Points Fixes dans les Réseaux Booléens Conjonctifs Symétriques

Julio Aracena, Lilian Salinas & Adrien Richard

Universidad de Concepción, Chile

CNRS & Université de Nice-Sophia Antipolis

1 Introduction

Soit un <u>réseau booléen</u>

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n \qquad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Soit $G(f)$ le <u>graphe d'interaction</u> de f

$$j \xrightarrow{+} i \in G(f) \iff \exists x \text{ tel que } f_i(x_1 \dots \overset{\text{composante } j}{\overset{\downarrow}{0}} \dots x_n) < f_i(x_1 \dots \overset{\text{composante } j}{\overset{\downarrow}{1}} \dots x_n)$$

$$j \xrightarrow{-} i \in G(f) \iff \exists x \text{ tel que } f_i(x_1 \dots \underset{\text{composante } j}{\underset{\uparrow}{0}} \dots x_n) > f_i(x_1 \dots \underset{\text{composante } j}{\underset{\uparrow}{1}} \dots x_n)$$

Soit un <u>réseau booléen</u>

$$f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^n \qquad f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$$

Soit $G(f)$ le <u>graphe d'interaction</u> de f

$$j \xrightarrow{+} i \in G(f) \iff \exists x \text{ tel que } f_i(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{composante } j}}{x_1 \dots 0 \dots x_n}) < f_i(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{composante } j}}{x_1 \dots 1 \dots x_n})$$

$$j \xrightarrow{-} i \in G(f) \iff \exists x \text{ tel que } f_i(x_1 \dots 0 \dots x_n) > f_i(x_1 \dots 1 \dots x_n)$$

composante j composante j

Question : Que peut-on dire sur les <u>points fixes</u> de f en fonction de $G(f)$?

Théorème (Julio Aracena)

Soit τ^+ la taille d'un plus petit ensemble de sommets qui intersecte tous les cycles positifs de $G(f)$. Alors

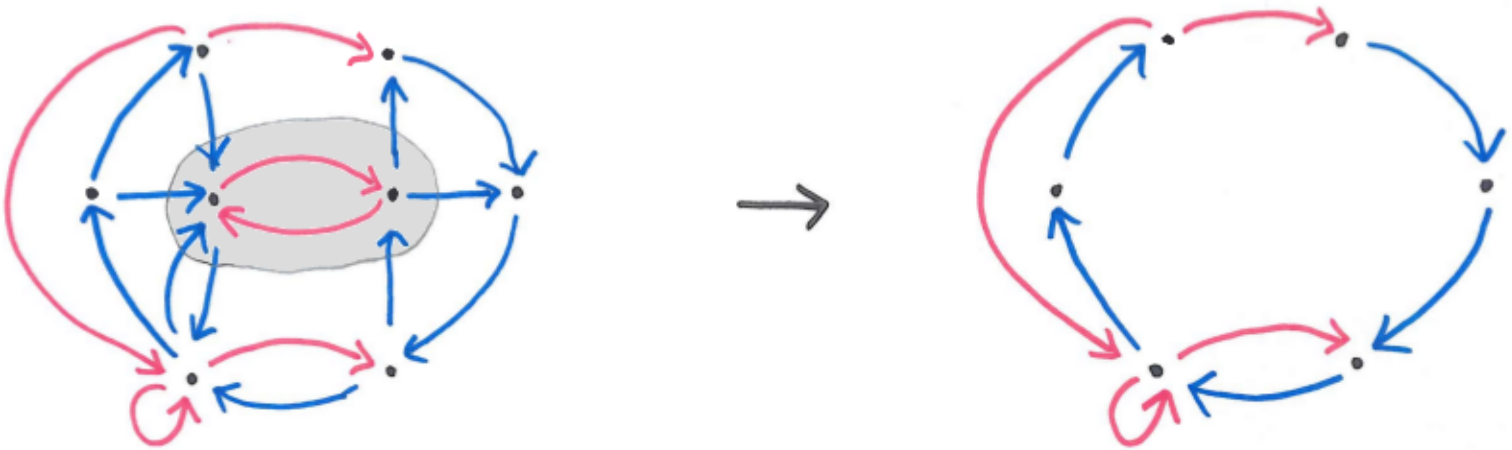
$$\underbrace{|\mathrm{Fix}(f)|}_{\text{Ensemble des points fixes de } f} \leq 2^{\tau^+}$$

Théorème (Julio Aracena)

Soit τ^+ la taille d'un plus petit ensemble de sommets qui intersecte tous les cycles positifs de $G(f)$. Alors

$$\underbrace{|\mathrm{Fix}(f)|}_{\text{Ensemble des points fixes de } f} \leqslant 2^{\tau^+}$$

Exemple

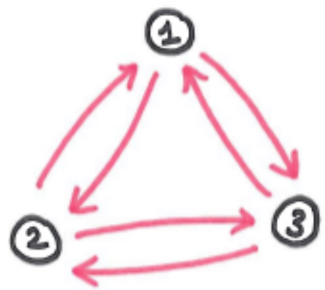


$\tau^+ = 2$

La borne 2^{τ^+} est très perfectible

Exemple

Au plus 2 points fixes



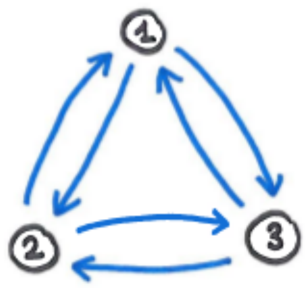
Au plus 3 points fixes

Dans les deux cas

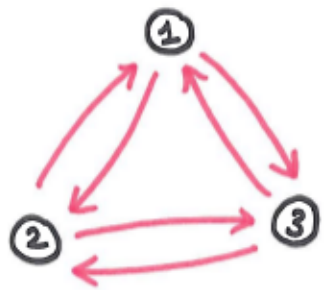
$$2^{\tau^+} = 4$$

La borne 2^{τ^+} est très perfectible

Exemple



Au plus 2 points fixes

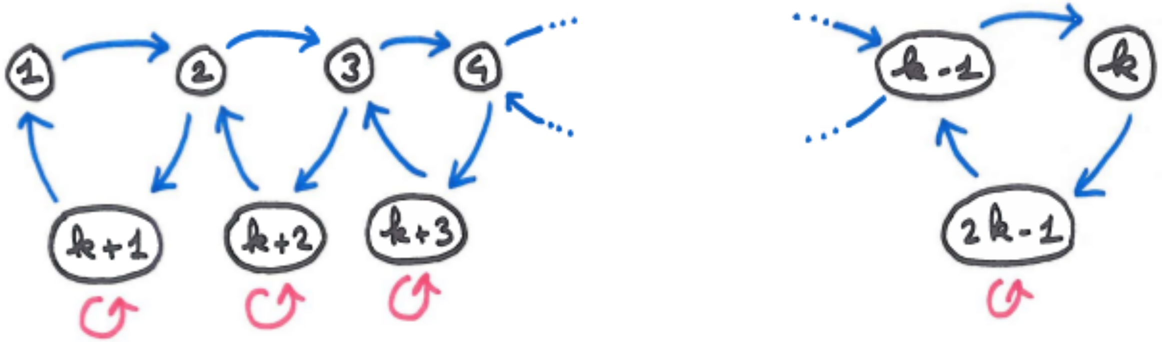


Au plus 3 points fixes

Dans les deux cas

$$2^{\tau^+} = 4$$

Exemple



$$2^{\tau^+} = 2^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor}$$

Au plus 1 point fixe !

La borne 2^{τ^+} ne dépend que des cycles positifs...

↳ Peut-on l'améliorer en tenant compte des cycles négatifs ?

↳ Quelle est l'influence des cycles négatifs ?

↳ Quelle est l'influence des connexions entre les cycles négatifs et entre les cycles de signe opposé ?

La borne 2^{τ^+} ne dépend que des cycles positifs...

↳ Peut-on l'améliorer en tenant compte des cycles négatifs ?

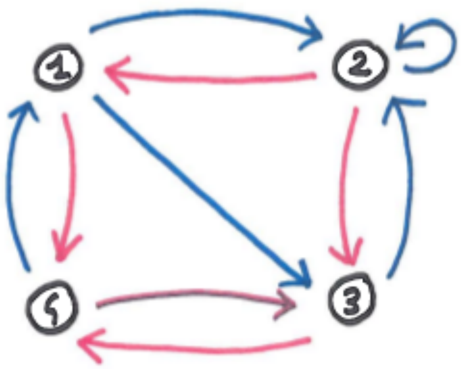
↳ Quelle est l'influence des cycles négatifs ?

↳ Quelle est l'influence des connexions entre les cycles négatifs et entre les cycles de signe opposé ?

↳ Étude de ces questions dans le cadre des <u>réseaux conjonctifs</u>

2) Réseaux Conjonctifs

Graphe signé (G,λ)



$\Leftrightarrow$

Réseau conjonctif associé

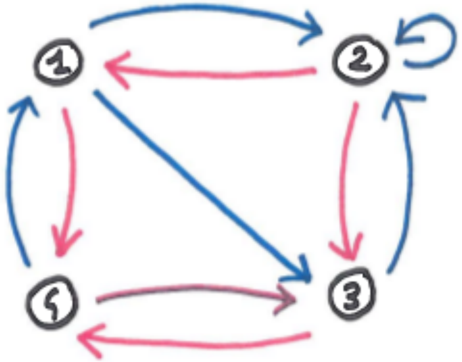
$$f_1(x) = \overline{x_2} \wedge x_4$$

$$f_2(x) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

$$f_3(x) = x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_4}$$

$$f_4(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$

Graphe signé (G,λ)



$\Longleftrightarrow$

Réseau conjonctif associé

$$f_1(x) = \overline{x_2} \wedge x_4$$

$$f_2(x) = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$$

$$f_3(x) = x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge \overline{x_4}$$

$$f_4(x) = \overline{x_1} \wedge \overline{x_3}$$

<u>Question</u> : Étant donné un graphe non-signé G, quelles sont les répartitions de signes $\lambda : E(G) \to \{+,-\}$ <u>optimales</u>, c'est à dire qui maximisent le nombre de points fixes dans le réseau conjonctif (G,λ) ?

Question difficile...

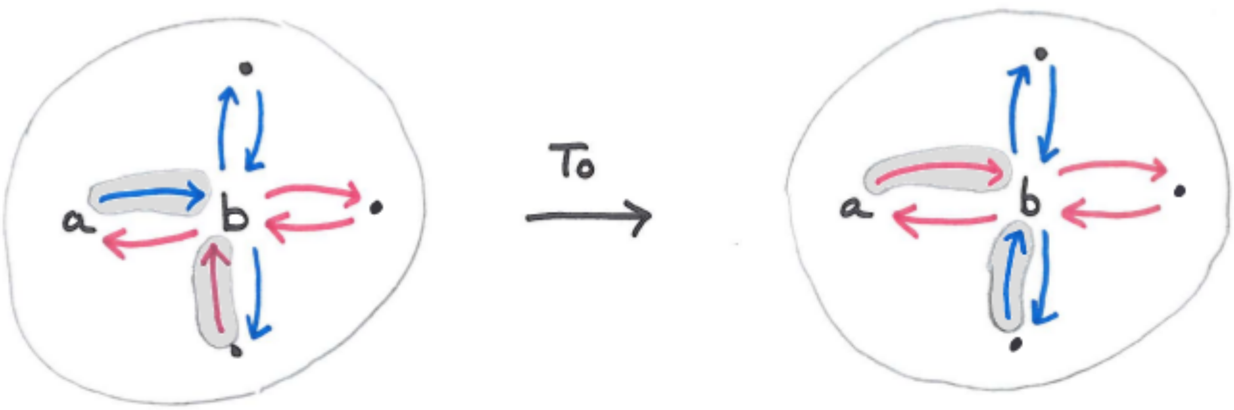
↳ Étude dans le cadre des <u>graphes simples</u>, c'est à dire <u>symetriques</u> et <u>sans boucle</u>

Question difficile...

↳ Étude dans le cadre des <u>graphes simples</u>, c'est à dire <u>symétriques</u> et <u>sans boucle</u>

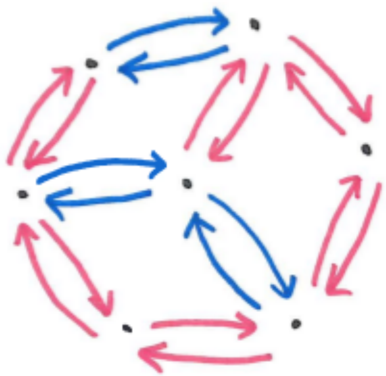
<u>Remarque</u> : Il existe toujours des répartitions de signes optimales telles que chaque cycle de longueur 2 est positif

En effet, s'il existe un cycle négatif $a \rightleftarrows b$ alors on applique la transformation suivante qui ne fait jamais décroître le nombre de points fixes

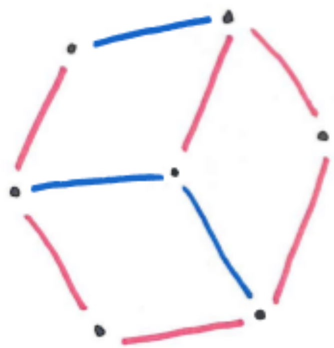


Donc dans la suite, tous les graphes signés considérés sont

- symétriques (non dirigés)
- sans boucle
- sans cycle négatif de longueur 2



$\Longleftrightarrow$

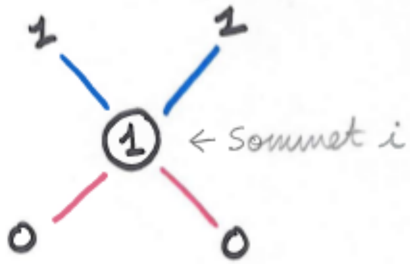


Graphe simple signé

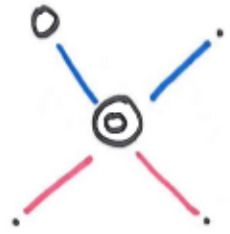
Si G est un graphe simple alors

$x \in \mathrm{Fix}(G, \lambda) \iff$

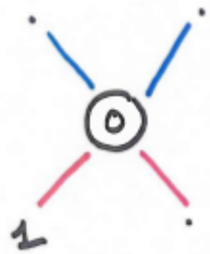
1/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 1$ on a



2/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 0$ on a



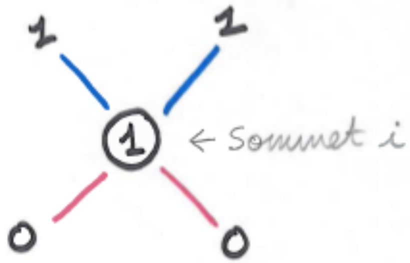
ou



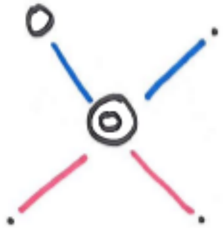
Si G est un graphe simple alors

$x \in \mathrm{Fix}(G, \lambda) \iff$

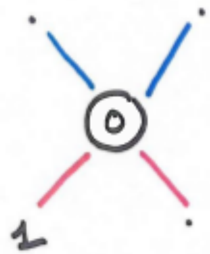
1/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 1$ on a



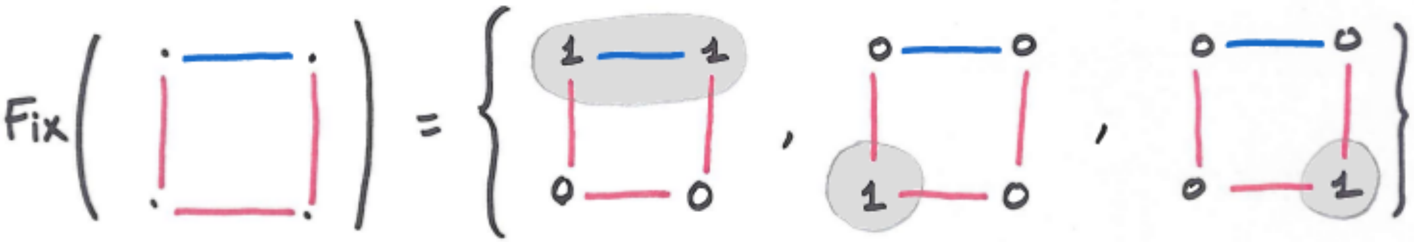
2/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 0$ on a



ou



Exemple



En situation de point fixe :

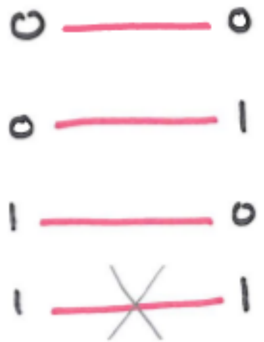
les sommets adjacents par un arc ⊕ ont la m̂ valeur

motifs interdits

En situation de point fixe :

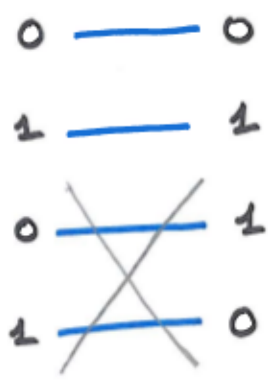
les sommets adjacents
par un arc ⊕ ont la m̂ valeur

motifs interdits



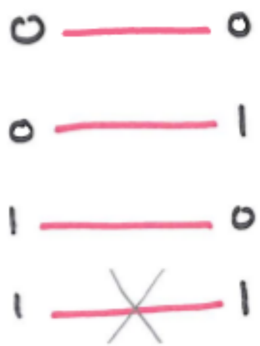
motif interdit

En situation de point fixe :



les sommets adjacents par un arc ⊕ ont la m̂ valeur

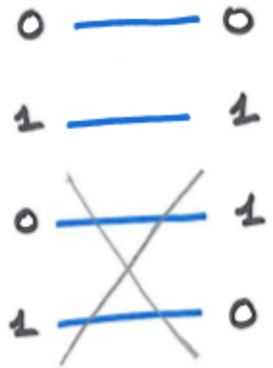
motifs interdits



motif interdit

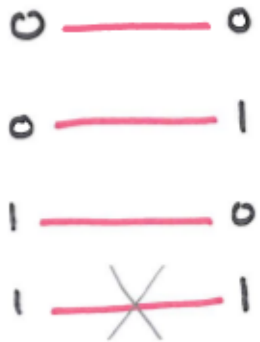
$\boxed{\text{Les arcs ⊖ imposent moins de contraintes que les arcs ⊕}}$

En situation de point fixe :



} les sommets adjacents par un arc ⊕ ont la m̂ valeur

} motifs interdits



} motif interdit

Les arcs ⊖ imposent moins de contraintes que les arcs ⊕

↓

On maximise le nombre de points fixes quand il n'y a que des arcs ⊖ ?

