

Séance 1 : Structures usuelles

Objet : faire connaissance et rappel des structures discrètes

Plan

- Ensembles et ensembles finis cardinalité
 - Relations
 - Fonctions et Applications
 - Mots, Langage
 - Chemins, Graphes, Arbres
-

I.1 Ensembles et ensembles finis, cardinalité

I.1.1- Ensembles

Définition I.1.1.1- Ensemble, éléments, appartenance

L'appartenance d'un élément à un ensemble est notée \in , la non appartenance \notin .

Remarque : *Paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles (Bertrand Russell 1902).*

Si l'on suppose l'existence de l'ensemble de tous les ensembles que nous noterons E , alors, il se contient comme élément ($E \in E$). Il est alors légitime de considérer l'ensemble A des éléments de E qui ne se contiennent pas eux mêmes comme élément :

$$A = \{ x \in E / x \notin x \}.$$

On a alors la contradiction suivante :

- o si $A \in A$ alors par définition de A , $A \notin A$
- o de même, si $A \notin A$, alors par définition de A , $A \in A$.

C'est un exemple classique d'**autoréférence**.

Définition I.1.1.2- Union, Intersection, différences, complémentaires, propriétés : associativité, commutativité, distributivité , lois de Morgan.

- o $A \cup B = \{x \in E / x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- o $A \cap B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \in B\}$
- o $A - B = \{x \in E / x \in A \text{ et } x \notin B\}$
- o $\bar{A} = \{x \in E / x \notin A\}$
- o $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$
- o $A \cup B = B \cup A$
- o $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- o $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- o $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- o $\overline{A \cap B} = A \cup B$

Définition I.1.1.3- Fonction caractéristique d'un ensemble :

$$\begin{aligned} \chi_A : A &\mapsto \{0, 1\} \\ a &\rightarrow 0 \text{ si } a \in A \\ a &\rightarrow 1 \text{ si } a \notin A \end{aligned}$$

Remarque- Propriétés des fonctions caractéristiques

- $\chi_{A \cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A \cap B}$
- $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$

Définition I.1.1.4-

- Produit cartésien d'ensembles

- $A \times B = \{(a, b), a \in A, b \in B\}$.

- Partition d'un ensemble.

- On dit qu'une famille $\{A_i\}$ d'ensemble est une partition d'une ensemble E lorsque
 - La réunion des A_i est l'ensemble E
 - Les ensembles A_i sont deux à deux disjoints.

- Ensembles des parties d'un ensemble.

- pour un ensemble E on note $P(E)$ l'ensemble de ses parties.
- Exemple : pour $E = \{1, 2, 3\}$, on a $P(E) = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$.

I.1.2- Ensembles finis - cardinalités

Propriété I.1.2.1- Formule du crible et applications

- Pour 2 ensembles on a

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

- Pour 3 ensembles on a

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- Généralement, on

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}|$$

****Preuve par récurrence**

Définition I.1.2.1- Cardinal d'un produit cartésien

$$|A \times B| = |A||B|$$

Plus généralement, on a

$$\left| \prod_{i=1}^n A_i \right| = \prod_{i=1}^n |A_i|$$

Exemples

- Nombres de mots à n lettres sur un alphabet A ayant $|A|$ lettres : $|A|^n$
 - Exemple de la numérotation à 10 chiffres
 - Nombre de chemins de longueur n ayant un nombre de pas fixés k : k^n
 - Nombre de parties d'un ensemble : 2^n
 - Nombre d'applications d'un ensemble A dans un autre B : $|B|^{|A|}$
-

I.2- Relations

Définition I.2.1- Relation

Une relation d'un ensemble A sur un ensemble B est un sous ensemble de $A \times B$. Si $\{a,b\}$ est un élément de la relation, on dit que a est en relation avec b et on le note aRb .

Propriétés I.2.1:

On considère ici les relations sur un même ensemble E (donc une partie de $E \times E$).

