

# Stratégie de recherche pour les systèmes de contraintes avec flottants

---

*JFPC 2017*

**Heytem Zitoun, Claude Michel, Michel Rueher, Laurent Michel**

*UCA*

*UCONN*

# Contexte et motivation

Pourquoi utiliser des contraintes sur les flottants ?

- Preuve et vérification (flottant = approximation des réels)

Pourquoi a-t-on besoin de stratégies de recherche dédiées ?

- **Stratégies classiques ne fonctionnent pas**
  - Entier : énumération (ex :  $[0,1]$ )
  - Réel : bisection + propriétés mathématiques

## Exemple de problème sur les flottants

```
void foo(){
  float a = 1e8f;
  float b = 1.0f;
  float c = -1e8f;
  float r = a + b + c;
  if(r >= 1.0f){
    shouldGoHere
  } else {
    butGoHere
  }
}
```

- $a, b, c, r \in \mathbb{R} \rightarrow$  **shouldGoHere**
- $a, b, c, r \in \mathbb{F} \rightarrow$  **butGoHere**
- Evaluation sur  $\mathbb{R} \neq \mathbb{F}$
- **Objectif** : Vérifier que ce programme est conforme à ce qui est attendu.
- **Comment** : Construire un système de contraintes avec flottants  
 $\rightarrow (r \geq 1.0f) \equiv \text{faux}$

$\rightarrow$  **Besoin de stratégies de recherche dédiée aux flottants**

# Stratégies de recherche efficaces pour les flottants

Objectifs :

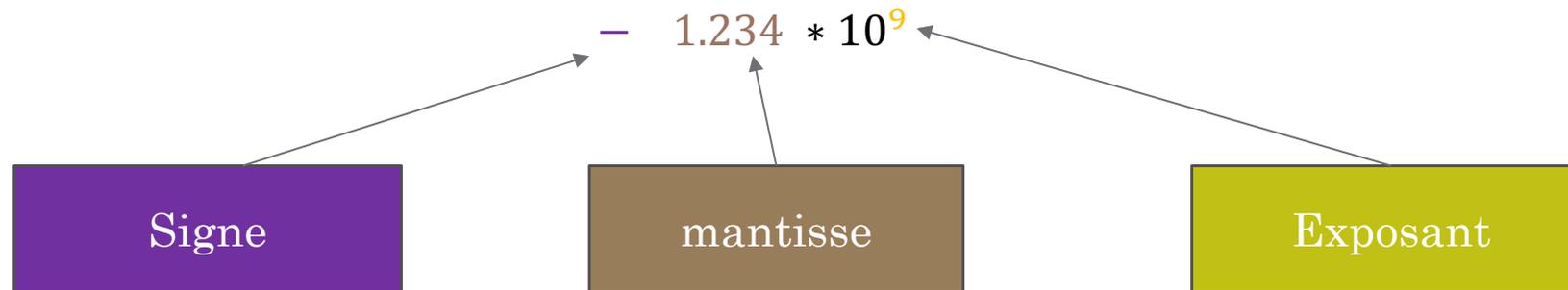
- **Capter** la structure des **domaines** des variables
- Gérer les problèmes d'arithmétique flottantes (**absorptions, cancellations**)
- Exploiter la structure du problème (**contraintes**)

Approche :

- Définition de **propriétés (mesure)** sur les domaines des variables
- Définition de propriétés sur les contraintes
- Les **stratégies** de recherches se basent sur ces propriétés

# Rappels sur les flottants

Comment transformer -1234000000 en notation scientifique (base 10) ?



En base 2 c'est la même chose !

$$(-1)^s 1.m * 2^e \quad \text{ou} \quad (-1)^s 0.m * 2^e$$

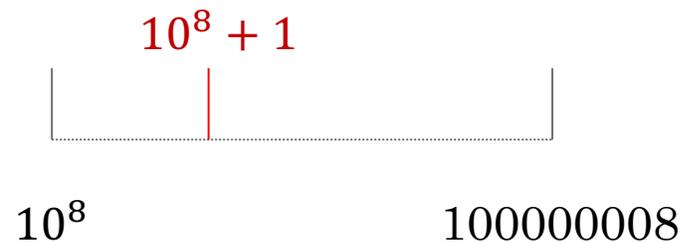
IEEE754-2008 : Format **simple** précision (32 bits 1 + 23 + 8)

