Théorie : la sémantique

Donner un sens aux symboles de la théorie

Soit la formule :

$$\forall x \; \mathrm{p}(x, x)$$

quelle est sa signification ?

Pour donner du sens à cette formule il faut:

- fixer un ***domaine*** dans lequel la ***variable x*** prend ses valeurs
- donner un ***sens au symbole de prédicat p*** comme une relation entre les éléments de ce domaine

$\forall x\ p(x, x)$

1er sens :
domaine : les entiers
relation p : x est un diviseur de y

$\forall x\ p(x, x)$ a la signification : pour tout entier x, x est un diviseur de x

2ème sens :
domaine : les humains
relation p : x a peur de y

$\forall x\ p(x, x)$ a la signification : pour tout humain x a peur de lui-même

Interprétation

sémantique $\longleftarrow$ **syntaxe**

Domaine **D** $\xleftarrow{\textit{affectation}}$ Variables **V**

Fonctions $\mathbf{D^n \rightarrow D}$ $\longleftarrow$ Symbole fonction **F**

Relations $\mathbf{D^n \rightarrow}$ **{vrai, faux}** $\xleftarrow{\textit{réalisation}}$ Symbole prédicat **P**

Interprétation

Soit **L(F, R, V)** un langage

F: symboles de fonction, **R:** symboles de prédicats,

V: symboles de variables

Une **interprétation I** de L(F, R, V) est constituée :

- d'un ensemble ***non vide*** : **domaine D_I** ***valeurs pour V (et F_I)***
- de **fonctions F_I** (de D^n_I dans D_I) ***réalisation de F***
- de **relations R_I** (de D^n dans <vrai,faux>) ***réalisation de R***

Exemple 1:

F = {a (0-aire), g (1-aire)}

R = {p (2-aire) }

Interprétation I1

$D_{I1} = N$ (les entiers naturels)

$F_{I1} = \{ \rightarrow 0, x \rightarrow x+1\}$ (*a* est 0, *g* la fonction successeur)

$R_{I1} = \{(x, y) \rightarrow x < y\}$ (*p* est la relation <)

Interprétation I2

$D_{I2} = Q$ (les rationnels)

$F_{I2} = \{ \rightarrow 1, \mathrm{x} \rightarrow 1 / x\}$ (*a* est 1, *g* la fonction inverse)

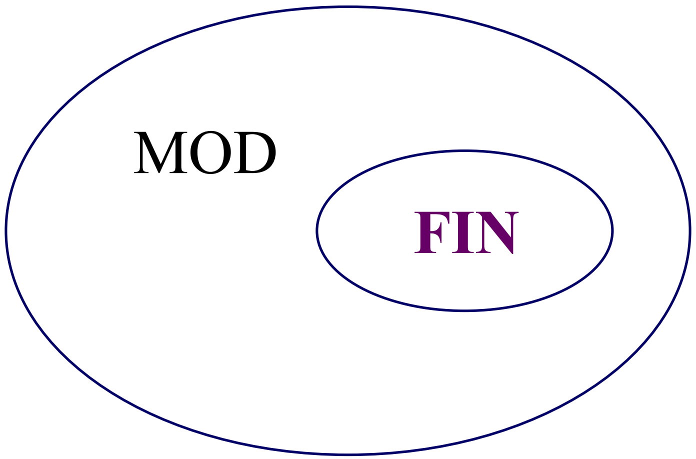
$R_{I2} = \{(x, y) \rightarrow x < y\}$ (*p* est la relation <)

Types d'interprétation

- **du 1er ordre** MOD

- **finiment engendrées** FIN

  Si tout élément de D_I est dénoté par un terme clos **(i.e. terme sans variable)** du langage L(F,R,V)



Exemple 1 (suite)

F = {a (0-aire), g (1-aire)}

R = {p (2-aire) }

Interprétation I1

$D_{I1} = N$

$F_{I1} = \{a \to 0, g(x) \to x + 1 \}$

$R_{I1} = \{p(x, y) \to x < y\}$

Tout élément de N est dénoté par g(g(g(….(g(a))))))

où *g* apparaît n fois quand *a* est interprété par « 0 » et g par « $x \to x + 1$ »

I1 est une interprétation de FIN

Types d'interprétation (exemples)

$F = \{a \text{ (0-aire)}, g \text{ (1-aire)}\}$

$R = \{p \text{ (2-aire)} \}$

Interprétation I2

$D_{I2} = Q$

$F_{I2} = \{a \rightarrow 1, g(x) \rightarrow 1 / x\}$

$R_{I2} = \{p(x, y) \rightarrow x < y\}$

Les termes clos g(g(g(….(g(a)))))) dénotent uniquement l'entier 1 !!!!