- **Réflexivité** : une relation R est dite réflexive sur E lorsque pour tout élément x de E, on a xRx
- **Symétrie** : une relation R est dite symétrique sur un ensemble E lorsque pour tout couple (x,y) de E, xRy entraîne yRx .
- **Transitivité** : une relation R est dite transitive sur un ensemble E lorsque, pour tout triplet (x,y,z) d'éléments de E, xRy et yRz entraîne xRz .
- **Antisymétrie** : une relation R est dite antisymétrique sur un ensemble E lorsque, pour tout couple (x,y) de E, xRy et yRx entraîne $x=y$

Définition I.2.2- Relation d'équivalence.

Une relation R est dite d'**équivalence** sur un ensemble E lorsqu'elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive.

Définition I.2.3- Classes d'équivalence :

Une classe d'équivalence pour une relation d'équivalence R est l'ensemble des éléments en relation avec un élément donné.

Théorème I.2.1 .

L'ensemble des classes d'équivalences d'une relation d'équivalence sur un ensemble E forme une partition de E.

Remarque : Réciproquement, une partition $\{E_i\}$ d'un ensemble E induit une relation d'équivalence sur E définie par $x R y$ lorsque x et y appartiennent au même ensemble E_i .

Définition I.2.4- Relation d'ordre

- Une relation R est dite **relation d'ordre** sur un ensemble E lorsqu'elle est à la fois réflexive, antisymétrique et transitive.

- Une relation d'ordre est dite **totale** lorsque deux éléments quelconques sont comparables (typiquement la relation \leq dans \mathbb{N})

- Une relation d'ordre est dite **partielle** lorsqu'il existe des couples d'éléments incomparables (typiquement la divisibilité dans \mathbb{N}).

- Une relation transitive est dite relation de **préordre**.

Définition I.2.5- Relation Domine

Si R est une relation d'ordre sur un ensemble E, on dit qu'un élément x de E **domine** un élément y de E lorsque d'une part xRy , x différent de y, et qu'il n'existe aucun z, différent de x et y, tel que xRz et zRy .

Le graphe de la relation domine est appelé **diagramme de Hasse** de la relation d'ordre R.

Exemple. Diagramme de Hasse de la relation d'inclusion dans $P(\{1,2,3\})$?

Définition I.2.6- Majorant/minorant

Un **majorant** (resp. **minorant**) d'un sous ensemble F d'un ensemble ordonné (E,R) est un élément x de E tel que, pour tout y de F yRx (resp xRy). Le **maximum** (resp **minimum**) de F, lorsqu'il existe, est un majorant (resp. minorant) de F appartenant à F. Une borne **supérieure** (resp **inférieure**) de F, lorsqu'elle existe est le minimum de l'ensemble des majorants de F (resp maximum des minorants de F).

Définition I.2.7- Treillis

Un **treillis** est un ensemble ordonné dans lequel toute paire d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. Par exemple, N muni de la relation divise est un treillis (pgcd et ppcm). Un treillis est dit **complet** lorsque toute partie admet une borne supérieure et une borne inférieure.

Théorème I.2.2.

Toute application monotone d'un treillis complet dans lui même admet un plus grand point fixe et un plus petit point fixe.

****Preuve.** Supposons que f soit une fonction croissante. On considère l'ensemble $A = \{x / x \leq f(x)\}$. Puisque le treillis est complet, A admet une borne supérieure a.

C'est dire que tout x dans A vérifie $x \leq a$ et tout majorant y de A vérifie $a \leq y$. En appliquant la croissance de f, on obtient que

- $f(x) \leq f(a)$ pour tout x de A et donc $x \leq f(x) \leq f(a)$. Il en résulte que f(a) est un majorant de A.
- $f(a) \leq f(y)$ pour tout $y > A$ et qui vérifie alors $f(y) < y$. Il en résulte que f(a) est plus petit que tout majorant de A

Au total, f(a) est la borne supérieure de A et on a donc $a=f(a)$.

