Loi de probabilité continue

Définitions. On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de densité f** lorsque

- f est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^+$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = 1$

La fonction de répartition de X est alors

- F(x)= $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

La probabilité P(a≤X≤b) est alors donnée par

- P(a≤X≤b)=F(b)-F(a)= $\int_{a}^{b} f(t)\, dt$

Exemple. La loi uniforme sur [a,b] a pour densité la fonction

f(x)=0 si x<a ou x>b

f(x)= $\frac{1}{b-a}$ si a≤x≤b

Propriétés.
La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X de densité f satisfait les propriétés

- f est croissante
- $\forall$ x $\in \mathbb{R}$, 0≤F(x)≤1
- $\lim_{t \to -\infty} F(t) = 0$
- $\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$
- $\frac{\partial}{\partial x} F(x) = f(x)$

Moments d'une variable aléatoire

L'**espérance** d'une variable aléatoire X de densité f est $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t\, f(t)\, dt$

La **variance** d'une variable aléatoire X de densité f est $\mathrm{Var}(X) = E(X^2) - E(X)^2$

Le **moment d'ordre m** d'une variable aléatoire X de densité f est $E(X^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t)\, dt$

Le **moment centré d'ordre m** d'une variable aléatoire X de densité f est
$E((X - E(X))^m) = \int_{-\infty}^{+\infty} (t - E(X))^m f(t)\, dt$

Exemple.

- L'espérance de la loi uniforme sur [a,b] est

$$E(X) = \int_a^b t \frac{1}{b-a} dt = \frac{b^2-a^2}{2} \frac{1}{b-a} = \frac{a+b}{2}$$

- Le moment d'ordre 2 de la loi uniforme sur [a,b] est

$$E(X^2) = \int_a^b t^2 \frac{1}{b-a} dt = \frac{b^3-a^3}{3} \frac{1}{b-a} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

- La variance de la loi uniforme sur [a,b] est

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

In[1]:=
```
f[t_] := 1 / (b - a)
Integrate[f[t], {t, a, b}]
EX = Simplify[Integrate[t f[t], {t, a, b}]]
EX2 = Simplify[Integrate[t^2 f[t], {t, a, b}]]
VX = Simplify[EX2 - EX^2]
```

Out[2]= 1

Out[3]= $\frac{a+b}{2}$

Out[4]= $\frac{1}{3}\left(a^2 + a\,b + b^2\right)$

Out[5]= $\frac{1}{12}(a-b)^2$

Loi uniforme

La loi uniforme est la version continue de la loi uniforme discrète.

Définition. On appelle **loi uniforme sur l'intervalle [a,b]**, la variable aléatoire notée dont la fonction de densité est constante sur l'intervalle [a,b] et nulle à l'extérieur de l'intervalle [a,b]

$f(x)=c\ 1_{\{a\leq x\leq b\}}$

Remarques.

- La fonction f(x) est une densité à conditionque $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt=1$, c'est à dire $\int_a^b c\, dt=1$ ou

encore c(b-a)=1, soit $c = \frac{1}{b-a}$

- Son espérance est $\int_a^b \frac{t}{b-a}\, dt=\left[\frac{t^2}{2\,(b-a)}\right]_a^b=\frac{b^2-a^2}{2\,(b-a)}=\frac{a+b}{2}$
- Sa variance est ...
- Dessiner sa fonction de répartition

Loi exponentielle

La loi exponentielle est la version continue de la loi géométrique. Elle intervient surtout dans les problèmes de file d'attente.

Définition. On appelle **loi exponentielle de paramètre λ**, la variable aléatoire notée $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ dont la fonction de densité est

$$f(x)=\lambda\, e^{-\lambda x}\, 1_{\{x\geq 0\}}$$

Remarques.

- C'est bien la densité d'une probabilité car $\int_0^{+\infty} \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt=1$
- Son espérance est $\int_0^{+\infty} \lambda\, t\, e^{-\lambda t}\, dt=\frac{1}{\lambda}$
- Sa variance est $\int_0^{+\infty} \lambda \left(t-\frac{1}{\lambda}\right)^2 e^{-\lambda t}\, dt=\frac{1}{\lambda^2}$
- La fonction de répartition de la loi exponentielle est

$$F(x) = \int_0^x \lambda\, e^{-\lambda t}\, dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

In[6]:=
```
f[t_] := λ Exp[-λ t]
Integrate[f[t], {t, 0, +Infinity}]
EX = Simplify[Integrate[t f[t], {t, 0, +Infinity}]]
EX2 = Simplify[Integrate[t^2 f[t], {t, 0, +Infinity}]]
VX = Simplify[EX2 - EX^2]
Integrate[f[t], {t, 0, x}]
```