I2 est une interprétation de MOD

Exercice

F = {a (0-aire), g (1-aire)}

R = {p (2-aire) }

Interprétation I3

$D_{I3} = N$

$F_{I3} = \{ a \rightarrow 0, g(x) \rightarrow x + 2\}$

$R_{I3} = \{p(x, y) \rightarrow x < y\}$

I3 est une interprétation de ?

Validité

Soient : **L(F,R,V)** un langage
$\mathbf{I = < F_I, R_I, D_I >}$ une interprétation
ϕ une formule du langage

Problème :

Que peut-on dire de ϕ quand on passe au monde sémantique correspondant à l'interprétation I ?

Etapes :

- ϕ **est vraie** pour ***une certaine*** **interprétation et** ***une certaine*** **valuation**
- ϕ **est vraie** pour ***une certaine*** **interprétation et pour** ***toute*** **valuation**
- ϕ **est vraie** pour ***toute*** **interprétation**

Validité (suite)

- Une **fonction d'affectation σ** associe à chaque variable de V un élément de D_I
  (on note σ x la valeur associée à x)

- Une **valuation val** d'un terme *t* dans I par rapport à σ est définie récursivement par :

  val(t, σ) = σ x si t $\equiv$ x et x $\in$ V

  val(t, σ) = f_I (val(t_1, σ), … , val(t_n, σ)) si t $\equiv$ f (t_1, … , t_n)

Exemple :

F = { g (1-aire), f (2-aire), $\perp$ (0-aire)}

Soit le terme t $\equiv$ f (g(g(x)), f($\perp$, y)).

Avec l'interprétation I1 : $D_{I1} = N$, $F_{I1} = \{ g(x) \rightarrow x + 1, f(x,y) \rightarrow x + y, \perp \rightarrow 0\}$ et la fonction d'affectation $\sigma : x \rightarrow 3$ et $y \rightarrow 8$, en appliquant la définition récursive de la valuation on obtient :

$$\begin{aligned} val\ (t\ ,\ \sigma) &= ((\sigma\ x\ + 1) + 1) + (0 + \sigma\ y\ ) \\ &= ((3 + 1) + 1) + (0 + 8) \\ &= 13 \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathbf{I} \models_{\sigma} \phi}$$

Φ est satisfiable dans I

- pour $\phi \equiv r\,(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ssi $(\,val(t_1, \sigma\,), \ldots , val(t_n, \sigma\,)\,) \in r_I$
  i.e., $r_I(val(t_1, \sigma\,), \ldots , val(t_n, \sigma\,)) = vrai$

- **pour $\phi \equiv t_1 = t_2$ ssi $val(t_1, \sigma\,) = val(t_2, \sigma\,)$**

Exemple : $F = \emptyset$, $R = \{r \text{ (2-aire)}\}$

interprétation I : domaine D_I: {vert, noir, bleu, jaune}

relation r_I : {(vert,vert),(noir,bleu)}

formule : $\phi \equiv r(x,y)$

valuation σ_1 : $x \rightarrow$ vert, $y \rightarrow$ vert

valuation σ_2 : $x \rightarrow$ vert, $y \rightarrow$ noir

$(val(x, \sigma_1), val(y, \sigma_1)) = (\text{vert}, \text{vert}) \in r_I$ donc $I \models_{\sigma 1} \phi$

$(val(x, \sigma_2), val(y, \sigma_2)) = (\text{vert}, \text{noir}) \notin r_I$ donc $I \not\models_{\sigma 2} \phi$

Donc $\phi \equiv r(x,y)$ est **satisfiable** pour la valuation σ_1

Exemple

$F = \{ g\ (1\text{-aire}), f\ (2\text{-aire}), \perp\ (0\text{-aire})\}$

$I1 : D_{I1} = N, F_{I1} = \{ g(x) \rightarrow x + 1, f(x,y) \rightarrow x + y, \perp \rightarrow 0\}$

$t1 = f(g(g(x)), y)$ $\qquad\qquad$ $t2 = f(g(x), g(y))$

$\sigma : x \rightarrow 3, y \rightarrow 2$

$$I \models_{\sigma} t1 = t2$$

Car $\quad val(t_1, \sigma) = ((3+1)+1) + 2 = 7$

et $\quad val(t_2, \sigma) = (3+1)+ (2+1) = 7$

$\boxed{I \models_\sigma \phi}$ (suite)