I.3- Fonctions, applications

Définition I.3.1- Fonction, image, antécédent, application

- Une **fonction** d'un ensemble E vers un ensemble F est une relation de E vers F pour laquelle tout élément de E est en relation avec **au plus** un élément de F. L'ensemble des éléments x de E pour lesquels il existe un élément de F en relation avec x est appelé ensemble de définition de la fonction f.

- Si x est élément de E, y élément de F et f fonction de E vers F, $y=f(x)$ se dit également y est **image** de x par f ou x est **antécédent** de y par f.

- Une **application** d'un ensemble E vers un ensemble F est une relation de E vers F pour laquelle tout élément de E est en relation avec **exactement un** élément de F. C'est une fonction de E vers F dont le domaine de définition est E.

Définition I.3.2-

- **Ensemble image** $f(E)=\{f(x), x \in E\}$

- **Image réciproque** $f^{-1}(F)=\{x \in E / f(x) \in F\}$

- **Suites** Une suite d'éléments de E est une application de N dans E. L'image d'un entier n par une suite u est souvent notée u_n .

Définition I.3.3- Bijections

- **Injection** une application de E vers F est dite injective lorsque deux éléments distincts de E ont toujours des images distinctes dans F.

- **Surjection** une application de E vers F est dite surjective lorsque tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Une surjection de E vers F est une fonction dont l'image de E est F tout entier.

- **Bijection** Une application de E vers F est dite bijective lorsqu'elle est à la fois injective et surjective.

- **Bijection réciproque.** Une application est bijective de E vers F si et seulement si il existe une application g de F vers E telle que $f \circ g = Id_E$. L'application g est appelée bijection réciproque de f, est notée f^{-1} et vérifie $f^{-1} \circ f = Id_E$.

I.4- Mots, Langages

Définition I.4.1- Mots

Soi A un alphabet. On note A^* l'ensemble des mots sur l'alphabet A, c'est à dire l'ensemble des suites finies (éventuellement avec répétition) formées à partir des lettres de A.

Ex. Le mot 010010 est un mot de $\{0,1\}^*$.

Définition I.4.2- Monoïde

L'ensemble A^* est muni de l'opération de *concaténation* ".", qui lui confère une structure de monoïde (c'est à dire un "groupe sans inverse"), dont l'élément neutre est noté ϵ . Attention la concaténation n'est pas une opération commutative.

Définition I.4.3- fréquence et longueur

- Si a est une lettre de A et w un mot de A^* , on note $|w|_a$ (fréquence de a dans w) le nombre de lettres " a " apparaissant dans le mot w . Le nombre total de lettres de w est noté $|w|$ (longueur du w).

- On appelle *préfixe* (resp. *suffixe*) d'un mot w tout mot u tel qu'il existe un mot v tel que $w = u.v$ (resp. $v.u$). On appelle *facteur* d'un mot w tout mot u tel qu'il existe des mots v et v' tels que $w = vuv'$. On appelle *sous mot* d'un mot $w = w_1.w_2....w_n$ tout mot $u = w_{i_1}.w_{i_2}...w_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < ... < i_k$.

Définition I.4.4- Langage

Un *langage* sur l'alphabet A est une partie de A^* , c'est à dire une partie (finie ou infinie) de mots.

Opérations définies sur les langages

- Union
- Intersection
- Concaténation
- Etoile

Exemples de langage :

- Expressions arithmétiques
 - Langage de Dyck ou parenthésages bien formés.
 - Pliages réguliers de papier (cf TD).
-