En situation de point fixe :

0 — 0
1 — 1 } les sommets adjacents par un arc $\oplus$ ont la m̂ valeur

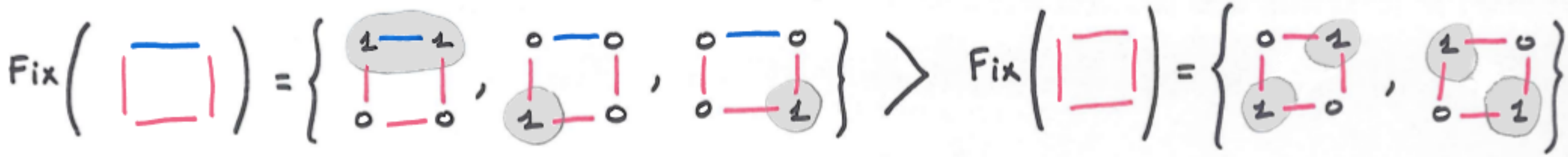
~~0 — 1~~
~~1 — 0~~ } motifs interdits

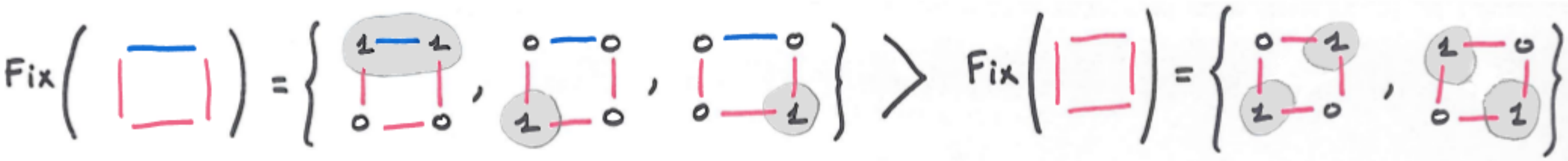
0 — 0
0 — 1
1 — 0
~~1 — 1~~ } motif interdit

$\boxed{\text{Les arcs } \ominus \text{ imposent moins de contraintes que les arcs } \oplus}$

↓

$\boxed{\text{On maximise le nombre de points fixes quand il n'y a que des arcs } \ominus \text{ ? Non !...}}$

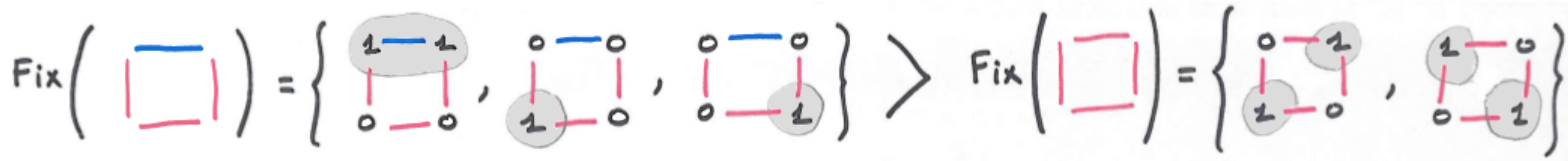

Fix
=
>
Fix
=



<u>Théorème</u> : Si G est un graphe simple <u>sans carré induit</u> alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |\mathrm{Fix}(G,\lambda)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,-)|$$

c'est à dire que la répartition qui n'attribue que des signes $\ominus$ est optimale



Théorème : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall\ \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |\mathrm{Fix}(G,\lambda)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,-)|$$

c'est à dire que la répartition qui n'attribue que des signes $\ominus$ est optimale

Messages :

1/ Les cycles de longueur 2 doivent être positifs (T_0)
ET "double négatif" pour limiter les contraintes

2/ La notion de cycle négatif ne semble pas être pertinente dans ce contexte...

Si G est un graphe simple alors

$x \in \mathrm{Fix}(G, -) \iff$

1/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 1$ on a

2/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 0$ on a

$\iff \mathbb{1}(x) \in MIS(G)$

Si G est un graphe simple alors

$x \in \mathrm{Fix}(G, -) \iff$

1/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 1$ on a

2/ Pour tout sommet i tel que $x_i = 0$ on a

$\iff 1(x) \in \mathrm{MIS}(G)$

$$\boxed{\mathrm{Fix}(G, -) = \mathrm{MIS}(G)}$$

Exemple

Fix() = {  ,  }

Théorème : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |\mathrm{Fix}(G,\lambda)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,-)| = |\mathrm{MIS}(G)|$$

<u>Théorème</u> : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |Fix(G,\lambda)| \leqslant |Fix(G,-)| = |MIS(G)|$$

<u>Corollaire</u> : Si G est un graphe simple sans carré induit et si
si G' est obtenu à partir de G en contractant des arrêtes alors

$$|MIS(G')| \leqslant |MIS(G)|$$

Théorème : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |Fix(G,\lambda)| \leqslant |Fix(G,-)| = |MIS(G)|$$

Corollaire : Si G est un graphe simple sans carré induit et si

si G' est obtenu à partir de G en contractant des arrêtes alors

$$|MIS(G')| \leqslant |MIS(G)|$$

L'hypothèse "sans carré induit" est nécessaire

Théorème : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |\mathrm{Fix}(G,\lambda)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,-)| = |\mathrm{MIS}(G)|$$

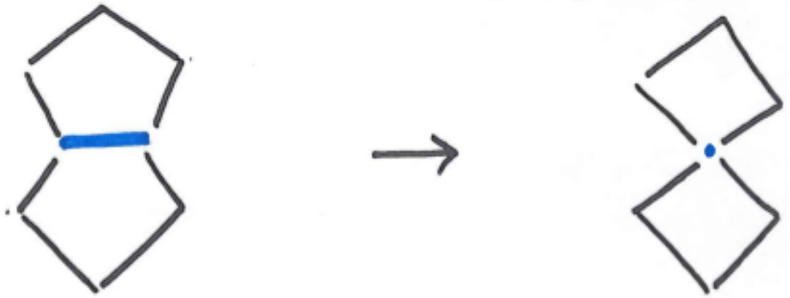
Corollaire : Si G est un graphe simple sans carré induit et si
si G' est obtenu à partir de G en contractant des arrêtes alors

$$|\mathrm{MIS}(G')| \leqslant |\mathrm{MIS}(G)|$$

L'hypothèse "sans carré induit" est nécessaire

$$\mathrm{MIS}(\triangle) = \{\triangle, \triangle, \triangle\} > \mathrm{MIS}(\square) = \{\square, \square\}$$

<u>Difficulté :</u> L'hypothèse "sans carré induit" n'est pas préservée par la contraction d'arrêtes



3 Preuve

Schéma général

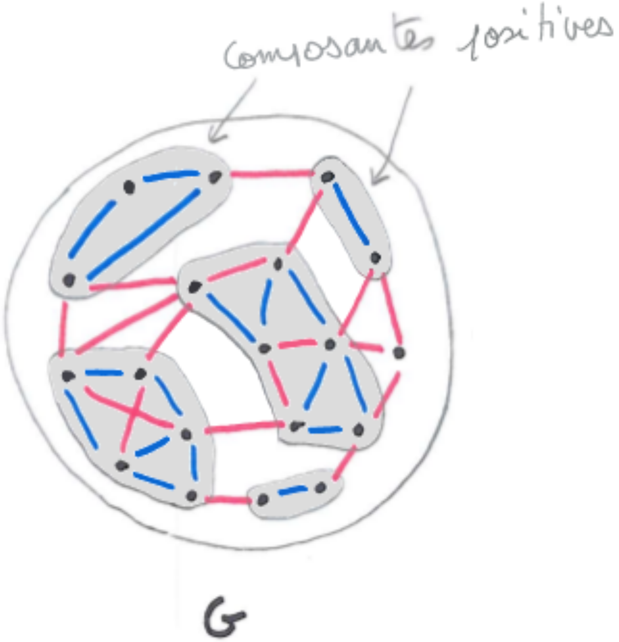
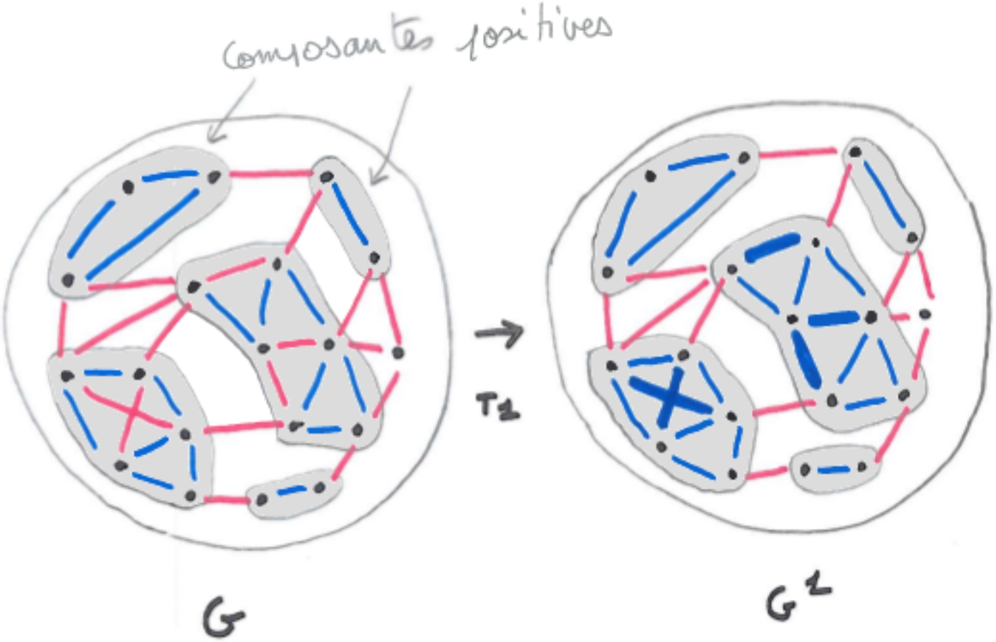
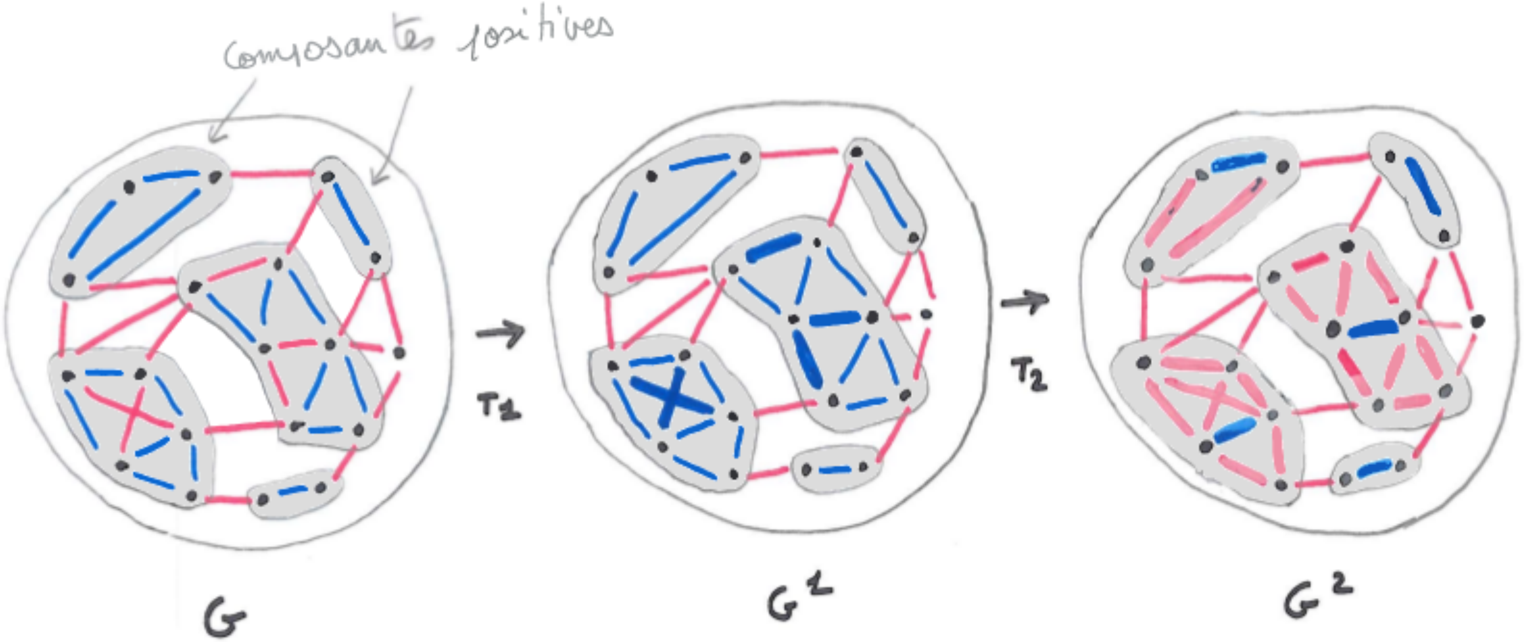


Schéma général



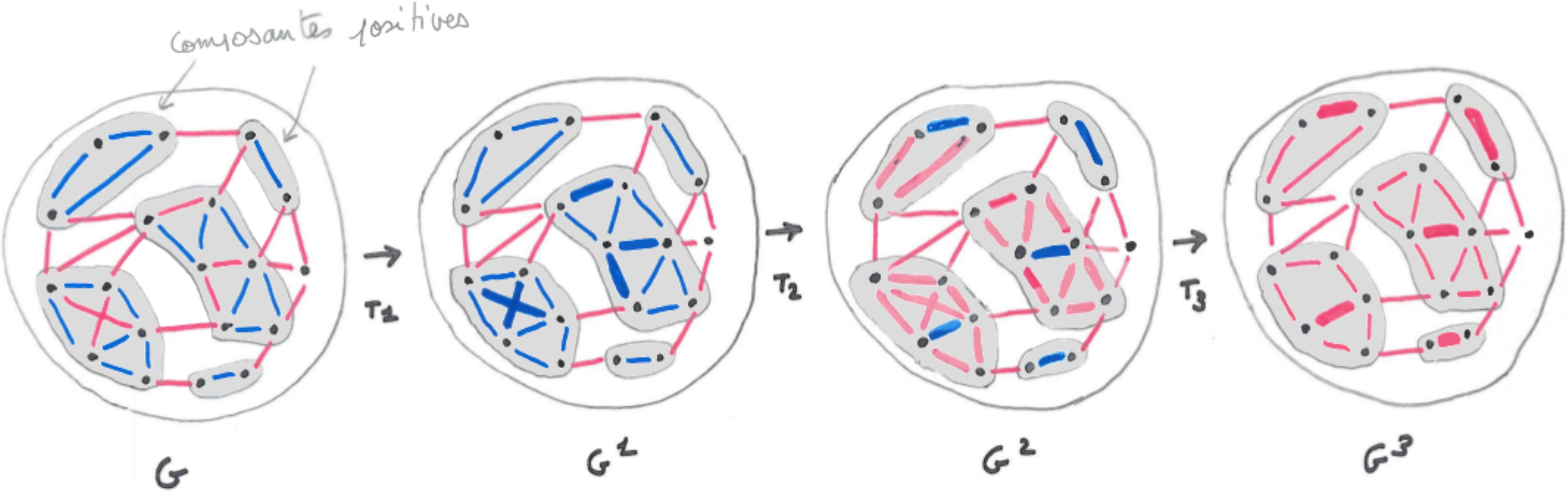
$$|\mathrm{Fix}(G)| \leq |\mathrm{Fix}(G^1)|$$