Out[7]= ConditionalExpression$\left[1, \mathrm{Re}[\lambda] > 0\right]$

Out[8]= ConditionalExpression$\left[\frac{1}{\lambda}, \mathrm{Re}[\lambda] > 0\right]$

Out[9]= ConditionalExpression$\left[\frac{2}{\lambda^2}, \mathrm{Re}[\lambda] > 0\right]$

Out[10]= ConditionalExpression$\left[\frac{1}{\lambda^2}, \mathrm{Re}[\lambda] > 0\right]$

Out[11]= $1 - e^{-x\lambda}$

Rappels d’analyse

Dérivation et intégration

Dérivation par partie

Somme de variables aléatoires continues indépendantes

Soient X et Y des variable aléatoires indépendantes de fonction de densité f et g. Alors la fonction de densité de la variable aléatoire Z=X+Y est la convolution f⋆g définie par

$$f\star g(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(z-t)\, dt$$

P(Z≤t)=P(Z≤t ∩ X∈]-∞,+∞[ )

$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(z,\, x)\, dz\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} h(z \mid x)\, f(x)\, dz\, dx$$

$$=\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{+\infty} g(z-x)\, f(x)\, dz\, dx$$

Exercice. Calculer la densité de la somme de deux variables aléatoires uniformes sur [0,1].

Densité de la somme de deux variables aléatoires uniformes sur [0,1]

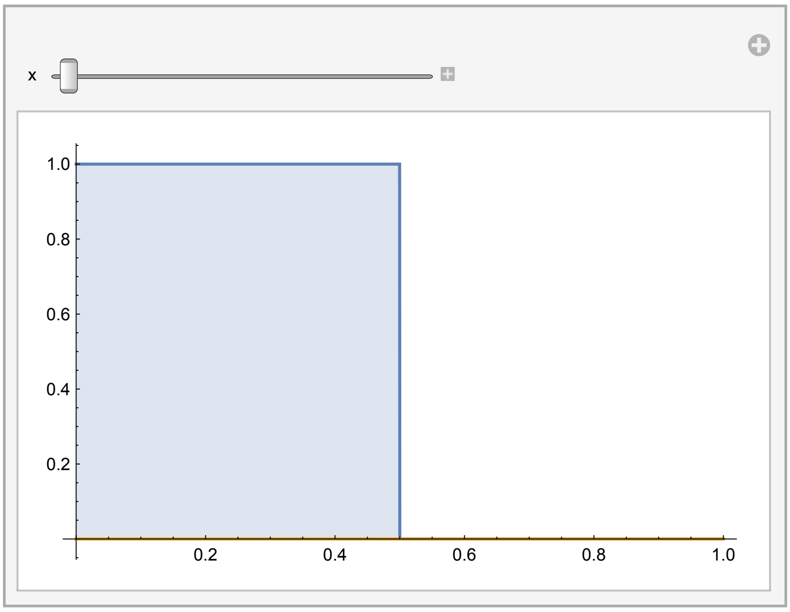
Ici, la fonction de densité de la variable aléatoire Z=X+Y est la convolution f⁎f définie par

- $f(x)=1_{x\in[0,1]}$
- $f\ast f(x)=\int_{-\infty}^{+\infty hj} 1_{x\in[0,1]}\ 1_{x-t\in[0,1]}\, dt$

$0\leq x-t\leq 1 \Longleftrightarrow x-1\leq t\leq x$

In[12]:=
```
Manipulate[
 Plot[{UnitBox[t], If[x - 1 ≤ t ≤ x, 1, 0]}, {t, 0, 1}, Filling → Axis], {x, 0, 1}]
```

Out[12]=



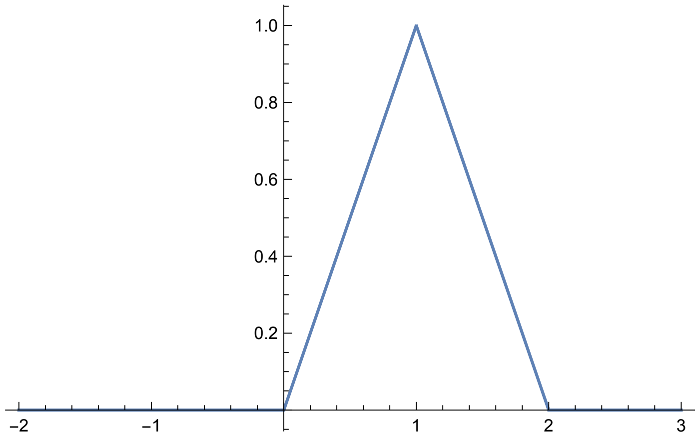
On a alors 4 cas à envisager,

- Si x<0, alors f⁎f(x)=0
- Si 0≤x<1, alors $f\ast f(x)=\int_0^x 1\, dt = x$
- Si 1≤x<2, alors $f\ast f(x)=\int_{x-1}^1 1\, dt = 2-x$
- Si x≥2, alors f⁎f(x)=0