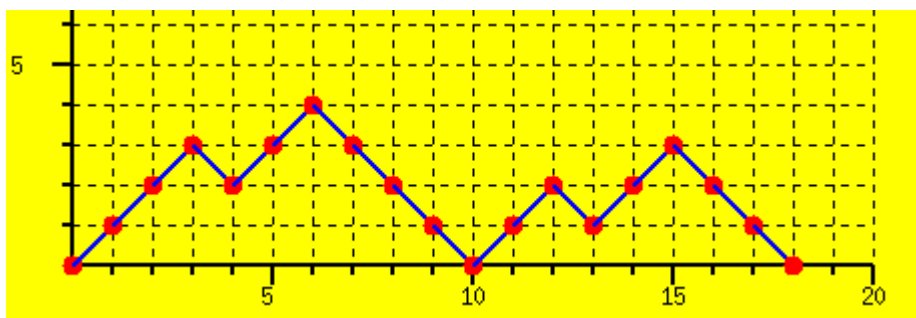
I.5- Chemins, Graphes, Arbres

Définition I.5.1- Chemin

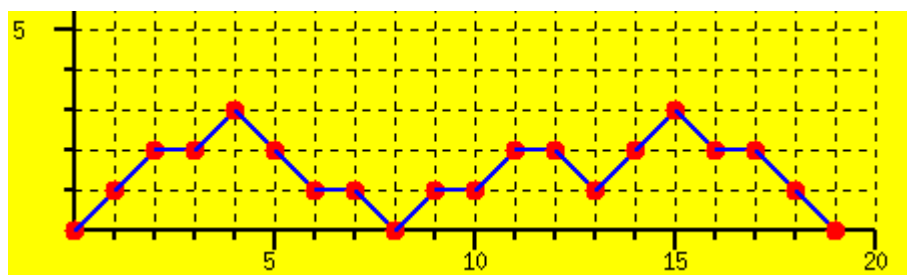
On considère le plan $Z \times Z$. Un pas est un couple de points à coordonnées entières. Un chemin est une suite de points à coordonnées entières. Un pas d'un chemin est un couple de points consécutifs de ce chemin.

Exemples :

- Chemins de Dyck,

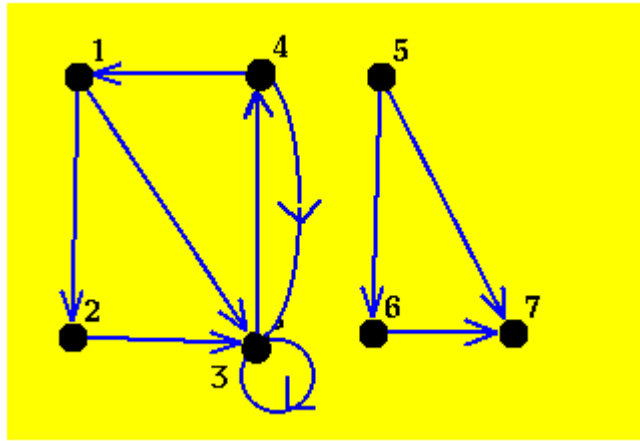


- Chemins de Motzkin.



Définition I.5.2- Graphe orienté

- Un *graphe orienté* est défini à l'aide d'un ensemble S de sommets et d'un ensemble d'arcs $A \subset S \times S$. On peut caractériser un graphe par *sa matrice d'incidence*.
- Ordre du graphe : nombre de sommets
- Degré entrant d'un sommet : nombre de arcs arrivant à ce sommet
- Degré sortant d'un sommet : nombre de arcs partant du sommet
- Boucle : l'arc arrivant est également l'arc partant du sommet
- Degré d'un sommet : la somme de degré entrant et sortant (attention : une boucle est comptée 2 fois)
- Degré du graphe : degré maximum de tous ses sommets
- Chemin : une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ ayant pour éléments alternativement des sommets (v_i) et des arcs (e_i) , commençant et se terminant par un sommet, et telle que e_i soit sortant du sommet v_{i-1} et entrant au sommet v_i , $i = 1, \dots, k$.
- Circuit : un chemin tel que v_0 apparait au moins deux fois dans le chemin.

