Informatique Théorique
TP4 : Logique

▶ Exercice 1 :

Soient les propositions p : "Il fait froid" et q : "Il pleut".

1. Ecrire une phrase simple qui correspond à chacun des énoncés suivants :
   (a) $\neg p$
   (b) $p \wedge q$
   (c) $p \vee q$
   (d) $q \vee \neg p$
   (e) $\neg p \wedge \neg q$
   (f) $\neg\neg q$
2. Ecrire une phrase simple qui correspond à chacun des énoncés suivants :
   (a) $q \rightarrow p$
   (b) sa contraposée
   (c) sa réciproque
   (d) la contraposée de sa réciproque

▶ Exercice 2 :

Soient p : "Eric lit *Match*", q : "Eric lit *L'Express*" et r : "Eric lit *les Echos*". Ecrivez en notation symbolique chacune des phrases suivantes :

1. Eric lit *Match* ou *l'Express*, mais ne lit pas *les Echos*.
2. Eric lit *Match* et *l'Express*, ou il ne lit ni *Match* ni *les Echos*.
3. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit *Match* mais pas *les Echos*.
4. Ce n'est pas vrai qu'Eric lit *les Echos* ou *l'Express* mais pas *Match*.

▶ Exercice 3 :

1. Ecrire la table de vérité de $p \rightarrow (q \vee \neg r)$.
2. Pour quelles valeurs logiques de p, q, et r la formule suivante est-elle fausse : $(\neg p \wedge q) \vee r \rightarrow (p \vee \neg q) \wedge \neg r$?
3. Donner la forme normale disjonctive de $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.
4. La formule $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow p) \vee (r \rightarrow q)$ est-elle une tautologie ?

▶ Exercice 4 :

Trouver :

1. la contraposée de $p \to (q \vee r)$
2. la réciproque de $(p \wedge q) \to \neg r$
3. la contraposée de la réciproque de $p \to \neg q$
4. la réciproque de la contraposée de $\neg p \to \neg q$

▶ Exercice 5 :
Montrez que $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$ est une tautologie.

▶ Exercice 6 :
La forme propositionnelle f étant fixée, que peut-on dire d'une forme propositionnelle g telle que $(f \vee g)$ est une tautologie et $(f \wedge g)$ est une contradiction ?

▶ Exercice 7 :
Montrez que pour prouver un théorème de la forme $p \models (q \vee r)$, il suffit de prouver le théorème $(p \wedge \neg q) \models r$.

▶ Exercice 8 :
Quatre malfaiteurs notoires A,B,C,D ont été convoqués à Scotland Yard pour y être interrogés à propos d'une affaire de vol. Les faits suivants furent établis de façon certaine :

- si A et B sont coupables à la fois, alors C est coupable
- si A est coupable, alors l'un au moins de B et C est coupable
- si C est coupable, alors D est coupable
- si A est innocent, alors D est coupable.

Après modélisation, utilisez la méthode de Zéro-Résolution pour prouver que D est coupable.

▶ Exercice 9 :
Ecrire la négation des formules suivantes :

1. $\forall x\ (p(x) \to q(x))$
2. $\exists x\ (p(x) \wedge q(x))$
3. $\forall x\ (p(x) \leftrightarrow q(x))$
4. $\forall x \forall y\ (p(x,y) \wedge q(x,y) \to r(x,y))$
5. $\forall x \exists y\ (p(x,y) \to (\forall z\ r(z)))$
6. $\forall x\ (r(x) \to (\exists y\ p(x,y)))$

▶ Exercice 10 :
Formaliser les assertions suivantes en utilisant les prédicats indiqués :

1. Personne n'est parfait (prédicat $p(x)$: "x est parfait")
2. 0 est multiple de chaque entier (prédicat $m(x,y)$: "x est multiple de y" ; prédicat $e(x)$: "x est un entier")

3. Les absents n'ont pas tous tort (prédicat $a(x)$: "x est absent" ; prédicat $t(x)$: "x a tort")

▶ Exercice 11 :

Soient les prédicats $c(x)$: "x est un curé", $v(x)$: "x est un vélo", $p(x, y)$: "x possède y". Traduire en français les propositions suivantes :

1. $\forall x\ v(x) \rightarrow (\exists z\ c(z) \wedge p(z, x))$
2. $\forall x\ c(x) \rightarrow (\forall z \forall y\ (v(z) \wedge v(y) \wedge (z \neq y)) \rightarrow (\neg p(x, y) \vee \neg p(x, z)))$
3. $\exists x\ c(x) \wedge (\forall y\ v(y) \rightarrow \neg p(x, y))$