Schéma général



$$|\mathrm{Fix}(G)| \leq |\mathrm{Fix}(G^1)| \leq |\mathrm{Fix}(G^2)|$$

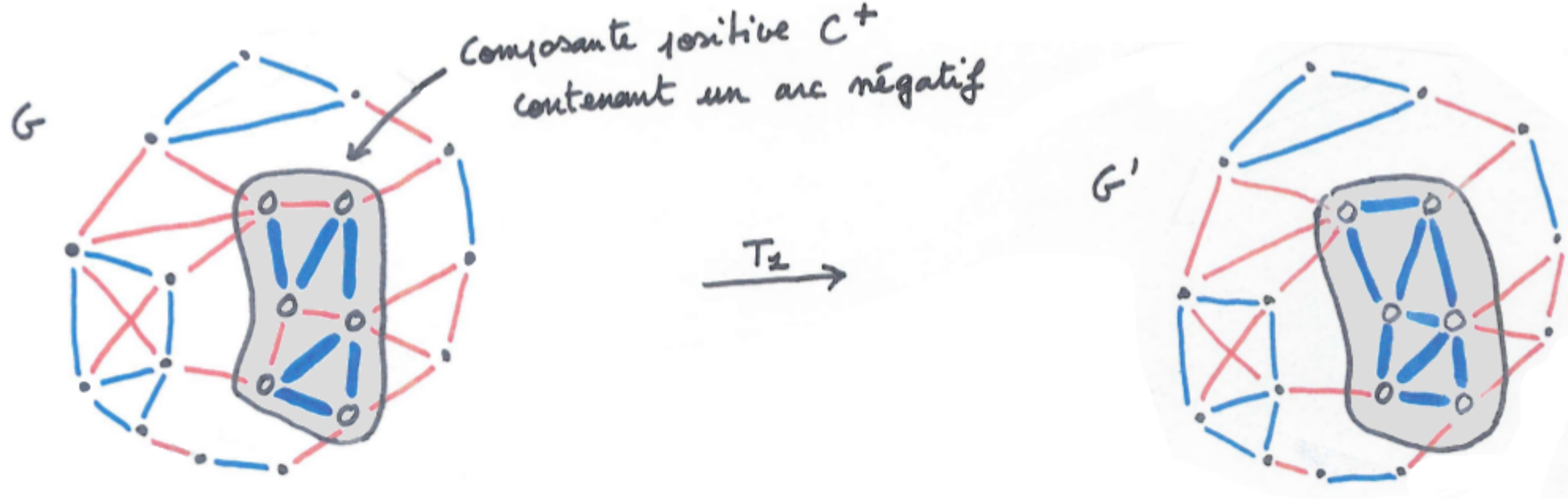
Schéma général



Hypothèse "sans carré induit"

$$|Fix(G)| \leq |Fix(G^1)| \leq |Fix(G^2)| \leq |Fix(G^3)| = |MIS(G^3)|$$

T_1 : Complétion des composantes positives

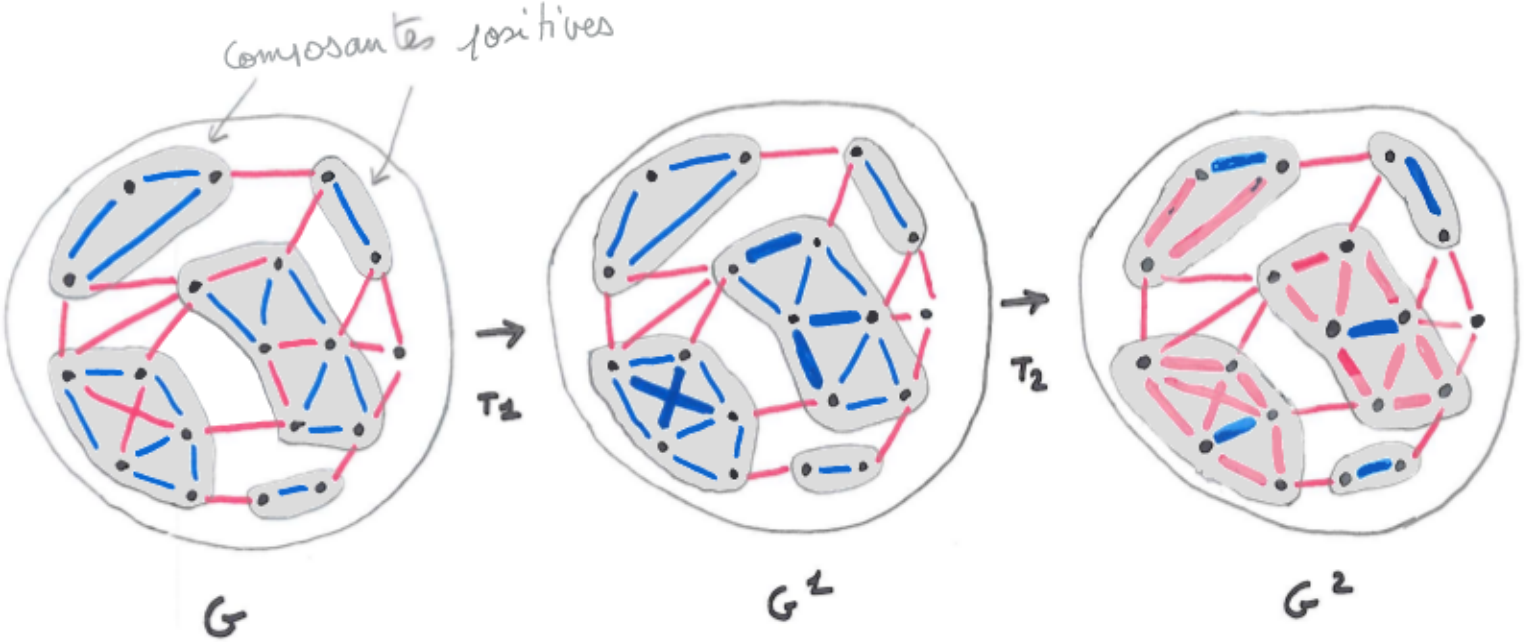


En situation de point fixe
tous les sommets de C^+ ont la même valeur.

Comme 1 — 1 est un motif interdit

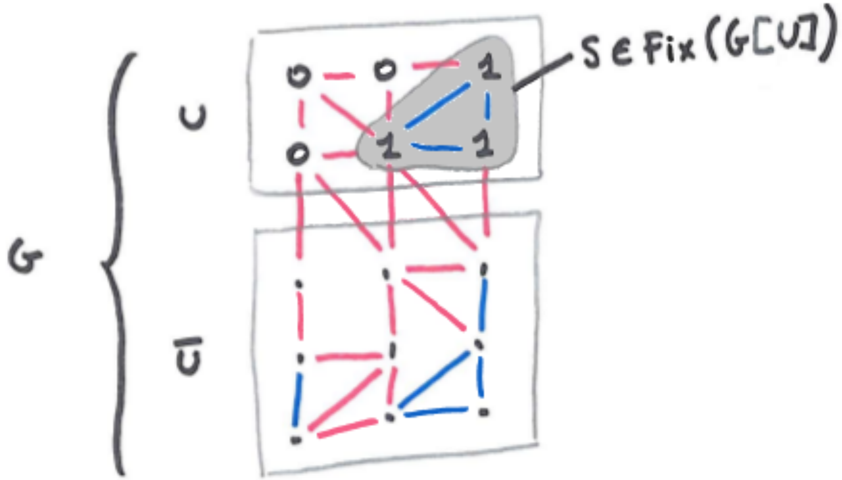
$\boxed{\text{tous les sommets de } C^+ \text{ sont à } 0}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\mathrm{Fix}(G) \subseteq \mathrm{Fix}(G')}$

Schéma général

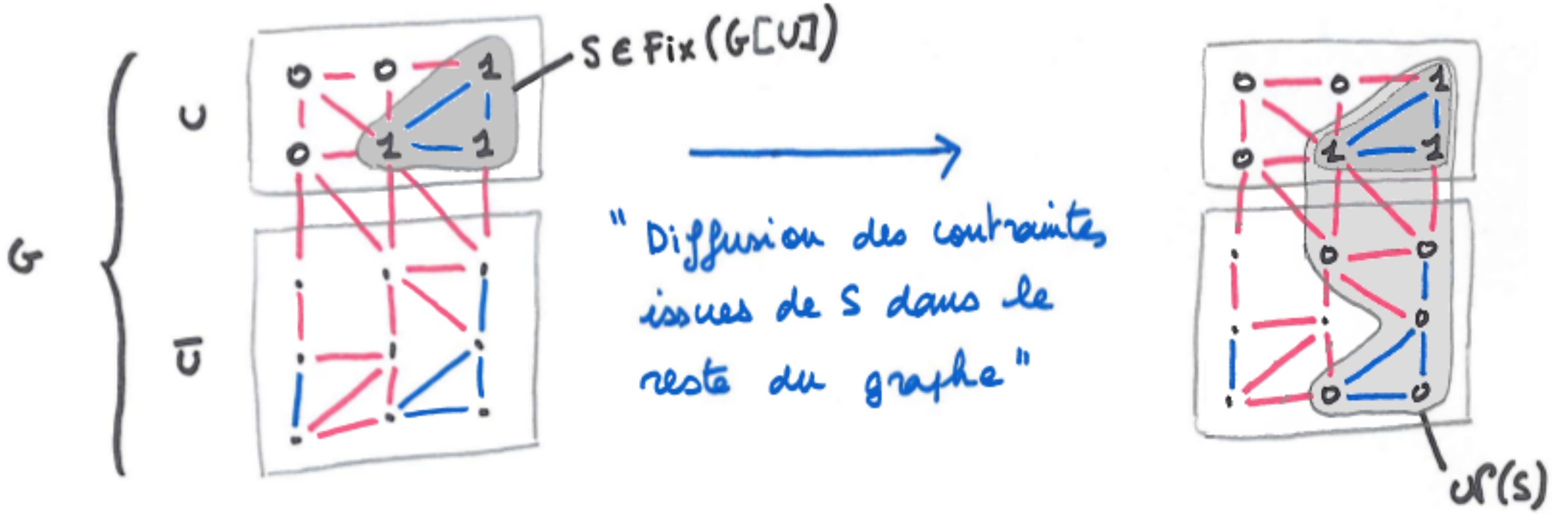


$$|\mathrm{Fix}(G)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G^1)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G^2)|$$