Format **double** précision (64 bits 1 + 52 + 11)

# Absorption

*Ce phénomène apparaît lors de **l'addition** de deux nombres d'ordre de **magnitude différente**. Le résultat est le nombre le plus éloigné de 0.*

$$10^8 + 1 = 10^8$$



# Cancellation : perte de précision des bits de poids fort

Soustraction de deux résultats proche

$$\underbrace{((1.0 - 10^{-7}) - 1.0)} * 10^7 = -1.1920928955078125 \neq -1$$

$$0.99999988079071044922 \neq 0.9999999$$

Autre exemple : Polynôme de Rump

$$R(x, y) = \frac{1335}{4} y^6 + (11x^2y^2 - y^6 - 121y^4 - 2)x^2 + \frac{11}{2} y^8 + \frac{x}{2y}$$

Pour  $x = 77617$  et  $y = 33096$  résultat flottant  $1.172603 \neq -0.873960599$

## Approche proposée ?

- Définition de **propriétés (mesures)** sur :
  - les domaines des variables
  - les contraintes
  
- Les **stratégies** de recherches se basent sur ces propriétés

## Propriétés basées sur les domaines

$f^1$   $f^2$   $f^3$   $f^4$   $f^5$



$D_x$

$f^1$   $f^2$   $f^3$

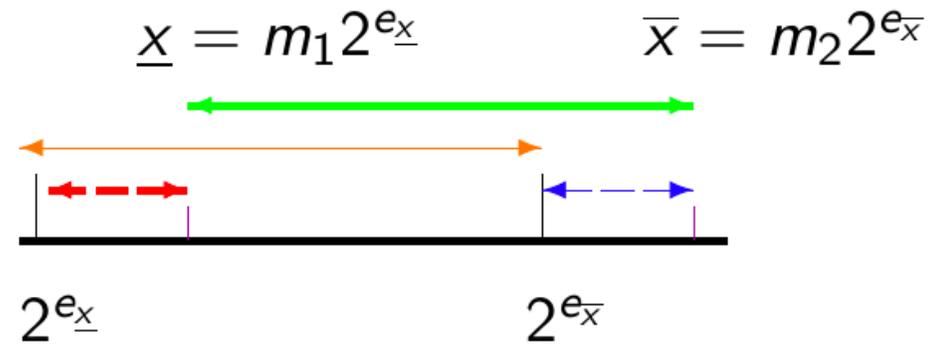


$D_y$

Sur quel **critère** sélectionner la variable ?

- Taille**
- Cardinalité**
- Densité**
- Magnitude**

# Exemple de propriété sur les domaines : cardinalité



$$|D_x| = \leftarrow \text{orange arrow} \rightarrow \ominus \leftarrow \text{red dashed arrow} \rightarrow \oplus \leftarrow \text{blue dashed arrow} \rightarrow$$

$$|D_x| = 2^p * (e_{\bar{x}} - e_{\underline{x}}) - m_{\underline{x}} + m_{\bar{x}}$$

## Propriétés basées sur les contraintes

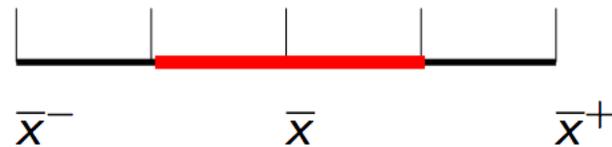
$$\begin{aligned}(x - 1) * y &= z \\ y * y &= w/x\end{aligned}$$

Quel information **exploiter** de ce système de contraintes ?