In[13]:=
```
f[x_] := If[x < 0 || x > 1, 0, 1]
g[x_] := Convolve[f[t], f[t], t, x]
```

In[15]:=
```
Plot[g[x], {x, -2, 3}]
```

Out[15]=



Quelques inégalités célèbres

Inegalité de Markov

Soit X une variable aléatoire à densité admettant un moment d'ordre m, alors, pour tout réel t>0, on a

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|^m)}{t^m}$$

En particulier, pour m=1, on a

$$P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$$

Preuve (pour m=1) :

t P(X≥t)=t$\int_t^{+\infty} f(x)\,dx = \int_t^{+\infty} t\,f(x)\,dx \leq \int_t^{+\infty} x\,f(x)\,dx \leq \int_0^{+\infty} x\,f(x)\,dx$=E(X)

Inegalité de Tchebychev

Soit X une variable aléatoire à densité admettant une variance, alors, pour tout réel t>0, on a

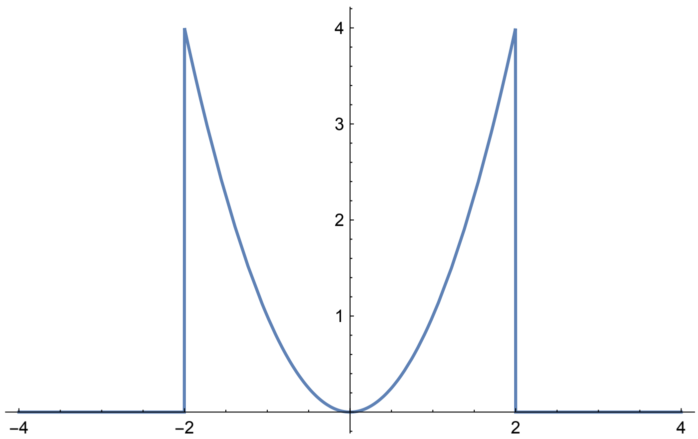
$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{\mathrm{Var}(X)}{t^2}$$

Preuve : On utilise l'inégalité de Markov sur $(X - E(X))^2$

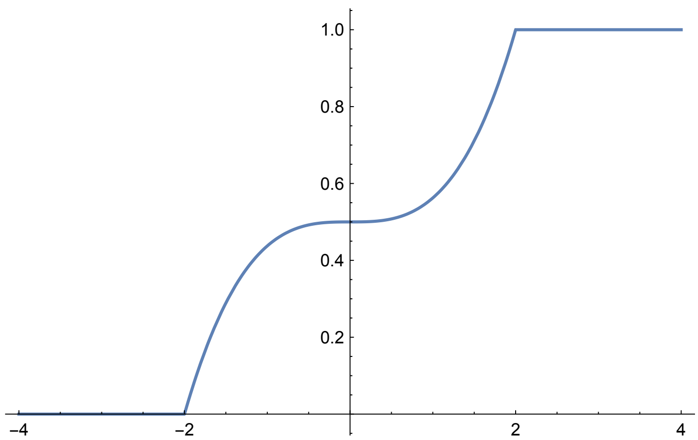
Exemples de loi de probabilité continue

On peut remarquer facilement que toute fonction **positive** et **intégrable** peut générer facilement une fonction de densité. Prenons par exemple la fonction $x \mapsto x^2$ entre -2 et 2, et nulle ailleurs. Si l'on note a son intégrale a=$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$

In[16]:=
```
f[x_] := If[Abs[x] > 2, 0, x^2]
Plot[f[x], {x, -4, 4}]
a = Integrate[f[x], {x, -Infinity, Infinity}]
g[x_] := f[x] / a
G[x_] := Integrate[g[t], {t, -Infinity, x}]
Plot[G[x], {x, -4, 4}]
```