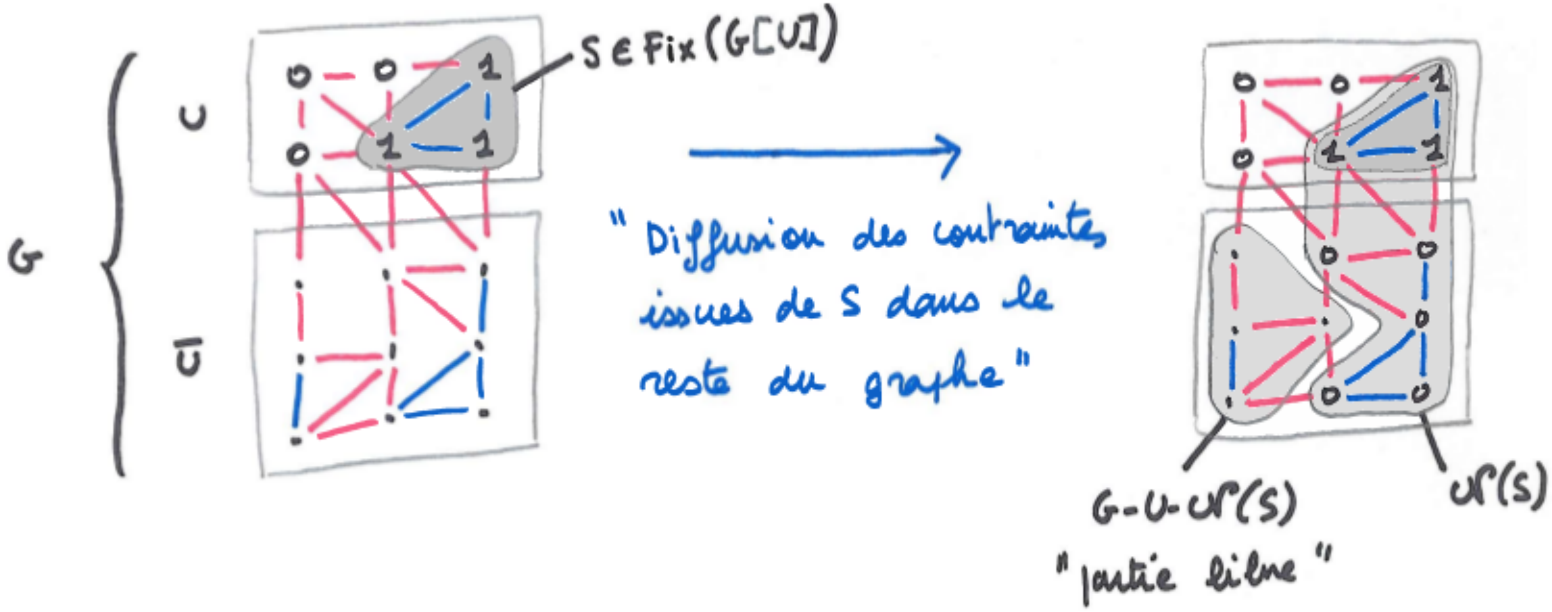
Lemme de décomposition



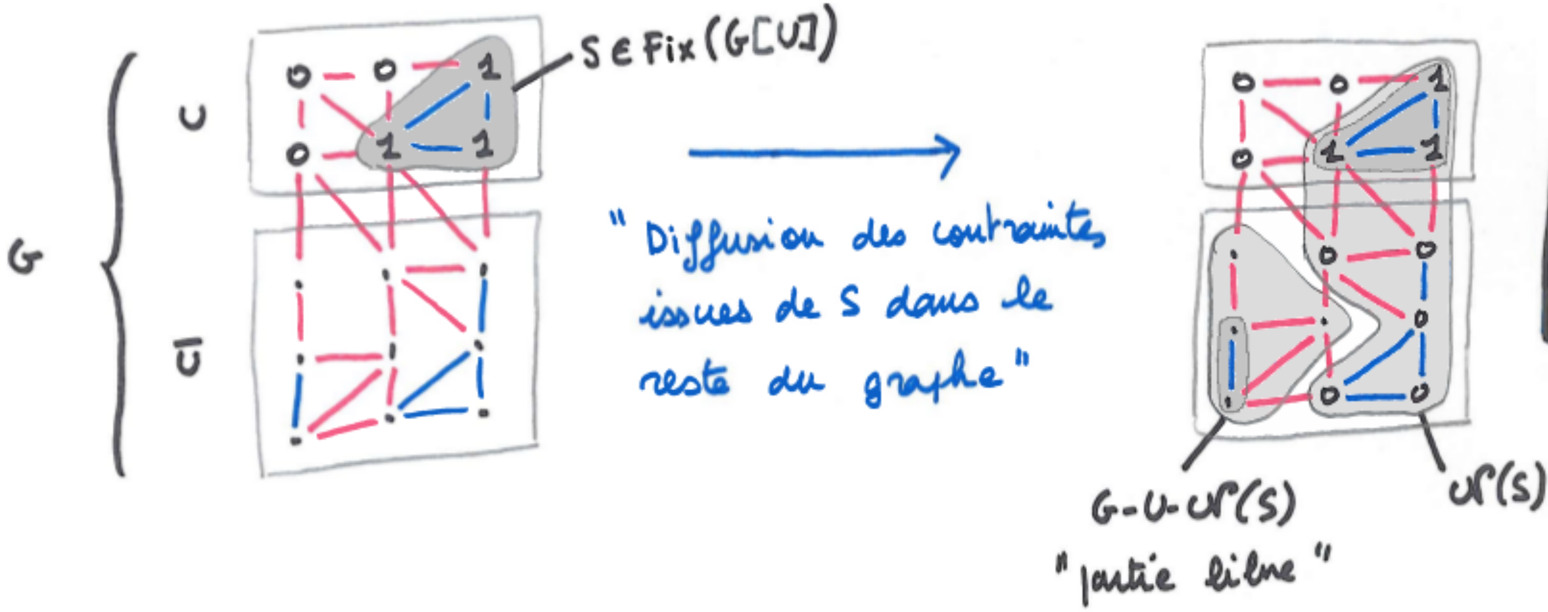
Lemme de décomposition



Lemme de décomposition

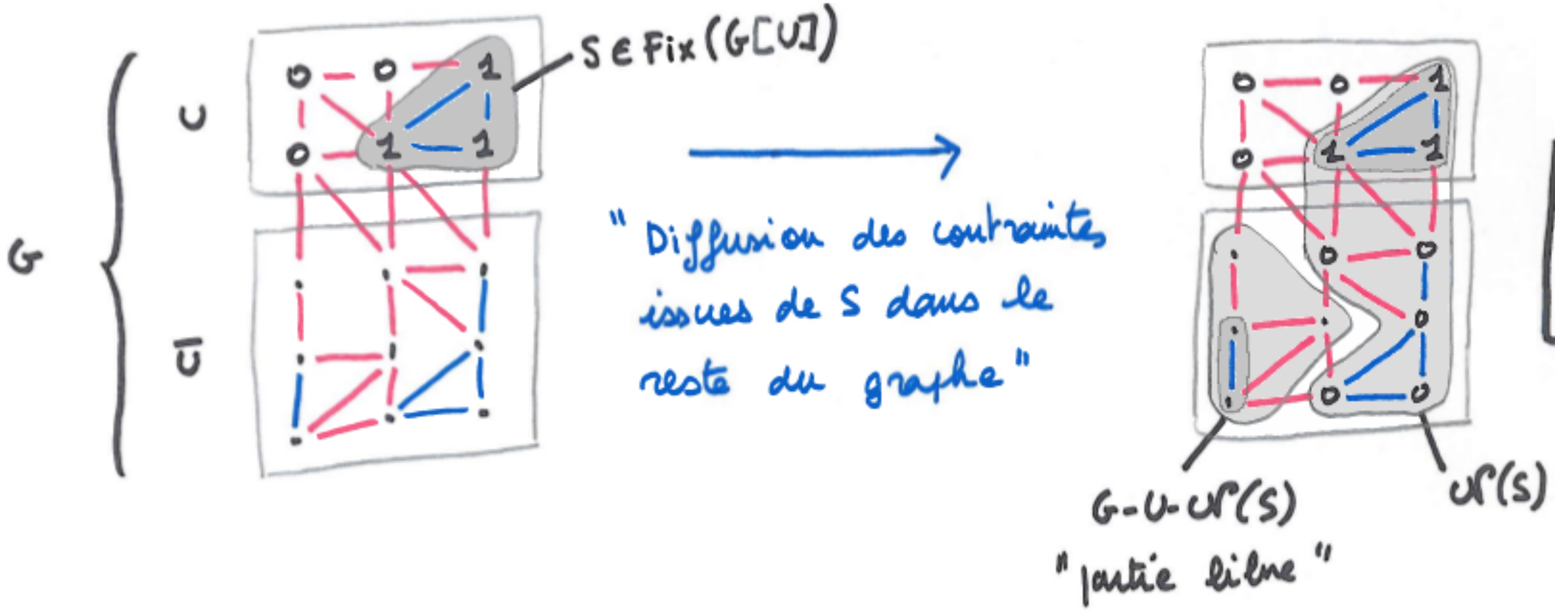


Lemme de décomposition



$\forall\, S' \in Fix(G - U - \mathcal{N}(S))$ on a $S \cup S' \in Fix(G)$

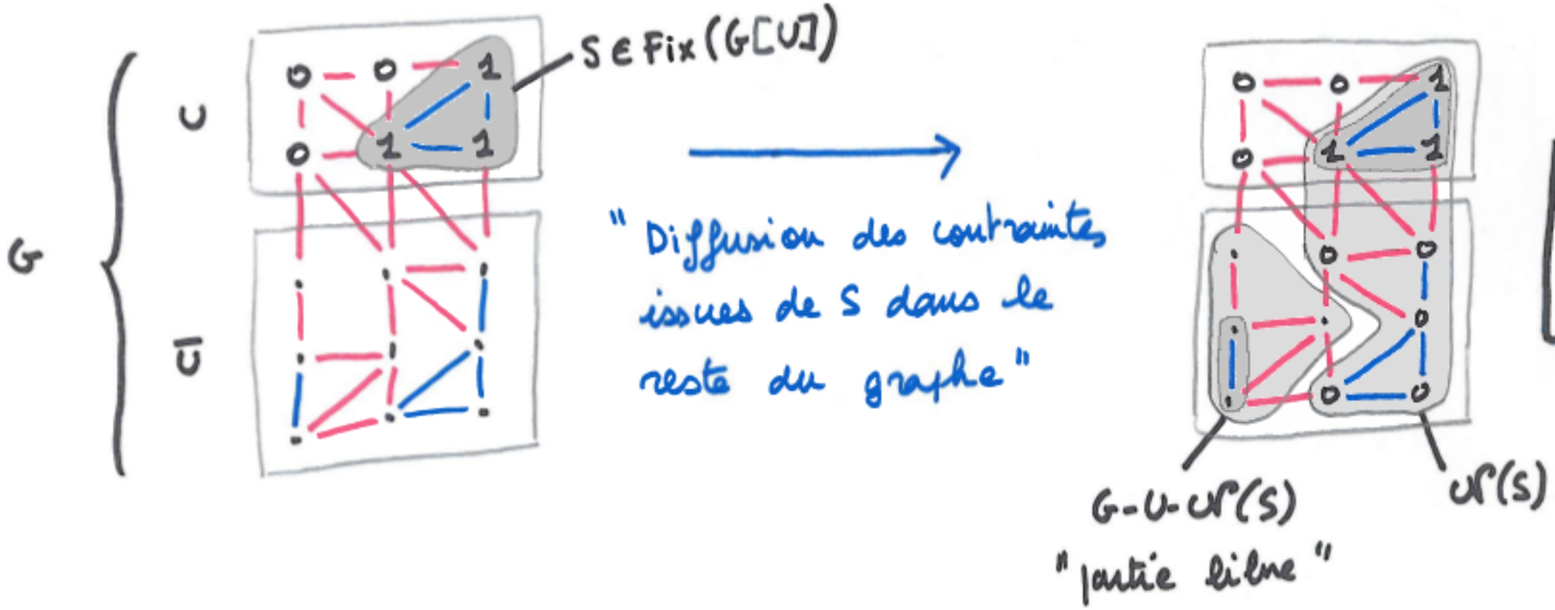
Lemme de décomposition



$\forall S' \in Fix(G - U - \mathcal{N}(S))$
on a $S \cup S' \in Fix(G)$

On note $Fix(G, U)$ l'ensemble des points fixes de G que l'on obtient à partir de $Fix(G[U])$

Lemme de décomposition



$\forall\, S' \in \mathrm{Fix}(G-U-\mathcal{N}(S))$
on a $S \cup S' \in \mathrm{Fix}(G)$

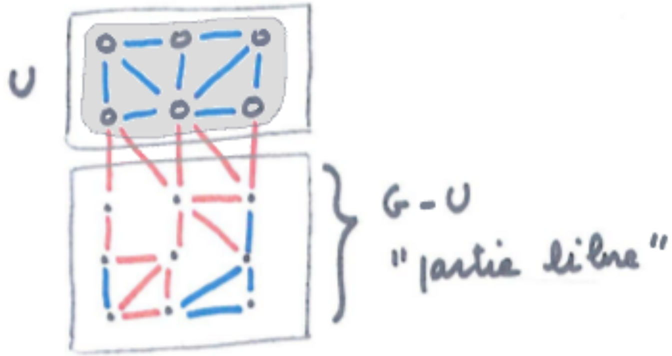
On note $\mathrm{Fix}(G,U)$ l'ensemble des points fixes de G que l'on obtient à partir de $\mathrm{Fix}(G[U])$

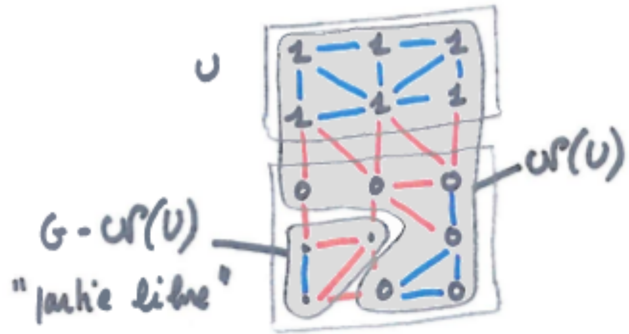
$$|\mathrm{Fix}(G[U])| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,U)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G)|$$

Égalité si U est une union de composantes positives

Lemme de décomposition

Si U est une composante positive alors $\mathrm{Fix}(G[U]) = \{\emptyset, U\}$



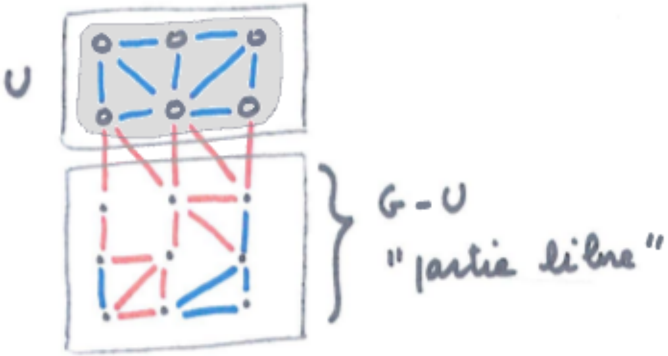


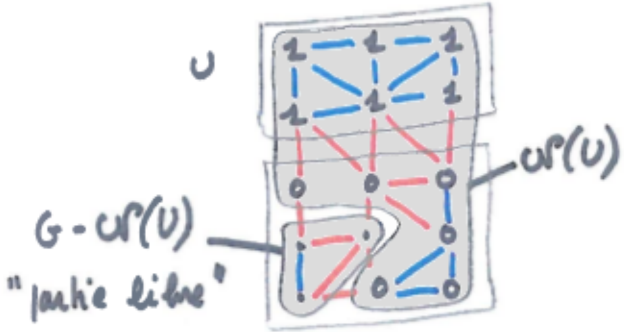
$\boxed{\mathrm{Fix}(G-U) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$

$\boxed{U \cup \mathrm{Fix}(G - cN(U)) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$

Lemme de décomposition

Si U est une composante positive alors $\mathrm{Fix}(G[U]) = \{\emptyset, U\}$





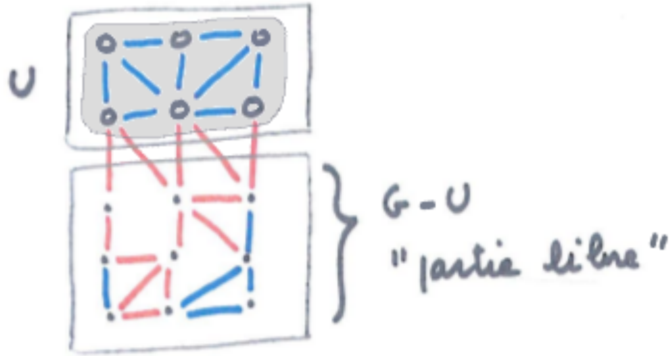
$$\boxed{\mathrm{Fix}(G-U) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$$

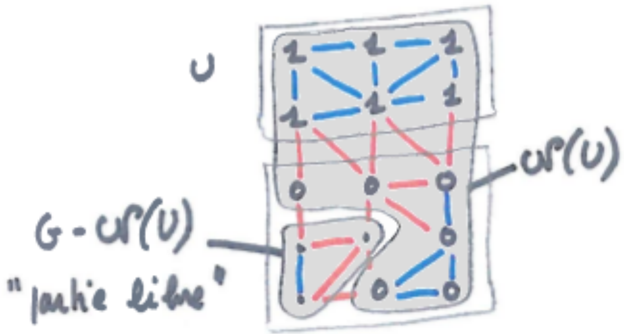
$$\boxed{U \cup \mathrm{Fix}(G-\mathcal{N}(U)) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$$

$$\boxed{|\mathrm{Fix}(G)| = |\mathrm{Fix}(G-U)| + |\mathrm{Fix}(G-\mathcal{N}(U))|}$$

Lemme de décomposition

Si U est une composante positive alors $\mathrm{Fix}(G[U]) = \{\emptyset, U\}$





$$\boxed{\mathrm{Fix}(G-U) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$$

$$\boxed{U \cup \mathrm{Fix}(G-\mathcal{N}(U)) \subseteq \mathrm{Fix}(G)}$$

$$\boxed{|\mathrm{Fix}(G)| = |\mathrm{Fix}(G-U)| + |\mathrm{Fix}(G-\mathcal{N}(U))|}$$

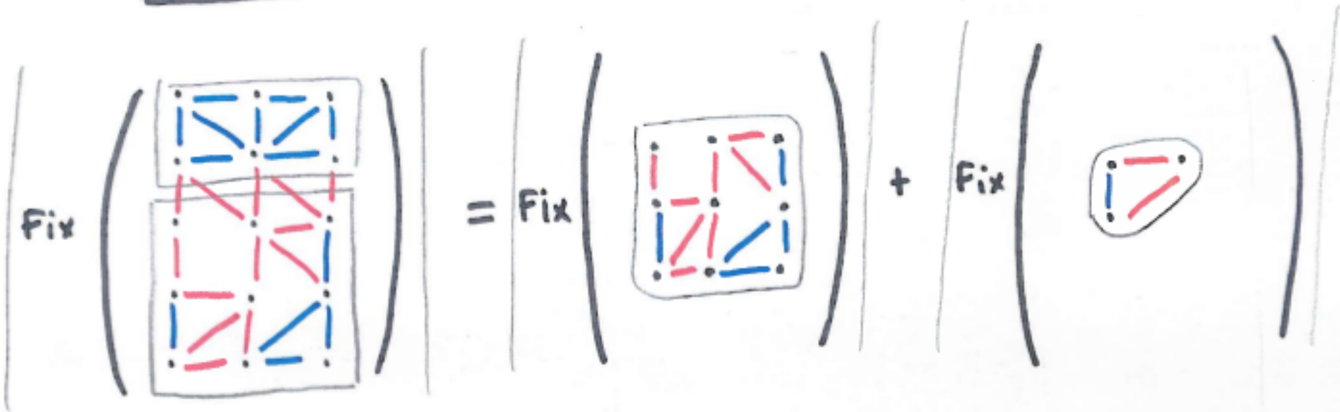
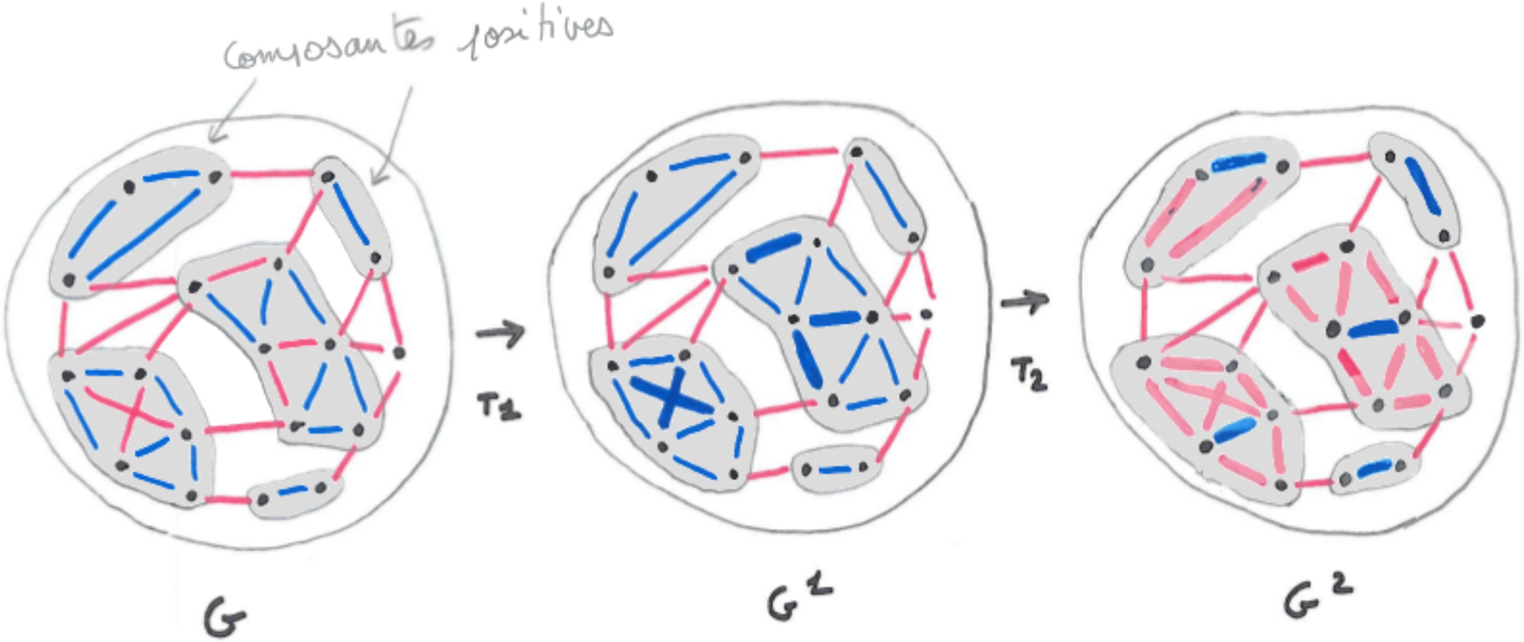
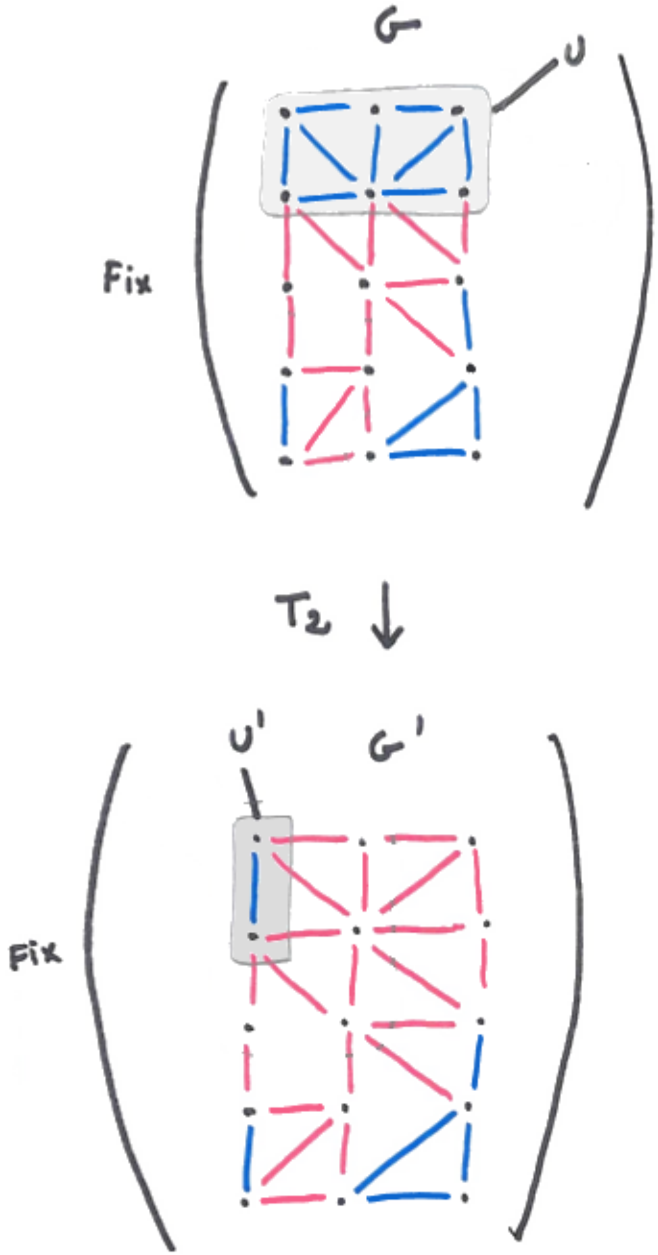