σ satisfait ϕ dans I (ou ϕ est satisfiable dans I)

- pour $\phi \equiv \neg \varphi$ ssi $I \not\models_\sigma \varphi$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \vee \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1$ ou $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \wedge \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1$ et $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ ssi $I \not\models_\sigma \phi_1$ ou $I \models_\sigma \phi_2$
- pour $\phi \equiv \phi_1 \Leftrightarrow \phi_2$ ssi $I \models_\sigma \phi_1 \Rightarrow \phi_2$ et $I \models_\sigma \phi_2 \Rightarrow \phi_1$

Exemple : $F = \emptyset$, $R = \{r \text{ (2-aire)}\}$

formules : $\phi_1 \equiv r(x,y_1)$, $\phi_2 \equiv r(x,y)$

interprétation I : domaine D_I: {vert, noir, bleu, jaune}

relation r_I : {(vert,vert),(noir,bleu)}

valuation σ : $x \rightarrow$ vert, $y \rightarrow$ vert, $y_1 \rightarrow$ jaune

$$I \not\models_{\sigma} \neg \phi_1$$

$$I \not\models_{\sigma} \phi_1 \vee \phi_2$$

Exercice

interprétation J : domaine D_J: N

relation r_J : <

valuation σ : $x \rightarrow 8$, $y \rightarrow 2$, $y_1 \rightarrow 5$

$$J \quad ? \quad \neg \phi_1$$

$$J \quad ? \quad \phi_1 \vee \phi_2$$

$\boxed{I \models_\sigma \phi}$ (suite)

Formules quantifiées

$\boldsymbol{\phi \equiv \forall x\ \phi_1}$: **Si l'une** des formules obtenues en substituant un élément de D à toutes les occurrences libres de x dans $\sigma\ \phi_1$ **est fausse** dans I**, alors ϕ est fausse**, sinon ϕ est satisfiable dans I pour la valuation σ

$\boldsymbol{\phi \equiv \exists\ x\ \phi_1}$: **Si l'une** des formules obtenues en substituant un élément de D à toutes les occurrences libres de x dans $\sigma\ \phi_1$ **est satisfiable** dans I, **alors ϕ est satisfiable** dans I pour la valuation σ, sinon ϕ est fausse dans I

Exemple : $F = \{f\ (1\text{-aire})\},\ R = \{eq\ (2\text{-aire})\}$

Interprétation I :

domaine : $\{0, 1, 2, 3\}$

relation $eq_I : (x,y) \rightarrow x = y$

fonction $f_I :\ x \rightarrow (x+1) \bmod 4$

formule : $\phi \equiv eq(x,f(y))$

valuation $\sigma :\ y \rightarrow 2$

$I \models_\sigma \exists x\, \phi$ car $x = 3$ satisfait $\sigma\ \phi$ dans I

$I \not\models_\sigma \forall x\, \phi$ car $x = 2$ ne satisfait pas $\sigma\ \phi$ dans I

$\boxed{I \models_{\sigma} \phi}$ ϕ est **satisfiable** dans I pour σ

$\boxed{I \models \phi}$ ϕ est **valide** dans I ssi $I \models_{\sigma} \phi$ pour tout σ

On dit alors que I est un *modèle* de ϕ

$\boxed{I \not\models \phi}$ ϕ est **fausse** dans I ssi $I \not\models_{\sigma} \phi$ pour tout σ

On dit aussi que ϕ est insatisfiable dans I

$\boxed{\models \phi}$ ϕ est **un théorème** (ou **universellement valide**) ssi $I \models \phi$ pour tout I

$\boxed{\tau \models \phi}$ ϕ est **conséquence logique** de la théorie τ ssi

$\models \tau \Rightarrow \phi$

Exemples :

$\phi \equiv \forall x, x + 1 > x$

Interprétation I: domaine : les entiers, + addition, > supérieur

$$I \models \phi$$

$\phi_1 \equiv \forall x, x + 1 < x$ $\phi_2 \equiv \exists x, x + 1 < x$

Interprétation I : les entiers, + addition, < inférieur

$$I \not\models \phi_1 \qquad I \not\models \phi_2$$

$\phi \equiv \forall x, p(x) \vee \neg p(x)$

$$\models \phi$$