Out[17]=


Out[18]= $\frac{16}{3}$

Out[21]=


In[22]:=
```
f[x_] := If[Abs[x] > 2, 0, x^2]
esperance = Integrate[x f[x] / a, {x, -Infinity, Infinity}]
variance = Integrate[x^2 f[x] / a, {x, -Infinity, Infinity}] - esperance^2
```

Out[23]= 0

Out[24]= $\frac{12}{5}$

Loi Normale

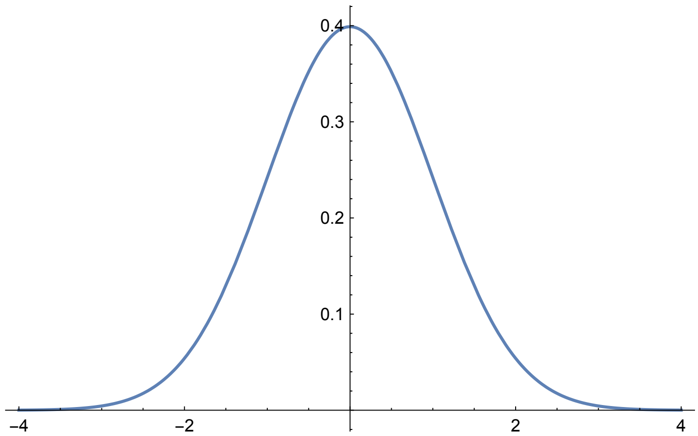
La loi normale est la loi la plus importante des probabilités et des statistiques.

Définition. Soient m et σ deux réels avec σ>0. On dit qu'une variable aléatoire X suit **une loi normale ou loi Gaussienne**, de paramètres m et σ^2, notée $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ morsque X admet pour densité la fonction

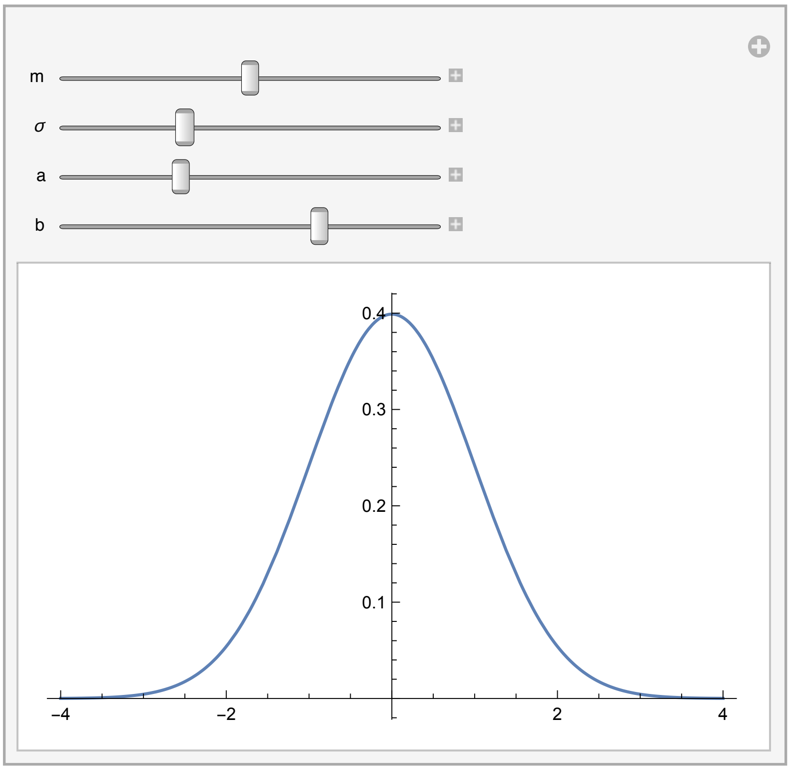
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi\sigma^2}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\,\sigma^2}}$$

In[25]:=
```
f[x_, m_, σ_] := Exp[- ( x - m) ^2 / 2 / σ^2] / Sqrt[2 Pi σ^2]
Plot[f[x, 0, 1], {x, -4, 4}]
Manipulate[Plot[f[x, m, σ], {x, a, b}, PlotRange → Full],
 {{m, 0}, -2, 2}, {{σ, 1}, .1, 3}, {{a, -4}, -10, 10}, {{b, 4}, -10, 10}]
```

Out[26]=



Out[27]=



Esperance et variance

Propriétés. Soit une variable aléatoire X suivant **une loi normale**, de paramètres m et σ^2, . Alors