Schéma général

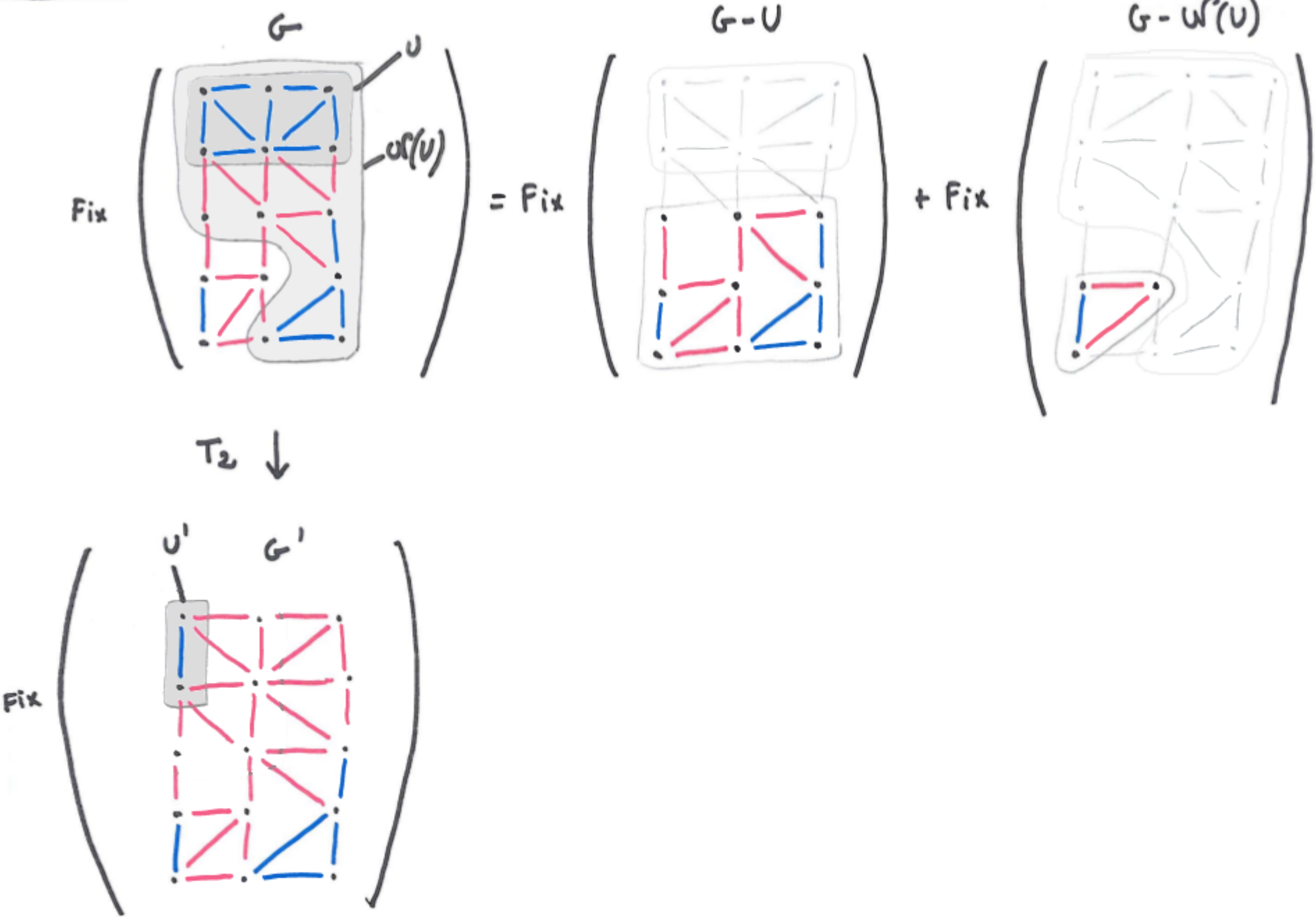


$$|\mathrm{Fix}(G)| \leq |\mathrm{Fix}(G^1)| \leq |\mathrm{Fix}(G^2)|$$

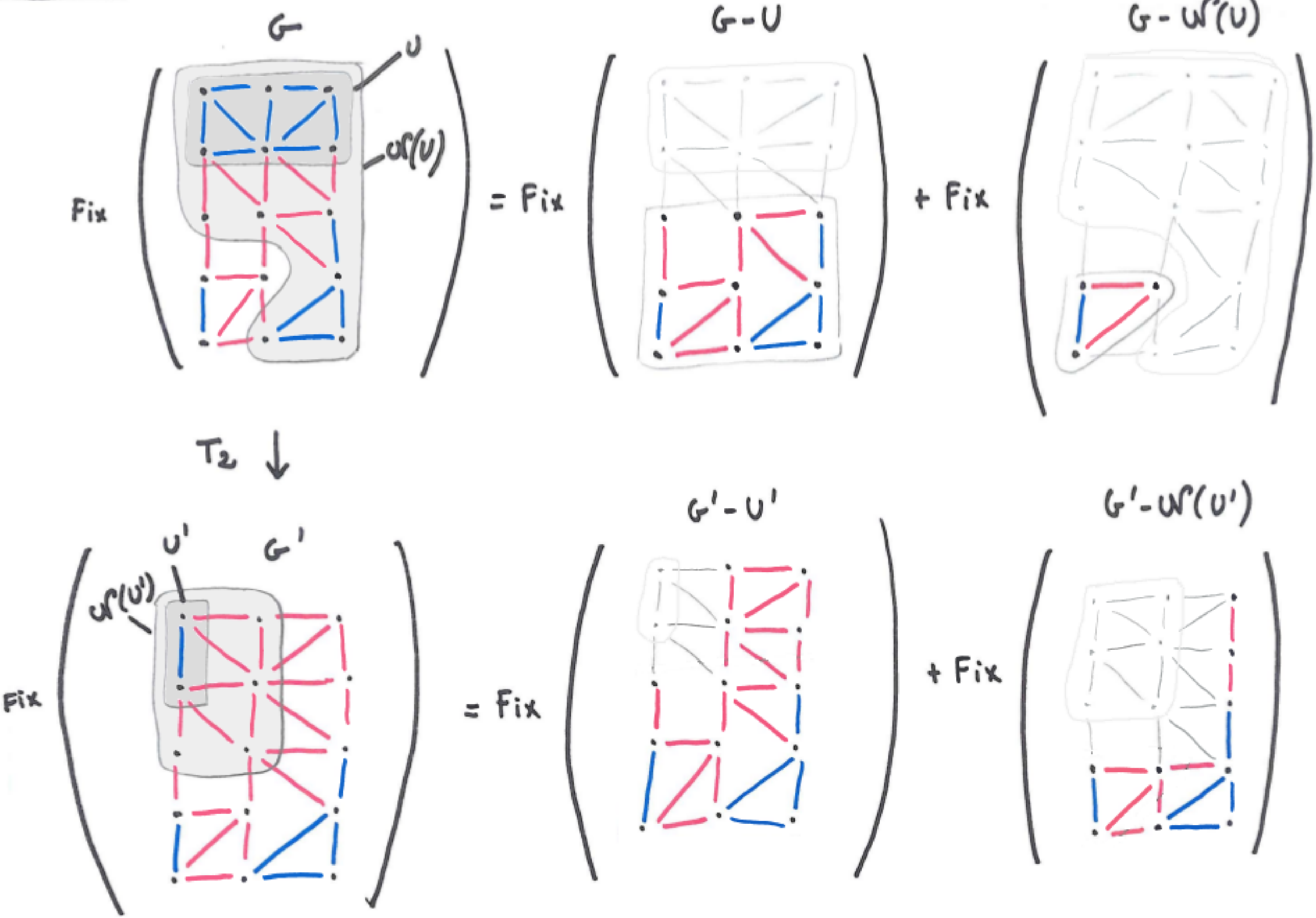
T_2 : Réduction des composantes positives



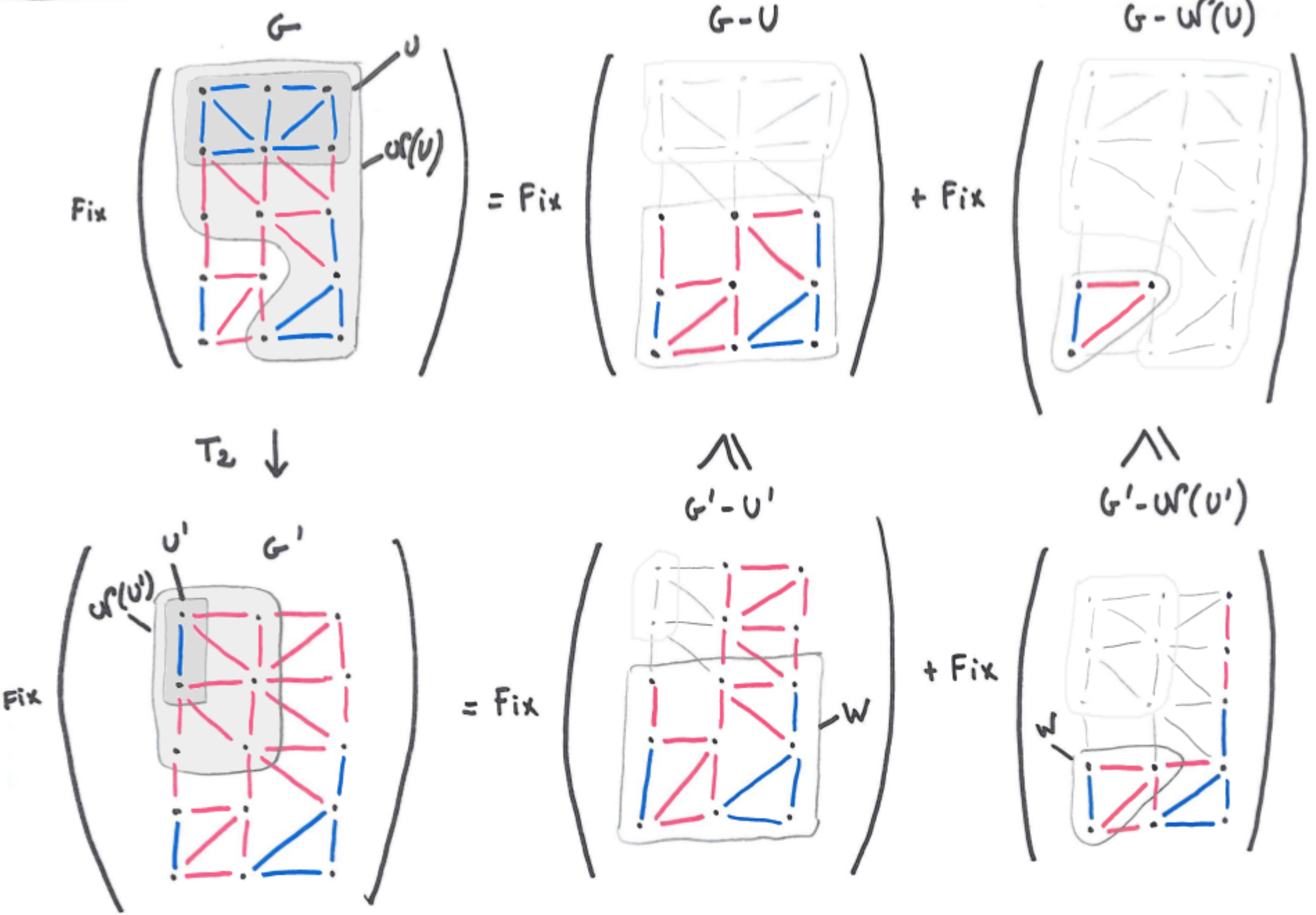
T_2 : Réduction des composantes positives



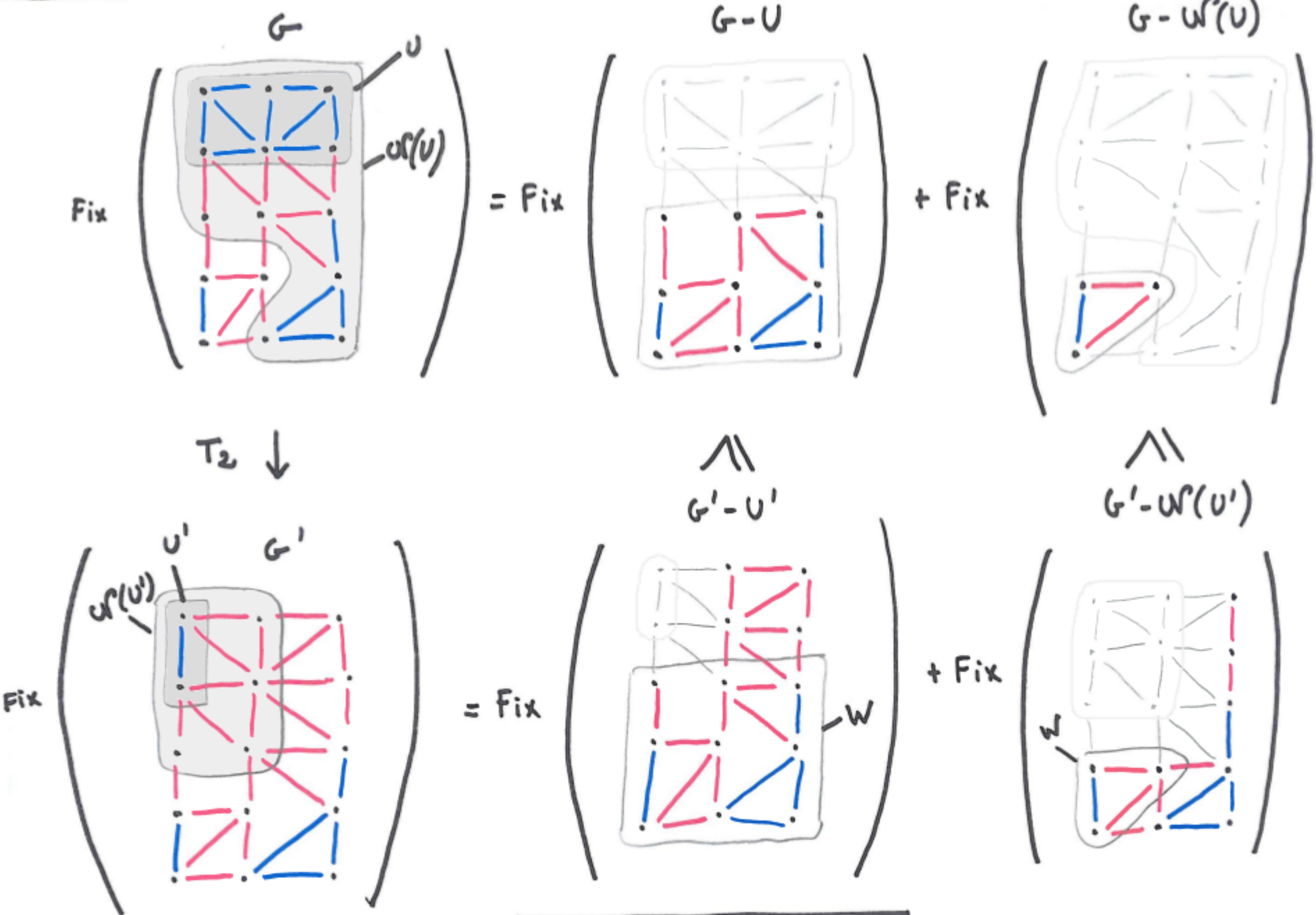
T_2 : Réduction des composantes positives