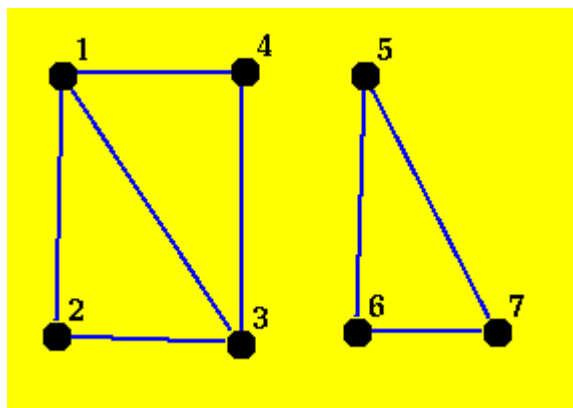


Définition I.5.3- Graphe non orienté

- Lorsque l'ensemble A est symétrique et sans boucle, le graphe est dit non orienté. Les arcs (u,v) et (v,u) sont alors confondus dans l'arête (u,v).
- Degré d'un sommet : nombre d'arcs incidents avec ce sommet
- Degré du graphe : degré maximum de tous ses sommets
- Graphe k-régulier : si tous les sommets ont le même degré k
- Chemin (chaîne) : une suite de la forme $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, v_{k-1}, e_k, v_k)$ ayant pour éléments alternativement des sommets (v_i) et des arêtes (e_i) , commençant et se terminant par un sommet, et telle que les extrémités de e_i soient v_{i-1} et v_i , $i = 1, \dots, k$.
- Cycle : un chemin dont v_0 apparaît au moins deux fois
- Distance entre deux sommets : la longueur de la plus petite chaîne les reliant.
- Diamètre d'un graphe : la plus longue des distances entre les deux sommets du graphe
- Graphe connexe : Un graphe (non orienté) est dit connexe si tout couple de sommets sont joignables par un chemin

Remarque : Lemme des poignées de mains

La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes.



Définition I.5.4- Graphe orienté acyclique (DAG pour Directed Acyclic Graph).

Comme son nom l'indique, un graphe orienté acyclique est un graphe orienté sans cycle.

Les DAG sont très utilisés par exemple dans les problèmes d'ordonnancement de tâches. Il existe une correspondance entre les DAG et relations d'ordre.

Propriété I.5.1- dualité entre DAG et relation d'ordre

- Si D est un DAG, et si x et y sont deux sommets du DAG, on dit que $x < y$ lorsqu'il existe un chemin de x vers y. La relation \leq induite est alors une relation d'ordre.
- Réciproquement, si \leq est une relation d'ordre, le graphe induit par la relation d'ordre est un DAG.

Propriété I.5.2- Linéarisation d'un ordre

Tout ordre partiel peut être étendu à un ordre total.

Remarque : Il n'y a pas en général unicité de l'extension et l'une de ces extensions peut être obtenue à l'aide du tri topologique.

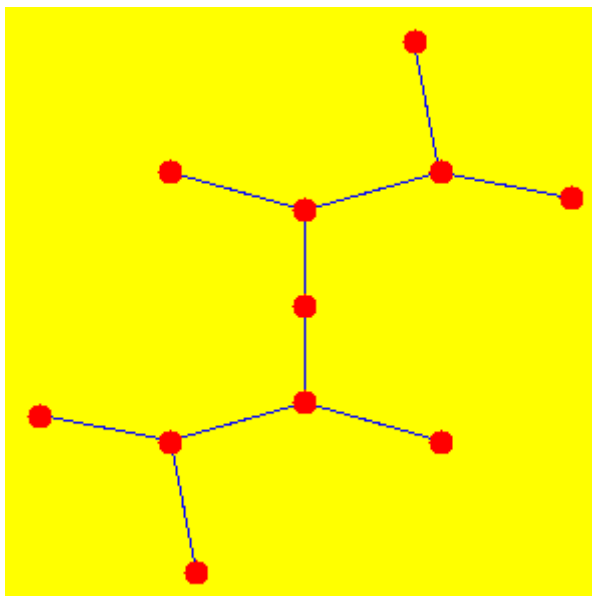
Preuve : Algorithme du tri topologique

On l'applique au graphe sans boucle d'un ordre partiel.