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

- E(X)=m
- $\text{Var}(X) = \sigma^2$

In[28]:=
```
Clear[m, σ]
esperance = Assuming[σ > 0, Integrate[x f[x, m, σ], {x, -Infinity, Infinity}]]
variance = Assuming[σ > 0,
   Integrate[x ^2 f[x, m, σ], {x, -Infinity, Infinity}]] - esperance^2
```

Out[29]= m

Out[30]= σ^2

Propriété. Soit une variable aléatoire X suivant **une loi normale**, de paramètres m et σ^2,$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Alors la variable aléatoire $Y = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

Table de valeurs de la loi normale centrée réduite

In[31]:=

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne les valeurs de $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$, avec $x \in [0;3,99]$ et $x = x_1 + x_2$.

x_1 \ x_2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Out[31]=

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. La table ci-dessous donne les valeurs de $F(x) = \mathbb{P}(Z \leq x)$, avec $x \in [0; 3,99]$ et $x = x_1 + x_2$.

x_1 \ x_2	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998
3,5	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998	0,9998
3,6	0,9998	0,9998	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,7	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,8	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999	0,9999
3,9	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000

Soit $X \sim \mathcal{N}(2, 4)$ Calculer P(X≤4), P(X≥1) et P(1≤X≤4)

Somme de variables aléatoires gaussiennes

In[32]:=
```
PDF[NormalDistribution[m1, σ1], t]
Integrate[
 PDF[NormalDistribution[m1, σ1], t] PDF[NormalDistribution[m2, σ2], x - t],
 {t, -Infinity, Infinity}]
```

Out[32]=

$$\frac{e^{-\frac{(-m1+t)^2}{2\,\sigma1^2}}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma1}$$

Out[33]=

$$\text{ConditionalExpression}\left[\frac{e^{-\frac{(m1+m2-x)^2}{2\,(\sigma1^2+\sigma2^2)}}}{\sqrt{2\pi}\ \sigma1\sqrt{\frac{1}{\sigma1^2}+\frac{1}{\sigma2^2}}\ \sigma2},\ \text{Re}\left[\frac{1}{\sigma1^2}+\frac{1}{\sigma2^2}\right]>0\right]$$

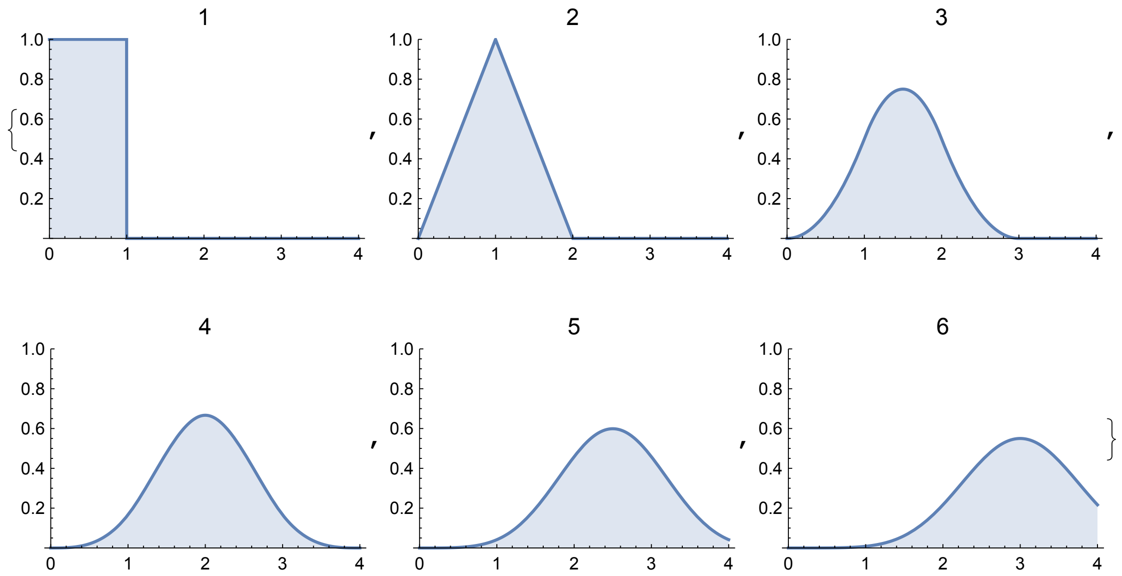
⋮

Importance de la loi Gaussienne

Somme de variables aléatoires uniformes

In[34]:=
```
Table[Plot[PDF[UniformSumDistribution[k], x], {x, 0, 4}, Filling → Axis,
  Exclusions → None, PlotRange → {0, 1}, PlotLabel → k], {k, 1, 6}]
```