T_2 : Réduction des composantes positives

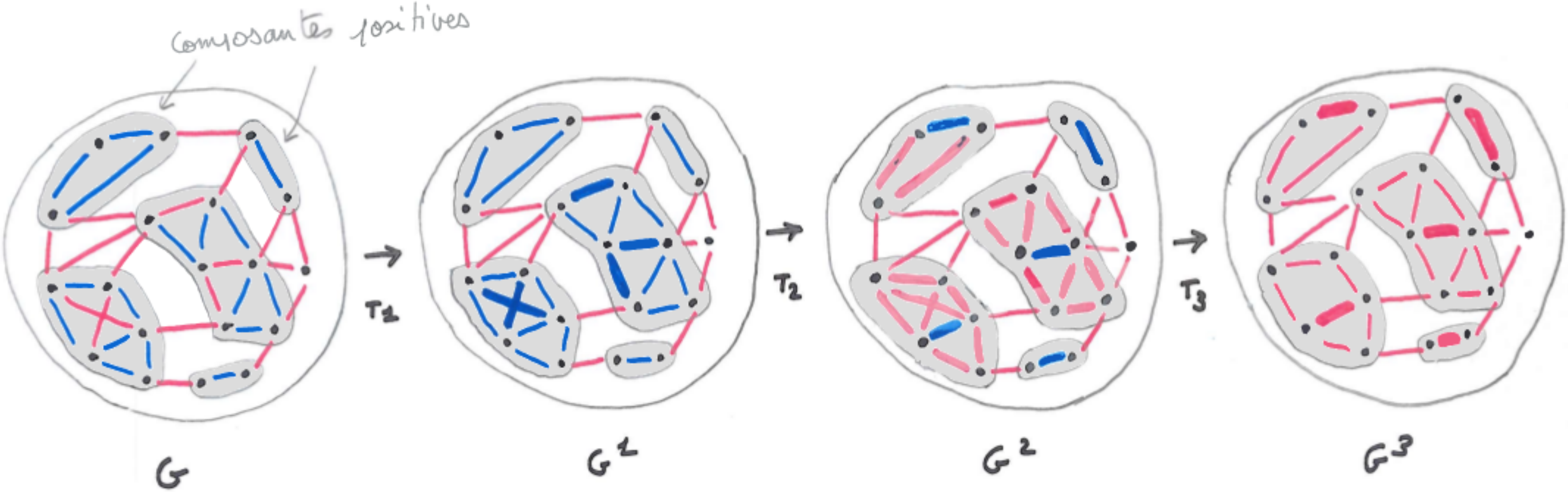


T_2 : Réduction des composantes positives



$$\boxed{\mathrm{Fix}(G) \leq \mathrm{Fix}(G')}$$

Schéma général

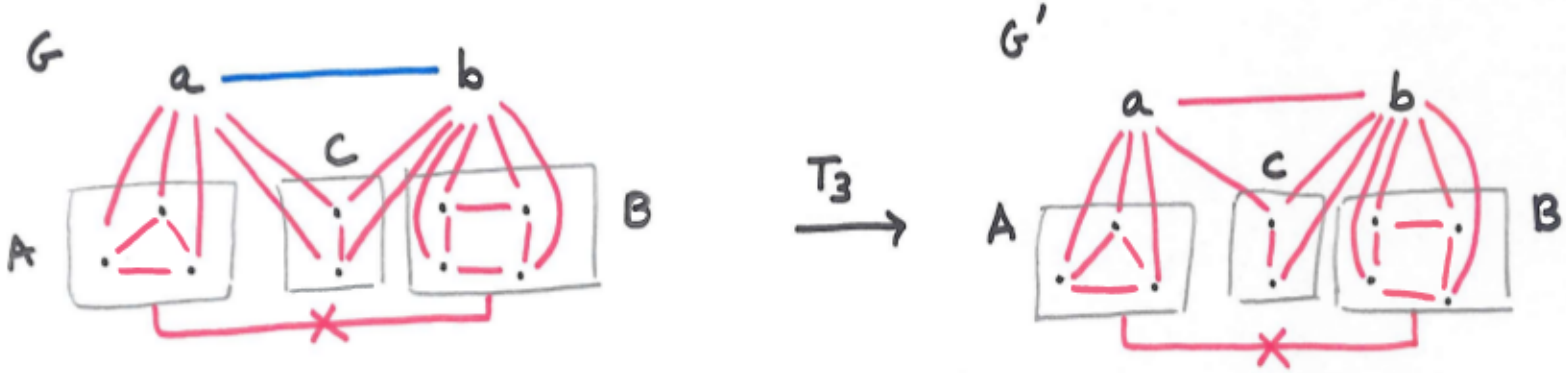


Hypothèse "sans carré induit"

$$|\mathrm{Fix}(G)| \leq |\mathrm{Fix}(G^1)| \leq |\mathrm{Fix}(G^2)| \leq |\mathrm{Fix}(G^3)| = |\mathrm{MIS}(G^3)|$$

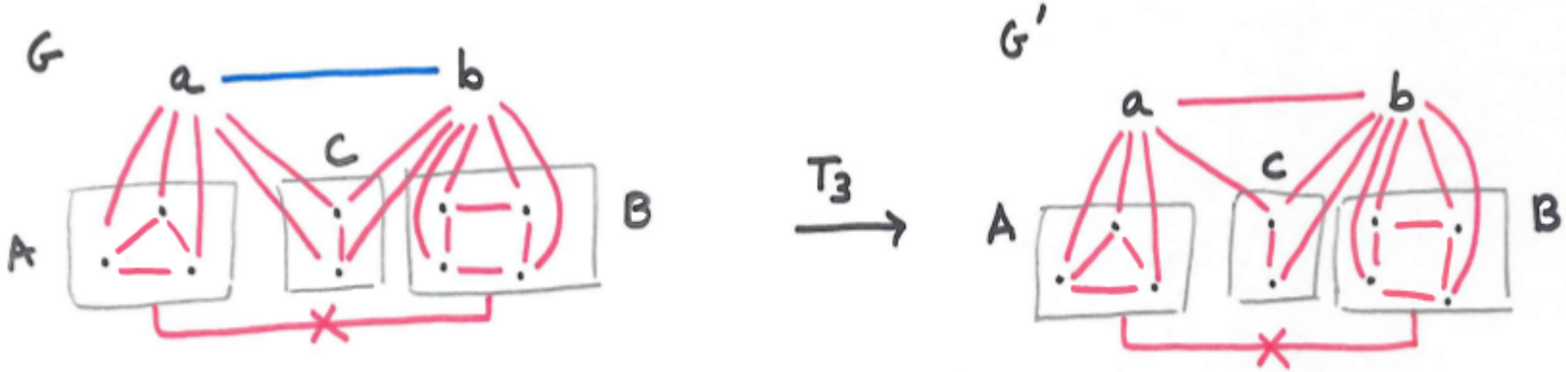
T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



T_3 : Suppression des arrêtes positives

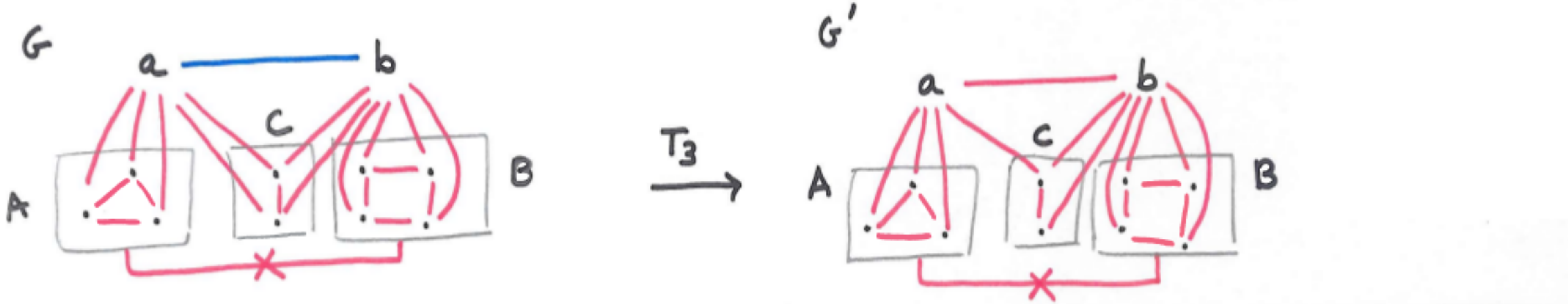
<u>Cas 1</u> : G a une unique arrête positive $a-b$ et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



$$\boxed{\begin{aligned} Fix(G) &= Fix(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \\ &= MIS(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \end{aligned}}$$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive $a-b$ et $N(ab) = V(G)$

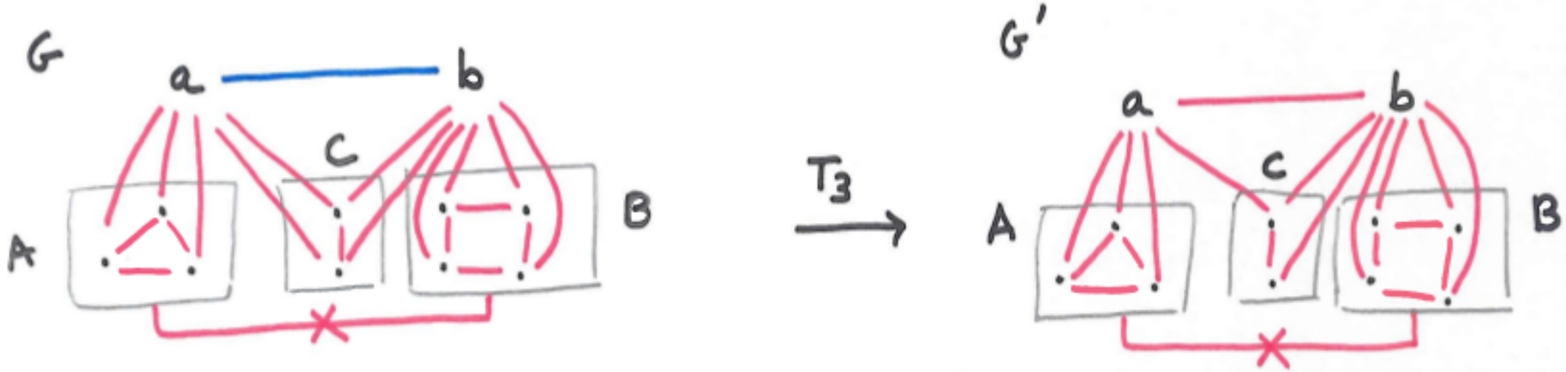


$$\text{Fix}(G) = \text{Fix}(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$
$$= \text{MIS}(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$

$$\text{MIS}(G - \{a,b\}) \subseteq \text{MIS}(G') = \text{Fix}(G')$$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive $a-b$ et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



$$\mathrm{Fix}(G) = \mathrm{Fix}(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$
$$= \mathrm{MIS}(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$

$$\mathrm{MIS}(G - \{a,b\}) \subseteq \mathrm{MIS}(G') = \mathrm{Fix}(G')$$

Soit $S \in \mathrm{MIS}(G - \{a,b\})$.

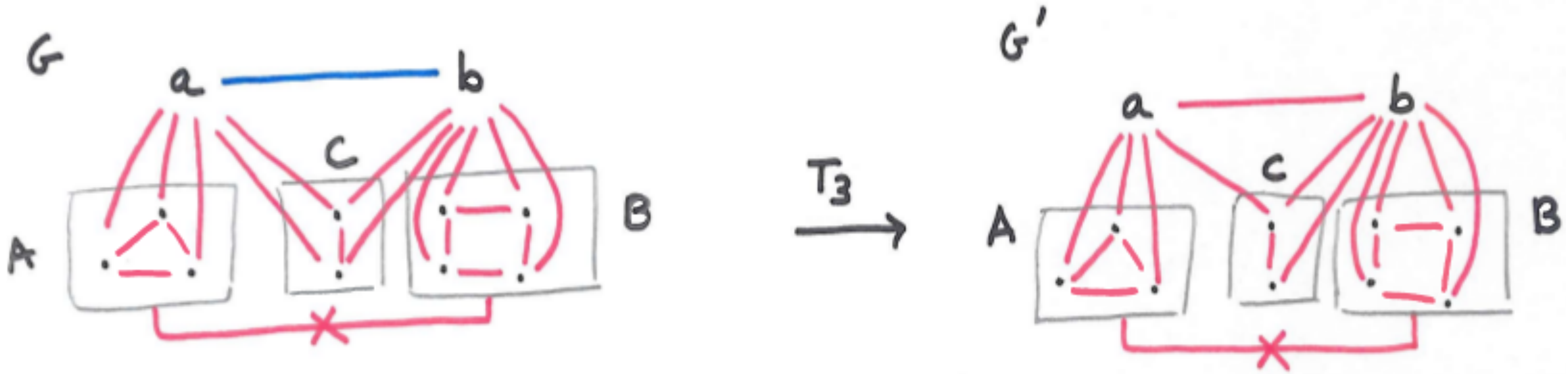
- Si $S \cap C \neq \emptyset$ alors $S \in \mathrm{MIS}(G')$
- Si $S \cap C = \emptyset$ alors $S \cap A \neq \emptyset$ <u>et</u> $S \cap B \neq \emptyset$

car il n'y a pas d'arrête entre A et B

donc $S \in \mathrm{MIS}(G')$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive $a-b$ et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



$$\boxed{\begin{aligned} Fix(G) &= Fix(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \\ &= MIS(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \end{aligned}}$$

$$\boxed{MIS(G - \{a,b\}) \subseteq MIS(G') = Fix(G')}$$

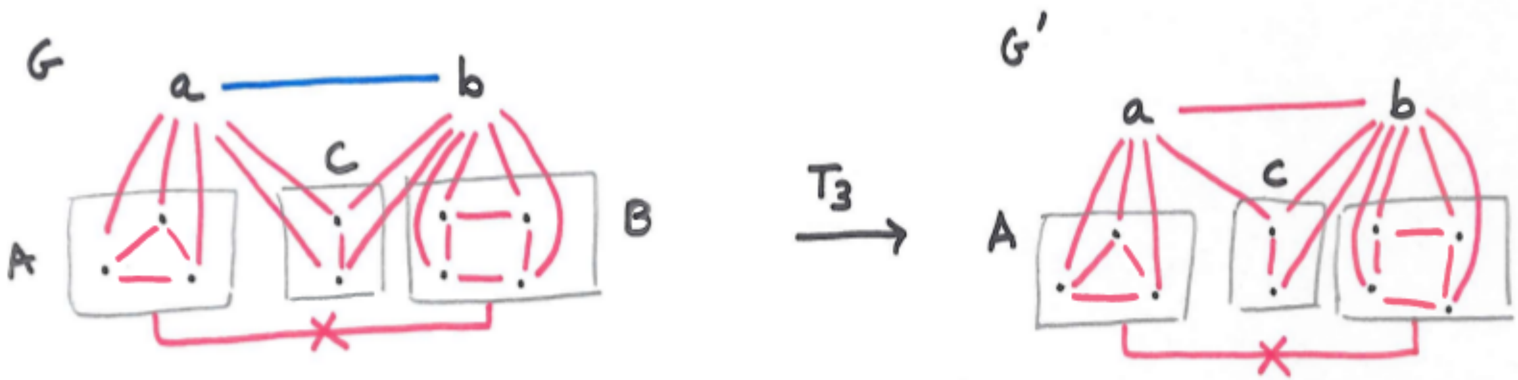
Soit $S \in MIS(G - \{a,b\})$.

- Si $S \cap C \neq \emptyset$ alors $S \in MIS(G')$
- Si $S \cap C = \emptyset$ alors $S \cap A \neq \emptyset$ et $S \cap B \neq \emptyset$ car il n'y a pas d'arrête entre A et B donc $S \in MIS(G')$

$$\boxed{\begin{aligned} \{a\} \cup MIS(G[B]) &\subseteq MIS(G') \\ \{b\} \cup MIS(G[A]) &\subseteq MIS(G') \end{aligned}}$$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive $a-b$ et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



$\xrightarrow{T_3}$

$$\boxed{\begin{aligned} Fix(G) &= Fix(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \\ &= MIS(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\} \end{aligned}}$$

$$\boxed{MIS(G - \{a,b\}) \subseteq MIS(G') = Fix(G')}$$

Soit $S \in MIS(G - \{a,b\})$.

