Séries Formelles

Partie 3/3

par

Enrico Formenti

Novembre 2023

Plan

- Fonctions analytiques (rappels)
- Pôles, singularités et zéros
  - Rayon de convergence et singularités
- Références

Fonctions analytiques (rappels)

Fonction analytique dans $z \in \mathbb{C}$

Une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique dans $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe une série formelle $F(X)$ telle que

1. $f(z_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z - z_0)^n$
2. $\mid f(z_0) \mid < \infty$.

Fonction analytique sur $S \subseteq \mathbb{C}$

Une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est analytique sur une région $S \subseteq \mathbb{C}$ si elle est analytique en tout point de S.

Fonction dérivable ou holomorphe

Une fonction f d'un ouvert $U \subseteq \mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ est dérivable dans $z_0 \in U$ si

$$f'(z) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \neq \infty$$

On dit que f est dérivable dans U si elle est dérivable dans tout point de U.

Fonction entière

$f : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est entière si elle est analytique sur $U = \mathbb{C}$.

Théorème

Une fonction f est analytique sur $U \subseteq \mathbb{C}$ ssi elle est holomorphe dans U.

Théorème

Une fonction f holomorphe en $z_0 \in \mathbb{C}$ est infiniment complexe-dérivable dans z_0.

Théorème

Une fonction f analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$ coïncide avec son développement de Taylor en z_0 :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \cdot (z - z_0)$$

Pôles, singularités et zéros

Le point de départ

Théorème (de Liouville)

Toute fonction entière bornée est une fonction constante.

Corollaire

Toute fonction analytique bornée et non-constante admet une singularité.

Définition

Une singularité pour une fonction analytique $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est un point $z_0 \in \mathbb{C}$ pour lequel f est non-analytique.

Classement des singularités

- Singularité effaçable ;
- Pôles (ou singularités non-essentielles) ;
- Singularités essentielles ;
- Points de branchement (on ne s'y intéressera pas ici).

Classement des singularités

- Singularité effaçable ;
- Pôles (ou singularités non-essentielles) ;
- Singularités essentielles ;
- Points de branchement (on ne s'y intéressera pas ici).

Définition

Une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a une singularité effaçable en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un voisinage $V(z_0) \in \mathbb{C}$ de z_0 tel que f peut se prolonger sur $V(z_0)$ en une fonction analytique.

Classement des singularités

- Singularité effaçable ;
- Pôles (ou singularités non-essentielles) ;
- Singularités essentielles ;
- Points de branchement (on ne s'y intéressera pas ici).

Définition

Une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a un pôle en $z_0 \in \mathbb{C}$ s'il existe un voisinage $V(z_0) \in \mathbb{C}$ de z_0 tel que f est analytique sur $V(z_0) \setminus \{z_0\}$ et il existe une fonction $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytique sur $V(z_0)$ telle que $g(z_0) \neq 0$ et $f(z) = \frac{g(z)}{(z-z_0)^n}$ pour un entier $n \in \mathbb{N}$. Dans ce cas, n est l'ordre du pôle.

Classement des singularités

- Singularité effaçable ;
- Pôles (ou singularités non-essentielles) ;
- Singularités essentielles ;
- Points de branchement (on ne s'y intéressera pas ici).

Définition

Une fonction $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ a une singularité essentielle en $z_0 \in \mathbb{C}$ si z_0 n'est ni une singularité effaçable ni un pôle pour f.

Exemples

Considérons la fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z_0 = 0$ est une singularité effaçable. En effet, si l'on définit :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Alors f peut se prolonger en g pour tout possible voisinage de 0.

Exemples

Considérons la fonction $f(z) = \frac{1}{z}$ alors $z_0 = 0$ est un pôle d'ordre 1.
En effet, si l'on définit : $\forall z \in \mathbb{C},\ g(z) = 1$ on trouve :

- $g(0) \neq 0$
- $f(z) = \frac{g(z)}{(z-0)^1}$

Exemples

Considérons la fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ alors $z_0 = 0$ est un singularité essentielle. En effet, si l'on se rappelle la série formelle associée à e^X :

$$e^X = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{X^n}{n!}$$

alors on a :

$$z^n \cdot e^{\frac{1}{z}} = z^n + z^{n-1} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)! \cdot z} + \frac{1}{(n+2)! \cdot z^2} + \ldots = \infty$$

pour $z \to 0$.

Relation entre pôles et zéros (I)

Définition

Soit f analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$ et

1. $\frac{d^i f}{dx^i}(z_0) = 0$ pour $i = 0, \ldots, k-1$;
2. $\frac{d^k f}{dx^k}(z_0) \neq 0$

alors z_0 est un zéro d'ordre k de f.

Remarque

Soit f analytique en $z_0 \in \mathbb{C}$ et soit z_0 un zéro d'ordre k pour f. Alors

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot g(z)$$

pour une fonction g analytique en z_0 et telle que $g(z_0) \neq 0$.

Relation entre pôles et zéros (II)

Remarque

Soient p et q deux fonctions analytiques en $z_0 \in \mathbb{C}$. Si z_0 un zéro d'ordre k pour q et $p(z_0) \neq 0$ alors

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$$

a un pôle d'ordre k en z_0.

Rayon de convergence (I)

Considérons la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n \tag{1}$$

avec $z \in \mathbb{C}$ et $a_n \in \mathbb{C}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Définition

Pour $z \in \mathbb{C}$ fixé, posons $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k$. On dit que la série (1) est convergente ssi $\exists L \in \mathbb{C}$ tel que $\lim_{n\to\infty} S_n = L$. La série (1) est divergente si elle n'est pas convergente.