Out[34]=



Théorème central limite

Théorème. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variable aléatoires de même loi, d'espérance m et d'écart type σ. Notons $S_n = X_1 + ... + X_n$. alors on a la convergence en loi suivante

$$\frac{S_n - n\,m}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,\,1),$$

c'est à dire que pour tout intervalle de
$\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$, on a

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} P\left(a \leq \frac{S_n - n\,m}{\sqrt{n\,\sigma^2}} \leq b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

On peut donc dire que l'on peut approcher la somme de n variables aléatoires de même loi d'e-spérance E[X] et d'écart type σ par

$$S_n \sim \mathcal{N}(n\mathrm{E}[X],\,\sqrt{n}\,\sigma)$$

In[35]:=
```
Mean[UniformSumDistribution[1]]
Variance[UniformSumDistribution[1]]
Mean[UniformSumDistribution[k]]
Variance[UniformSumDistribution[k]]
```

Out[35]= $\frac{1}{2}$

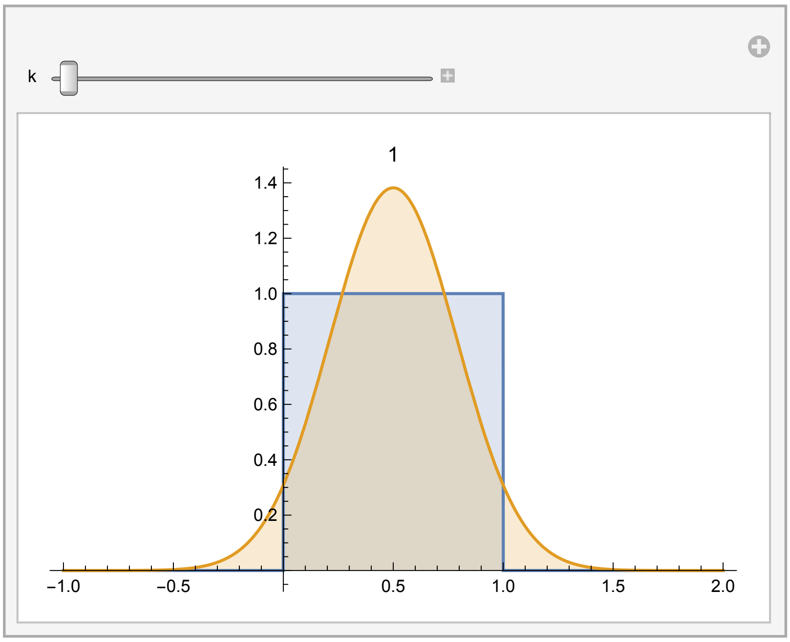
Out[36]= $\frac{1}{12}$

Out[37]= $\frac{k}{2}$

Out[38]= $\frac{k}{12}$

In[39]:=
```
Manipulate[Plot[{PDF[UniformSumDistribution[k], x],
   PDF[NormalDistribution[k / 2, Sqrt[k / 12]], x]}, {x, -1, k + 1}, Filling → Axis,
  Exclusions → None, PlotRange → All, PlotLabel → k], {k, 1, 50, 1}]
```

Out[39]=



Loi Normale (suite) et fonction d'erreur

La fonction d'erreur ou la **fonction d'erreur de Gauss** est définie par

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2}\, dt.$$

Elle est intimement liée à la fonction de répartition de la loi normale (centrée réduite).

In[40]:=
```
Clear[x]
Integrate[Exp[-x^2], {x, -Infinity, Infinity}]
Integrate[Exp[-x^2], {x, -Infinity, z}]
```

Out[41]= $\sqrt{\pi}$

Out[42]= $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(1 + \operatorname{Erf}[z])$

La fonction de densité de la loi normale centrée réduite est $\boldsymbol{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}}$

Sa fonction de répartition est donc

$$\boldsymbol{\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt}$$

Application. $\phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{erf}(x)$.