- Si $S \cap C \neq \emptyset$ alors $S \in MIS(G')$
- Si $S \cap C = \emptyset$ alors $S \cap A \neq \emptyset$ <u>et</u> $S \cap B \neq \emptyset$

car il n'y a pas d'arrête entre A et B

donc $S \in MIS(G')$

$$\boxed{Fix(G) < Fix(G')}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \{a\} \cup MIS(G[B]) &\subseteq MIS(G') \\ \{b\} \cup MIS(G[A]) &\subseteq MIS(G') \end{aligned}}$$

T3 : Suppression des arêtes positives

__Cas 1__ : G a une unique arête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$

$$\mathrm{Fix}(G) = \mathrm{MIS}(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$

$$\mathrm{Fix}(G') = \{a\} \cup \{S \mid S \in \mathrm{MIS}(G - \{a,b\}),\ S \cap C \neq \emptyset\} \cup \{S \cup b \mid S \in \mathrm{MIS}(G-\{a,b\}),\ S \cap C = \emptyset\}$$

T3 : Suppression des arêtes positives

Cas 1 : G a une unique arête positive a-b et $N(ab) = V(G)$

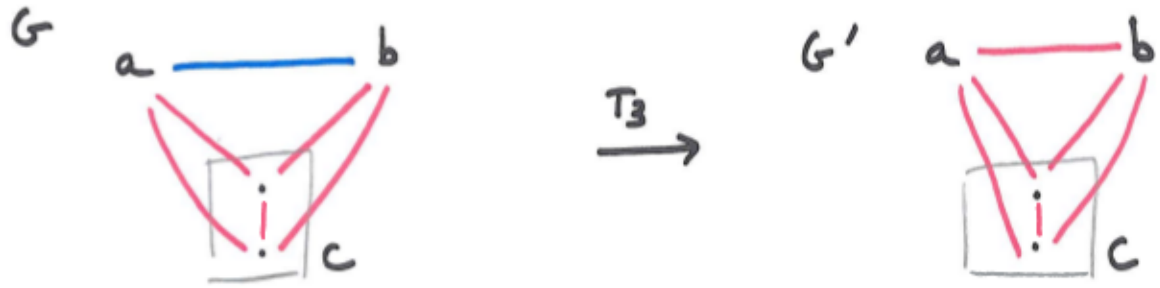
$$Fix(G) = MIS(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$$

$$Fix(G') = \{a\} \cup \{S \mid S \in MIS(G - \{a,b\}),\ S \cap C \neq \emptyset\} \cup \{S \cup b \mid S \in MIS(G-\{a,b\}),\ S \cap C = \emptyset\}$$

$$\boxed{Fix(G) = Fix(G')}$$

T3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive $a - b$ et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



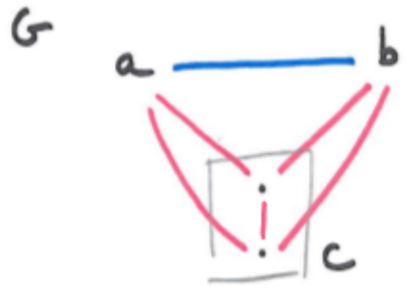
$$\boxed{\mathrm{Fix}(G) < \mathrm{Fix}(G')}$$

$\mathrm{Fix}(G) = \mathrm{MIS}(G - \{a, b\}) \cup \{a, b\}$

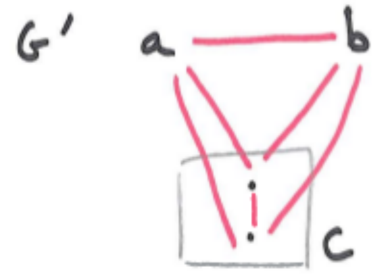
$\mathrm{Fix}(G') = \{a\} \cup \{b\} \cup \mathrm{MIS}(G - \{a, b\})$

T3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 1 : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) = V(G)$



$\xrightarrow{T_3}$



$\boxed{Fix(G) < Fix(G')}$

$Fix(G) = MIS(G - \{a,b\}) \cup \{a,b\}$

$Fix(G') = \{a\} \cup \{b\} \cup MIS(G - \{a,b\})$

$\xrightarrow{T_3}$

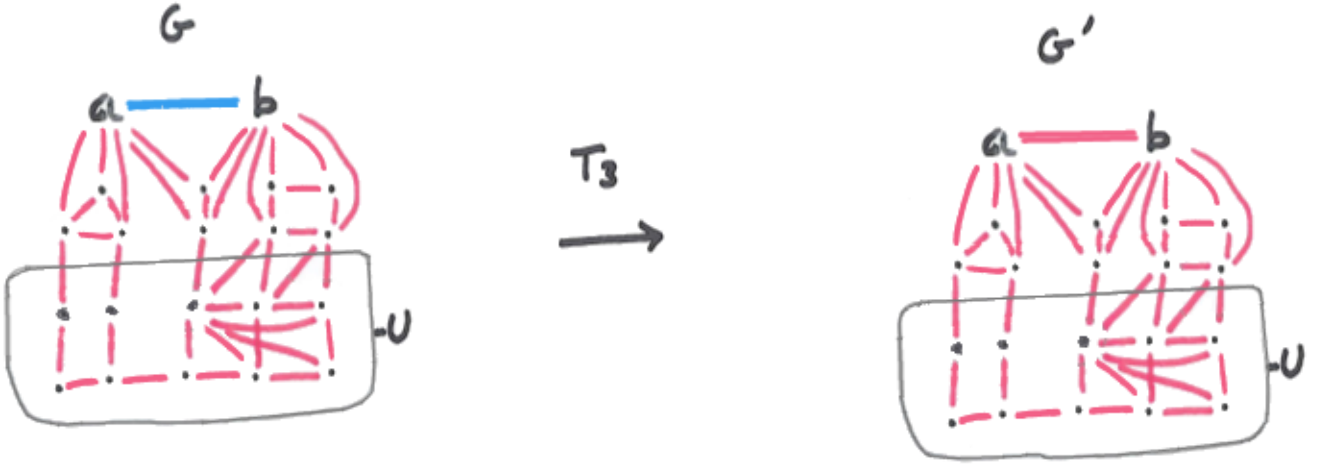
$\boxed{Fix(G) = Fix(G')}$

$Fix(G) = \{\emptyset, \{a,b\}\}$

$Fix(G') = \{\{a\}, \{b\}\}$

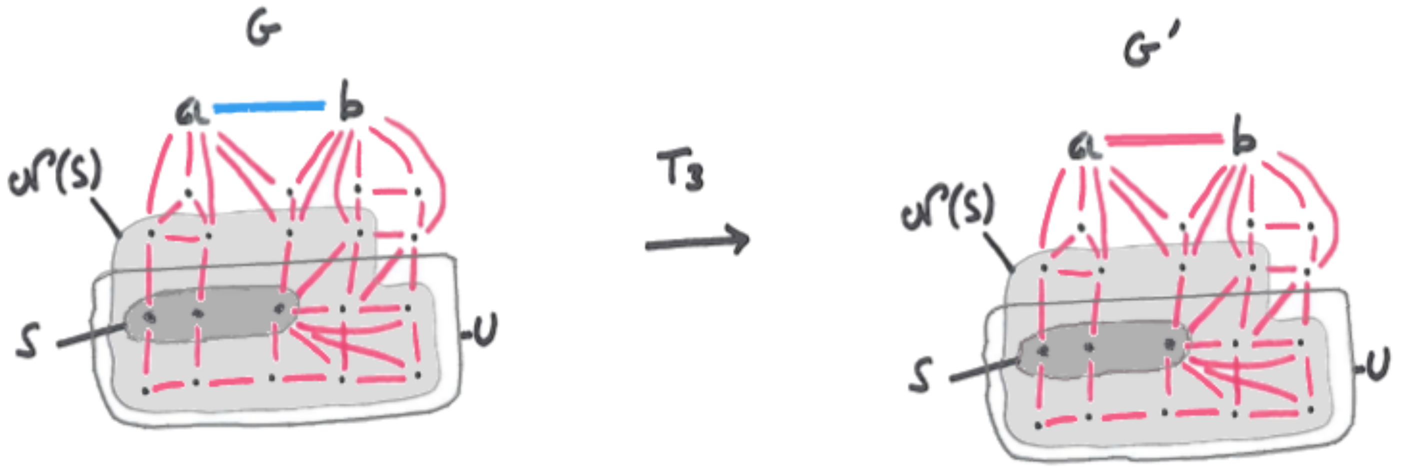
T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 2 : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) \subsetneq V(G)$



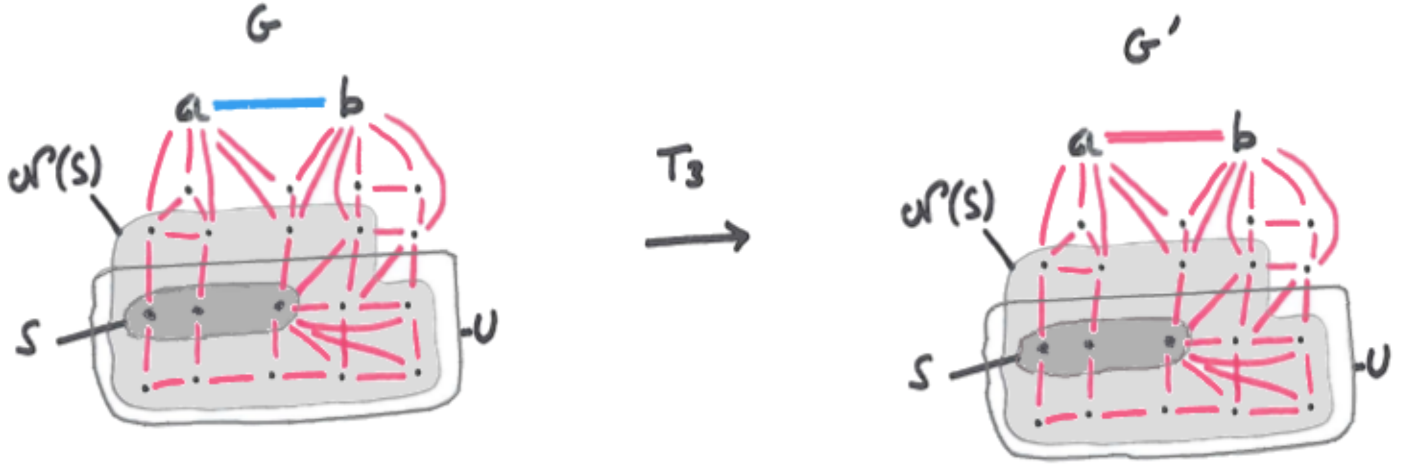
T_3 : Suppression des arrêtes positives

<u>Cas 2</u> : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) \subsetneq V(G)$



T_3 : Suppression des arrêtes positives

<u>Cas 2</u> : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) \subsetneq V(G)$



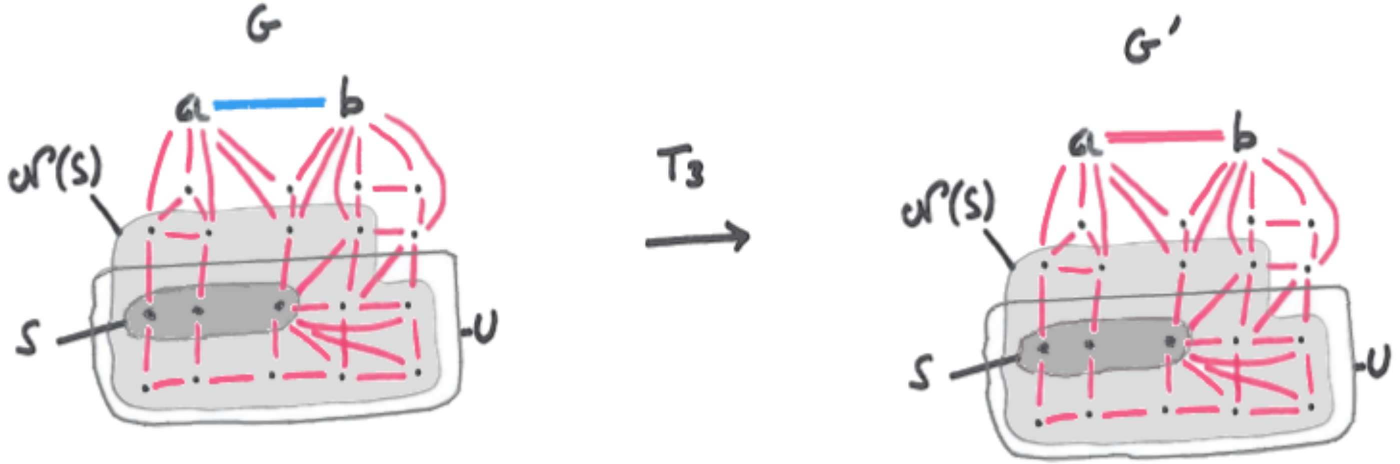
D'après le <u>cas 1</u>

$\forall\ S \in Fix(G[U])$ on a $\quad |Fix(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |Fix(G'-U-\mathcal{N}(S))|$

donc $\quad |Fix(G,U)| \leqslant |Fix(G',U)|$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 2 : G a une unique arrête positive a-b et $\mathcal{N}(ab) \subsetneq V(G)$



D'après le cas 1

$$\forall\, S \in \mathrm{Fix}(G[U]) \text{ on a } |\mathrm{Fix}(G - U - \mathcal{N}(S))| \leqslant |\mathrm{Fix}(G' - U - \mathcal{N}(S))|$$

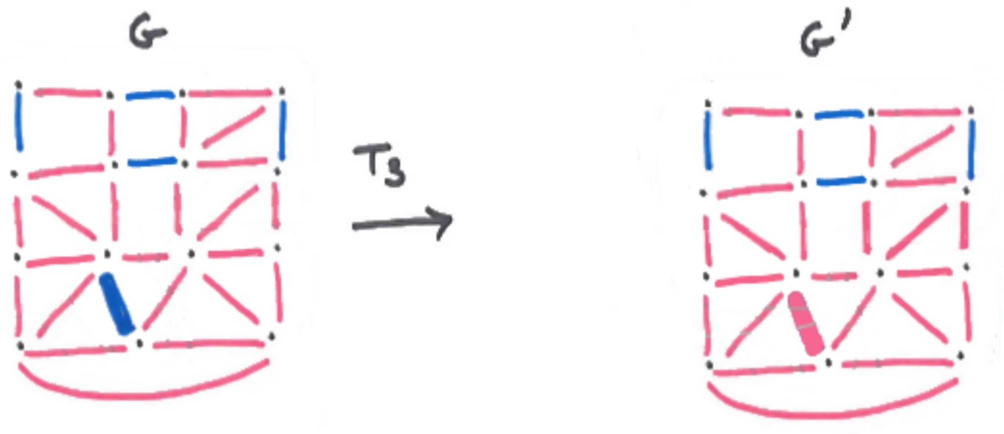
$$\text{donc} \quad |\mathrm{Fix}(G,U)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G',U)|$$

$$\text{Comme} \quad |\mathrm{Fix}(G)| - |\mathrm{Fix}(G,U)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G')| - |\mathrm{Fix}(G',U)|$$ (partie technique)

$$\text{on a} \quad \boxed{|\mathrm{Fix}(G)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G')|}$$

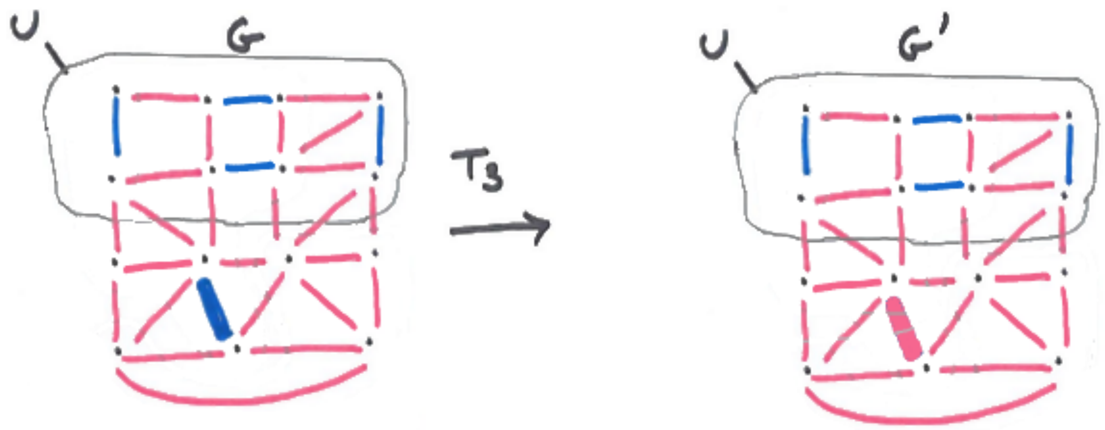
T3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 3 : autres cas



