) = g \circ f(b)$ alors $g(f(a) = g(f(b)$ ce qui entraine que $f(a) = f(b)$ car g est injective. Finalement, puisque f est également injective, $a = b$ et $g \circ f$ l'est également.
- Encore plus facile pour la surjectivité ...
- Supposons maintenant que $g \circ f$ soit injective, alors f doit l'être car sinon, il existerait $a \neq b$ tel que $f(a) = f(b)$ qui impliquerait $g \circ f(a) = g \circ f(b)$. Par contre g peut ne pas l'être à condition que les éléments de B qui ont même image par g ne soient pas dans l'image de A par f.
- De même si $g \circ f$ est surjective, alors g doit l'être forcément, mais pas f.

Exercice 12) Soit $f : E \to F$ une application. Pour toute partie P de E, on note $f(P) = \{f(x) \mid x \in P\}$. Montrer que f est injective si et seulement si pour toutes parties A et B de E on a $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

---

c'est l'exercice 10 ...