Autre interprétation. Si X est une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite $\boldsymbol{X \sim \mathcal{N}(0, 1)}$ alors

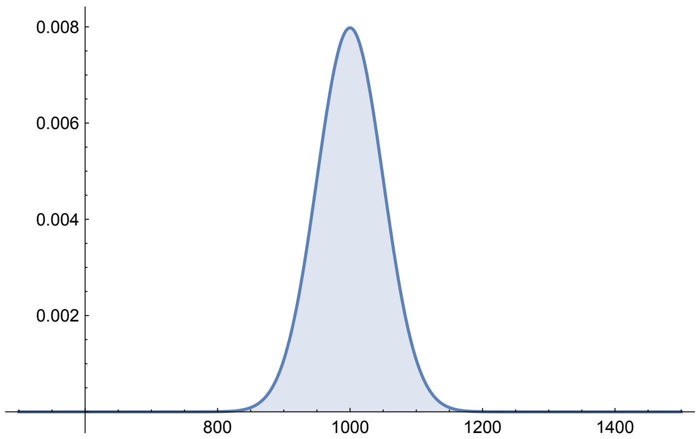
$$P(-z \leq X \leq z) = \operatorname{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)$$

En pratique

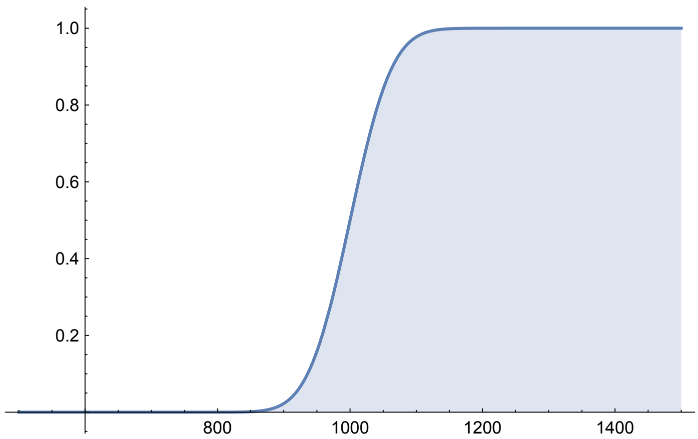
Une batterie a une durée de vie normalement distribuée, avec une espérance de 1000 heures et un écart type de 50 heures. Trouver la proportion de batterie avec une durée de vie comprise entre 800 et 1000 heures. Les applications numériques seront faites, soit en utilisant la table de valeurs de la loi niormale centrée réduite, soit en utilisant le logiciel de votre choix.

In[43]:=
```
Plot[PDF[NormalDistribution[1000, 50], x],
 {x, 500, 1500}, Filling → Axis, PlotRange → All]
Plot[CDF[NormalDistribution[1000, 50], x],
 {x, 500, 1500}, Filling → Axis, PlotRange → All]
```

Out[43]=



Out[44]=



In[45]:=
```
Clear[x]
Probability[800 < x < 1000, x ≈ NormalDistribution[1000, 50]]
Probability[800 < x < 1000, x ≈ NormalDistribution[1000, 50]] // N
```

Out[46]= $\frac{1}{2}\,\mathrm{Erf}\left[2\sqrt{2}\right]$

Out[47]= 0.499968

In[48]:=
```
Probability[x ≤ 900, x ≈ NormalDistribution[1000, 50]] // N
Probability[x ≥ 1100, x ≈ NormalDistribution[1000, 50]] // N
```

Out[48]= 0.0227501

Out[49]= 0.0227501

Sous excel on demandera =LOI.NORMALE(900; 1000; 50; 1) ou =1-LOI.NORMALE(1100; 1000; 50; 1)

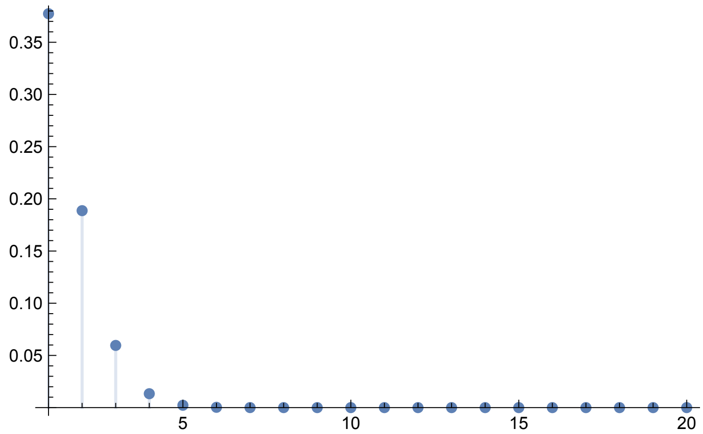
Approximations d'une loi Binomiale par une loi Normale

Lorsque le paramètre n est grand, et que p est ni trop proche de 0, ni trop proche de l, on peut approcher la loi binomiale de paramètres n et p par la loi normale de paramètres np et $\sqrt{np(1-p)}$.