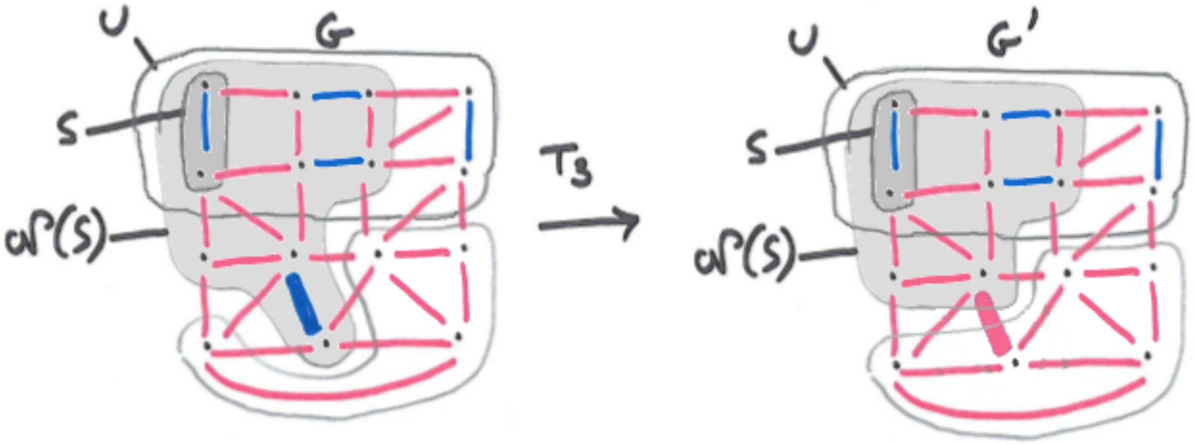
T3 : Suppression des arrêtes positives

Cas 3 : autres cas



T3 : Suppression des arêtes positives

<u>Cas 3</u> : autres cas



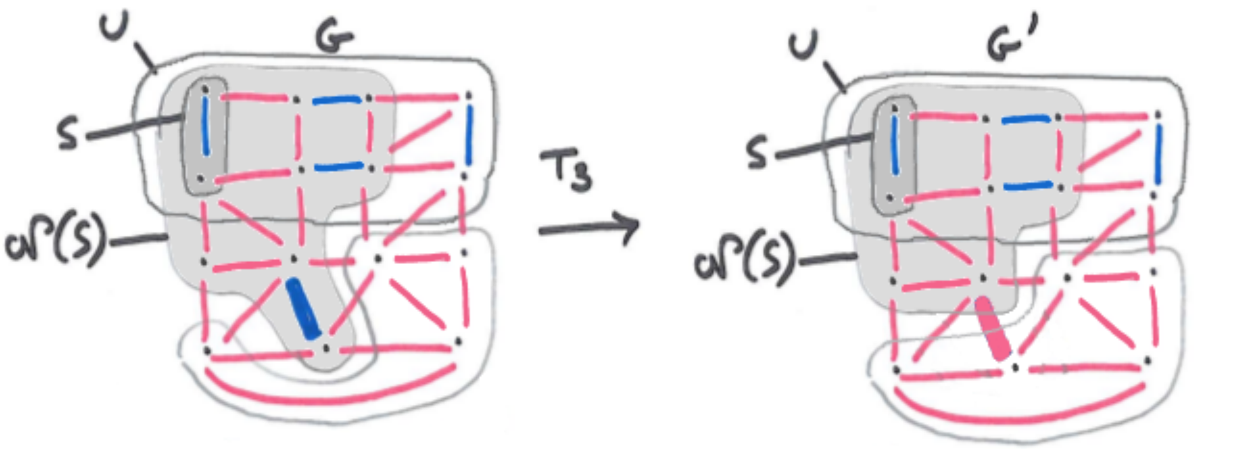
Lemme de décomposition

$\downarrow$

$$|\mathrm{Fix}(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |\mathrm{Fix}(G'-U-\mathcal{N}(S))|$$

T_3 : Suppression des arêtes positives

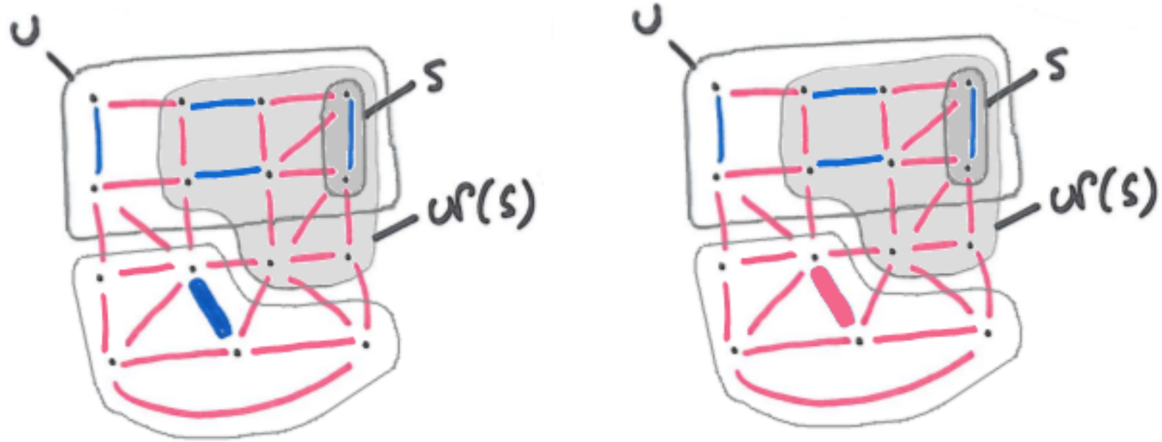
Cas 3 : autres cas



Lemme de décomposition

↓

$$|\mathrm{Fix}(G - U - \mathcal{N}(S))| \leq |\mathrm{Fix}(G' - U - \mathcal{N}(S))|$$



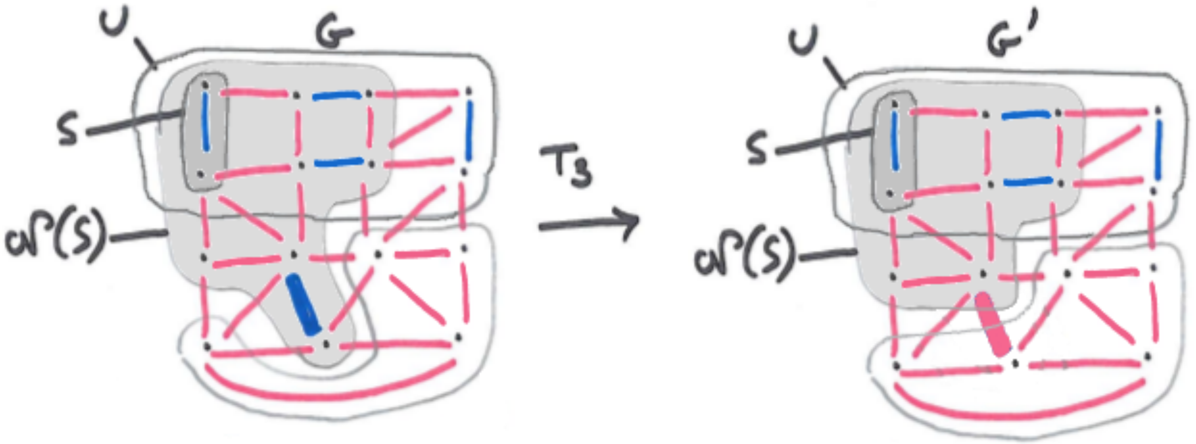
Cas 2

↓

$$|\mathrm{Fix}(G - U - \mathcal{N}(S))| \leq |\mathrm{Fix}(G' - U - \mathcal{N}(S))|$$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

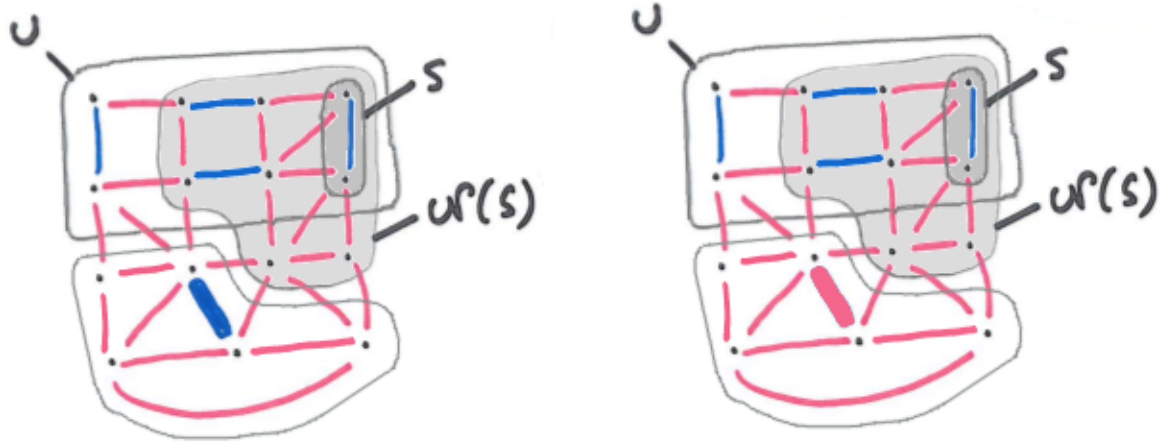
Cas 3 : autres cas



Lemme de décomposition

$\downarrow$

$$|Fix(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |Fix(G'-U-\mathcal{N}(S))|$$



Cas 2

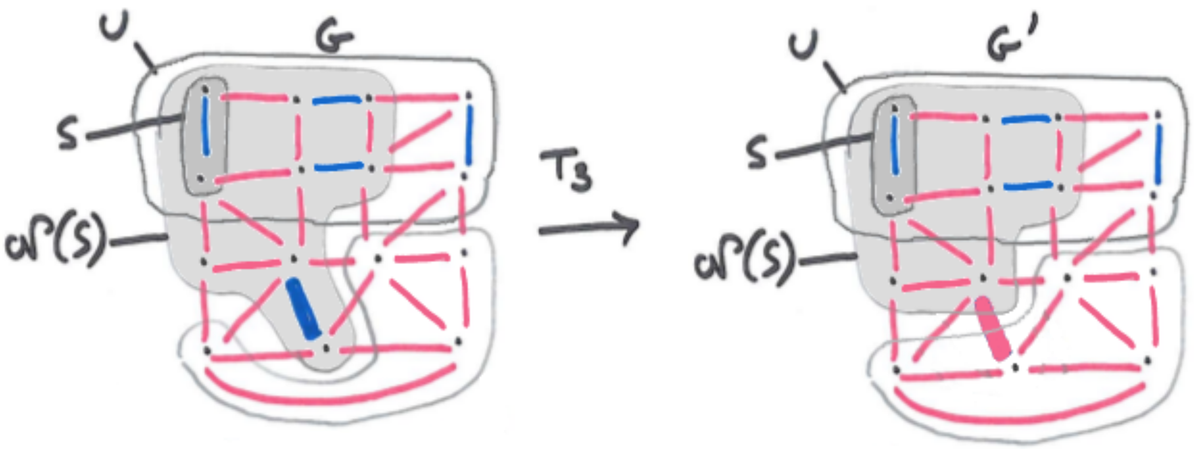
$\downarrow$

$$|Fix(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |Fix(G'-U-\mathcal{N}(S))|$$

donc $\boxed{|Fix(G,U)| \leqslant |Fix(G',U)|}$

T_3 : Suppression des arrêtes positives

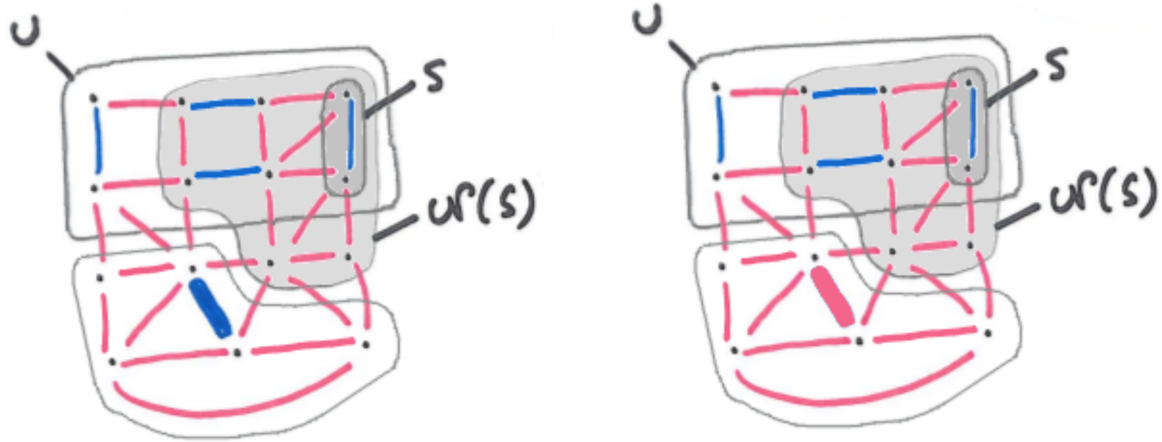
Cas 3 : autres cas



Lemme de décomposition

$$\downarrow$$

$$|Fix(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |Fix(G'-U-\mathcal{N}(S))|$$



Cas 2

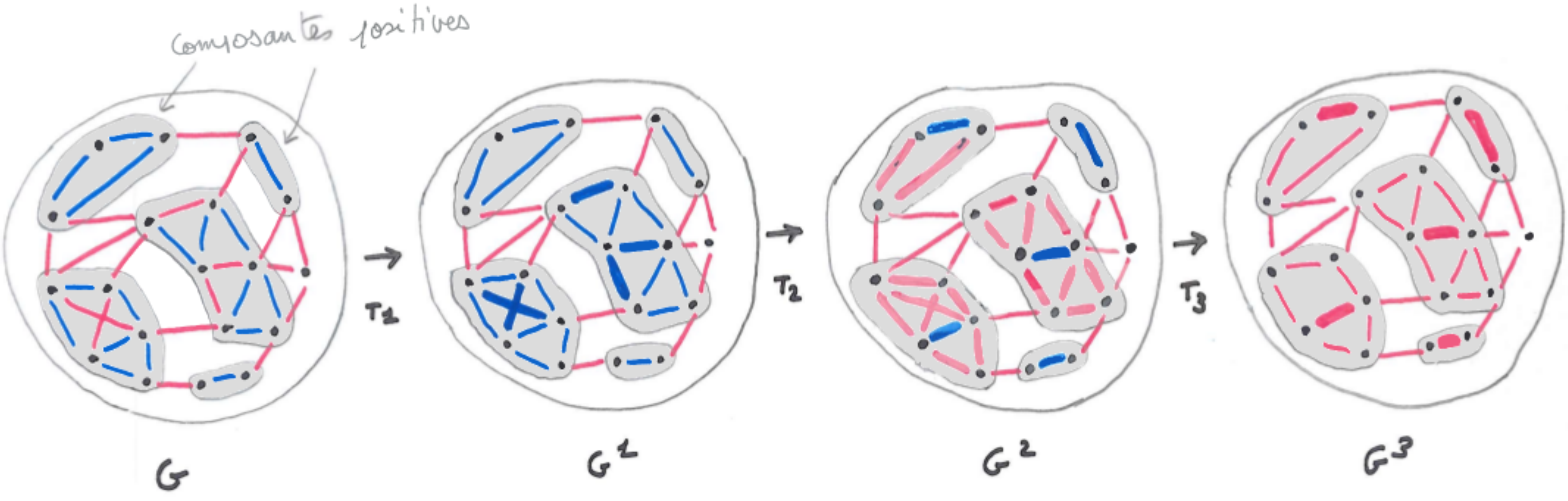
$$\downarrow$$

$$|Fix(G-U-\mathcal{N}(S))| \leqslant |Fix(G'-U-\mathcal{N}(S))|$$

donc $\boxed{|Fix(G)| = |Fix(G,U)| \leqslant |Fix(G',U)| = |Fix(G')|}$

U est une union de composantes positive

Schéma général



Hypothèse "sans carré induit"

$$|\mathrm{Fix}(G)| \leq |\mathrm{Fix}(G^1)| \leq |\mathrm{Fix}(G^2)| \leq |\mathrm{Fix}(G^3)| = |\mathrm{MIS}(G^3)|$$

4 Conclusion

Théorème 1 : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |Fix(G,\lambda)| \leq |Fix(G,-)| = |MIS(G)|$$

Théorème 1 : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |\mathrm{Fix}(G,\lambda)| \leqslant |\mathrm{Fix}(G,-)| = |\mathrm{MIS}(G)|$$

Théorème 2 : Si G est un graphe dirigé dans lequel chaque sommet porte une boucle, alors la répartition suivante est optimale :

$$\lambda(vv) = \oplus \quad \forall v \in V(G)$$

$$\lambda(uv) = \ominus \quad \forall uv \in E(G),\ u \neq v$$

Théorème 1 : Si G est un graphe simple sans carré induit alors

$$\forall \lambda : E(G) \to \{+,-\} \qquad |Fix(G,\lambda)| \leq |Fix(G,-)| = |MIS(G)|$$

Théorème 2 : Si G est un graphe dirigé dans lequel chaque sommet porte une boucle, alors la répartition suivante est optimale :

$$\lambda(vv) = \oplus \quad \forall v \in V(G)$$
$$\lambda(uv) = \ominus \quad \forall uv \in E(G),\ u \neq v$$

Conjecture : Pour tout graphe dirigé, il existe toujours une répartition optimale telle que chaque cycle sans corde est positif