1. on initialise une liste vide
2. on associe à chaque sommet son degré entrant
3. on choisit un sommet de degré entrant 0
 - 3.1. on l'ajoute à la liste
 - 3.2. on le marque
 - 3.3. on diminue de 1 le degré entrant de tous ses successeurs
4. on recommence en 3. jusqu'à épuisement des sommets non marqués La liste obtenue est la linéarisation de l'ordre initial. On en déduit un ordre total compatible avec l'ordre partiel de départ.

Définition I.5.4- Arbres

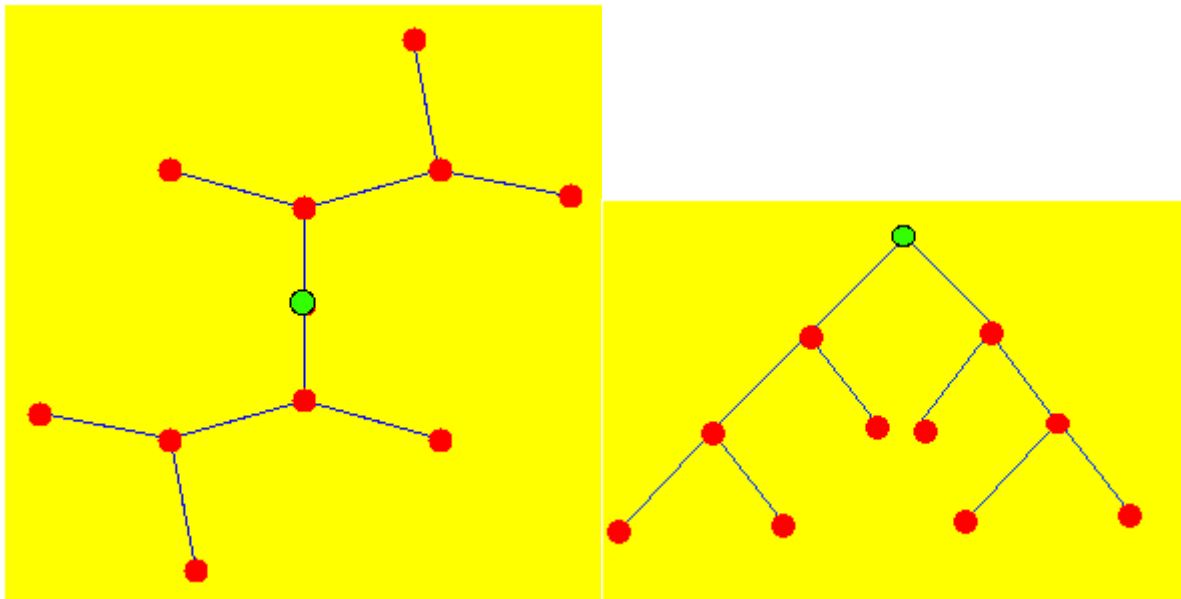
- Un arbre est un graphe connexe sans cycle.



- Un arbre enraciné est un arbre dans lequel un sommet est désigné. Ce sommet est appelé racine de l'arbre. Un arbre peut être défini récursivement par sa racine et par l'ensemble des

sous-arbres issus de cette racine. On parle de père d'un sommet ou de fils d'un sommets.

- Un arbre dessiné ou ordonné est un arbre dans lequel on distingue l'ordre des fils.



Définition I.5.4- Arbres binaires

- Un arbre binaire est une structure définie sur un ensemble fini de noeuds qui

- o ne contient aucun noeud (et est appelé feuille)
- o est formé de trois ensembles de noeuds disjoints appelés respectivement racine, sous arbre gauche et sous arbre droit, eux-mêmes arbres binaires.

- Un arbre binaire est dit *complet* si tout sommet a 0 ou 2 fils.

- Un arbre 1-2 est un arbre dessiné pour lequel chaque sommet a 0, 1 ou 2 fils