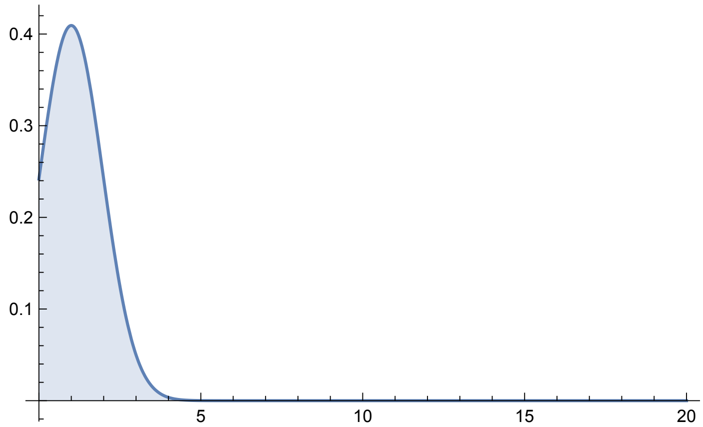
$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$

In[50]:=
```
n = 20;
p = .05;
DiscretePlot[PDF[BinomialDistribution[n, p], k], {k, 20}, PlotRange → All]
Plot[PDF[NormalDistribution[n p, Sqrt[n p (1 - p)]], x],
 {x, 0, 20}, Filling → Axis, PlotRange → All]
```

Out[52]=



Out[53]=



Approximations d’une loi Binomiale par une loi Normale

Lorsque le paramètre n est grand, et que p est proche de 0, on peut approcher la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètres *np*.

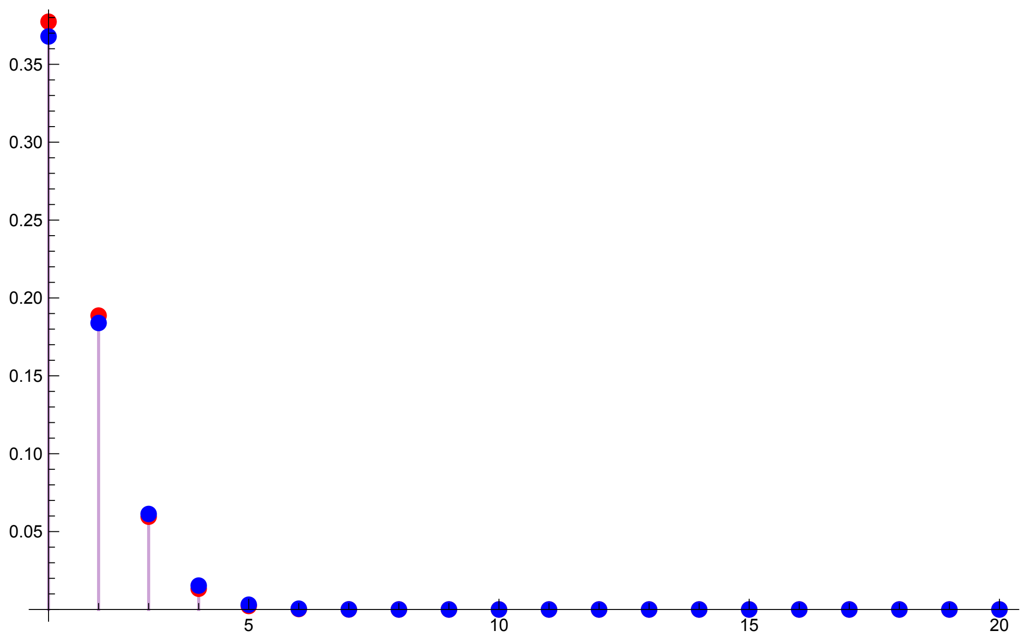
$\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{P}(np)$

Exemple. Surbooking dans les avions

94 places sont vendues au lieu de 90, car chaque passager ayant réservé a une probabilité (faible,mais réelle, estimée ici à 5%) de ne pas se présenter pour l’embarquement. Le nombre de passagers effectivement absents à l’enregistrement suit donc une loi binomiale $\mathcal{B}(94; 0, 05)$, qui peut être approchée par une loi de Poisson $\mathcal{P}(4.7)$.

In[54]:=
```
n = 20;
p = .05;
DiscretePlot[{PDF[BinomialDistribution[n, p], k],
  PDF[PoissonDistribution[n p], k]},
 {k, 20}, PlotStyle → {Red, Blue}, PlotRange → All]
```

Out[56]=



Reconnaitre une loi normale

On dispose d’un nombre d’observations, et on veut savoir si ces observations sont compatibles avec une loi normale, et si oui, s’il est possible d’estimer les paramètres de cette loi.