Rayon de convergence (II)

Théorème

Il existe un nombre $0 \leq R \leq \infty$ tel que la série (1) converge pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$. Le nombre R est dit rayon de convergence de la série (1) et sa valeur en fonctions des coefficients a_n est donnée par :

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}}$$

CONVENTION : $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$.

Exemple (I)

Considérez la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

Alors

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |1|^{1/n}} = 1$$

Exemple (II)

Considérez la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Alors

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |1/n!|^{1/n}} = \infty$$

Exemple (III)

Considérez la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$$

Alors

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} |n!|^{1/n}} = 0$$

Convergence et singularités

Théorème

Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ convergente avec rayon de convergence R et posons $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Alors f est analytique pour tout $|z| < R$. Si, de plus, si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ diverge pour $|z| > R$ alors $f(z)$ a au moins une singularité sur la circonférence $|z| = R$.

Convergence et singularités

Théorème de Vivanti-Pringsheim

Si une fonction f à variable complexe est représentable par une séries $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec $a_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et un rayon de convergence R, alors $f(z)$ a une singularité en $z = R$.

Exemple : $f(z) = \frac{1}{1-z}$

Convergence et singularités (suite)

Théorème

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dans une région qui contient l'origine. Soit $z_0 \neq 0$ la singularité de plus petit module. Pour un ε fixé on a :

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall n > M, \quad |a_n| < \left(\frac{1}{|z_0|} + \varepsilon\right)^n$$

et un nombre infini de $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n| > \left(\frac{1}{|z_0|} - \varepsilon\right)^n$$

On note les propriétés ci-dessus : $|a_n| \bowtie \left(\frac{1}{|z_0|}\right)^n$.

Exemples (I)

Considérons la fonction :

$$f(z) = \frac{1}{2 - e^z}$$

et supposons vouloir étudier son développement en séries dans un voisinage fermé autour de 0. Alors f a une singularité pour tout z tels que :

$$e^z = 2$$

c'est-à-dire :

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = 2$$

ce qui donne :

$$x = \ln 2$$
$$y = 2k\pi$$

Le $z = \ln 2 + i \cdot 2k\pi$ plus proche de 0 s'obtient pour $k = 0$ et donc $R = \ln 2$.

Conclusion : $|a_n| \bowtie \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^n$

Exemples (II)

Considérons la fonction :

$$f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

et supposons qu'elle soit analytique dans un voisinage fermé autour de 0. Les singularités ici surgissent quand

$$e^z = 1$$

c'est-à-dire :

$$e^z = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y)) = 1$$

ce qui donne

$$x = 0$$
$$y = 2k\pi$$

Le $z = i \cdot 2k\pi$ plus proche de 0 s'obtient pour $k = 0$ et $f(0) = 0/0$
MAIS en utilisant L'Hôpital on a :

$$\left.\frac{1}{e^z}\right|_{z=0} = 1$$

donc f est prolongeable en 0 et vaut 1.
ALORS le plus proche s'obtient pour $k = 1$ et $R = 2\pi$. Ce qui donne :

$$|a_n| \bowtie \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n$$

Le premier principe

Le premier principe de l' asymptotique

La position des singularités d'une fonction détermine la croissance exponentielle de ses coefficients.

Borne des points de selle

Pour f analytique dans un disque $|z| < r$ pour $r \in (0, R)$, notons

$$M_f(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$$

Théorème

Soit f une fonction analytique dans un disque $|z| < R$. Alors pour tout $r \in (0, R)$ on a :

$$[z^n]f(z) \leq \frac{M_f(r)}{r^n} \text{ ce qui implique } [z^n]f(z) \leq \inf_{r \in (0,R)} \frac{M_f(r)}{r^n}$$

et si $f(z)$ n'a que des coefficients positifs alors

$$[z^n]f(z) \leq \frac{f(r)}{r^n} \text{ ce qui implique } [z^n]f(z) \leq \inf_{r \in (0,R)} \frac{f(r)}{r^n}$$

Bornes des points de selle (suite)

Corollaire

Soit f non-polynomiale et analytique en 0 avec coefficients positifs et $R \leq \infty$. Si $\lim_{z \to R^-} = \infty$ alors

$$[z^n]f(z) \leq \frac{f(s)}{s^n}$$

où s est l'unique solution de

$$s \cdot \frac{f'(s)}{f(s)} = n$$

Exemple

Supposons de vouloir calculer une approximation de $n!$ *à la Stirling* :

$$\frac{1}{n!} = [z^n]e^z$$

Par le corollaire précédent nous avons

$$\frac{1}{n!} = [z^n]e^z \leq \frac{e^s}{s^n}$$

avec s solution de

$$s\frac{(e^s)'}{e^s} = s\frac{e^s}{e^s} = s = n$$

donc :

$$\frac{1}{n!} = [z^n]e^z \leq \frac{e^n}{n^n}$$

c'est-à-dire on rate la borne de Stirling d'un facteur $1/\sqrt{2\pi n}$.

Le deuxième principe

La relation

$$a_n \bowtie A^n$$

peut être réécrite comme

$$a_n = A^n \theta(n)$$

où $\theta(n)$ est un facteur sous-exponentiel tel que

$$\limsup_{n \to \infty} |\theta(n)|^{1/n} = 1$$

$\theta(n)$ peut prendre les formes suivantes

$$1, n^3, (\log n)^4, \sqrt{n}, (-1)^n, \log \log n, \ldots$$

Le deuxième principe

Le deuxième principe de l' asymptotique

La nature des singularités détermine le facteur sous-exponentiel.

A suivre...

Merci !

Références I

[1] Philippe Flajolet and Robert Sedgewick.
Analytic Combinatorics.
Cambridge University Press, 2009.

[2] Walter Rudin.
Analyse réelle et complexe.
Masson, 1996.