- Degré**
- Occurrence**
- Absorption**
- Cancellation**
- Dérivée**

## Exemple de propriété sur les contraintes : absorption

Soit  $x + y = z$  avec  $y$  absorbé par  $x$  et  $abs(\underline{x}) < abs(\bar{x})$



Représente une portion de  $D_x$ . La partie **rouge** correspond à la distance où les valeurs sont absorbées par  $x$ .

$$\text{Distance } D : \left[ \frac{\bar{x} + \bar{x}^-}{2}, \frac{\bar{x} + \bar{x}^+}{2} \right]$$

$$y \in D \rightarrow \text{Absorption}$$

# Stratégies mono propriété

Deux stratégies par propriété :

- **maximiser** la propriété
- **minimiser** la propriété

Exemple cardinalité :

- sélectionner la variable qui **maximise** (resp. **minimise**) le nombre de flottants

# Stratégies multi propriétés

$V$  : l'ensemble des variables du système

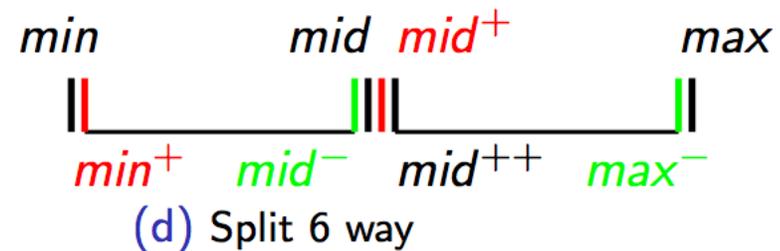
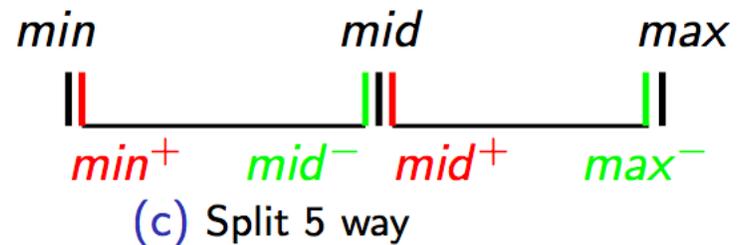
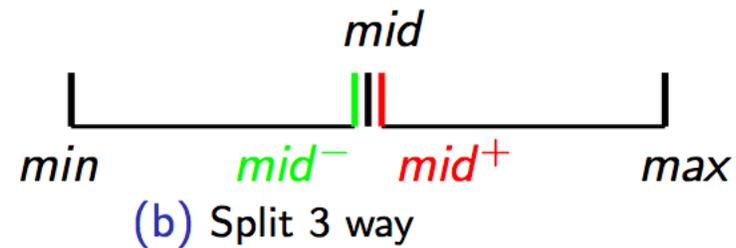
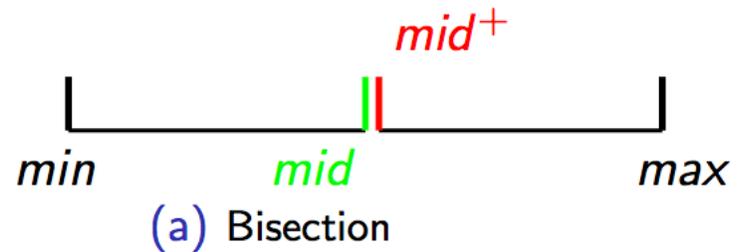
## ▪ **DensWAbs** :

- $S1 \rightarrow V_2$  : ensemble des variables de  $V$  tq.  $dens(x \in V) > \frac{\min_{Dens} + \max_{Dens}}{2}$
- $S2 \rightarrow \max_{Abs}(x' \in V_2)$

## ▪ **AbsWDens** :

- $S1 \rightarrow V_2$  : ensemble des variables de  $V$  tq.  $abs(x \in V) > 0$
- $S2 \rightarrow \max_{Dens}(x' \in V_2)$

# Stratégies de splitting



$mid$  : milieu de l'intervalle

$f^+$  (resp.  $f^-$ ) : le successeur (resp. prédécesseur) de  $f$

# Expérimentations

- Combinaison : *stratégies de sélection variables + stratégies de splitting*
- Stratégie standard : *lexicographique + bisection*

## Résultats :

- Mono propriétés : **absorption** et **densité** dominant les autres stratégies
- Combinaisons : **densWAbs** améliore les résultats de maxDens
- Détails (CP 2017) :

<http://www.i3s.unice.fr/~hazitoun/cp2017/benchmark.html>

# Conclusion

## Contribution :

- Première approche de stratégies dédiées pour les flottants
- Expérimentations préliminaires encourageantes

Question ?

