Examen de logique

Tous documents autorisés, durée 2 heures. Prenez soin de justifier vos résultats

Notations (rappel):

- x, y, z : variables
- a, b, c, d : constantes
- p, q, r, s : symboles de prédicat
- f, g : symboles de function
- P, Q, R, S : propositions
- A, τ, Φ : formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Satisfiabilité et validité (6 points)

1. Pour chacune des formules ci-dessous, utilisez la méthode de votre choix pour montrer qu'elle est universellement valide, uniquement valide dans certaines interprétations, ou fausse.

   - $\Phi_1 : \neg((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P))$
   - $\Phi_2 : Q \vee P$
   - $\Phi_3 : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$

$\Phi_1 \equiv \neg(\neg P \vee Q \vee P \vee \neg Q) \equiv Faux$
Φ_2 : valide dans $I_1 = \{Q =$ Vrai et $P =$ Faux $\}$; Faux dans $I_2 = \{Q =$ Faux et $P =$ Faux $\}$.
$\Phi_3 : \neg(\neg P \vee Q) \ \vee \ (\neg P \vee Q) =$ tautolgie, donc universellement valide.

---

2. Donnez une interprétation où $\Phi_4 = \ \forall x \ \forall y \ \forall z \ (p(f(x, y), z) \Rightarrow p(y, g(z, x))$ est valide et une interprétation où Φ_4 est fausse.

$I_{Valide} = \{\mathcal{D} : \mathbb{Z}, \ f$: addition sur les entiers relatifs, g : soustraction sur les entiers relatifs, p : relation d'ordre stricte $>\}$

$I_{Fausse} = \{\mathcal{D} : \mathbb{N}, \ f$: addition sur les entiers, g : addition sur les entiers, p : relation d'ordre stricte $>\}$

---

3. Que peut on dire en terme de validité pour la formule $\Phi_5 = \ \forall x \ \exists y \ (p(f(x), y) \Rightarrow q(y, z))$

Φ_5 n'est pas universellement valide: Φ_5 est faux dans l'interprétation $I_{5a} = \{D = \{0\}, \ \overline{p} : =, \ \overline{f} : \ x \to x$ (fonction idendité), $\overline{q} : >\}$
Φ_5 est valide dans une interprétation où la valeur de vérité de Φ_5 ne dépend pas de la variable libre z; par exemple dans l'interprétation $I_{5b} = \{D = \{0\}, \ \overline{p} : >, \ \overline{f} : \ x \to x$ (fonction idendité), $\overline{q} : =\}$
Φ_5 est satisfiable dans une interprétation où la valeur de vérité de Φ_5 dépend pas de la variable libre z; par exemple dans l'interprétation $I_{5b} = \{D = \{0, 1\}, \overline{q} : >, \overline{f} : \ x \to x$ (fonction idendité), $\overline{p} : =\}$:

- Φ_5 est faux pour l'affectation $z \leftarrow 1$
- Φ_5 est vrai pour l'affectation $z \leftarrow 0$

---

2 Formalisation (6 points)

1. Formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\vee$ et $\wedge$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *c(x)* qui retourne la couleur de x, la constante mm, et les symboles de prédicat suivants:

   · *sb(x)* : x est une souris blanche;

   · *com(x)*: x est commestible;

   · *mp(x)*: x mange des pommes;

   · *dv(x)*: x a des dents vertes.

   Phrases:

   (a) Toutes les souris blanches ne sont pas comestibles.

   (b) Toutes les souris blanches qui ont des dents vertes mangent des pommes.

   (c) Magic Mouse est une souris blanche qui ne mange pas de pommes.

   (d) Certaines souris blanches n'ont pas de dents vertes.

   ---

   a: $\neg(\forall x\ (sb(x) \Rightarrow com(x))) \ \equiv\ \exists x\ (sb(x) \wedge \neg com(x))$
   b: $\forall x\ ((sb(x)\ \wedge\ dv(x)) \Rightarrow mp(x))$
   c: $sb(mm)\ \wedge\ \neg mp(mm)$
   d: $\exists x\ (sb(x)\ \wedge\ \neg dv(x))$

   ---

2. Une solution d'un problème de coloriage de graphe est une affectation de couleurs à tous les sommets, tel que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Si les couleurs sont définies par l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\vee$ et $\wedge$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *c(x)* qui retourne la couleur de x, et les symboles de prédicat suivants:

   · *s(x,G)* : x est un sommet du graphe G;

   · *adj(x,y,G)* x et y sont deux sommets adjacents du graphe G;

   · *elt(x,y)*: x est un élément de l'ensemble y;

   · *eg(x,y)* : x et y sont égaux.

   Phrases:

   (a) Chaque sommet du graphe G est colorié par une des couleurs a, b, c ou d

   (b) Deux sommets adjacents ont des couleurs différentes

   ---

   a) $\forall x\ (s(x, G) \Rightarrow elt(c(x), \{a, b, c, d\}))$
   b) $\forall x\ \forall y\ ((s(x, G) \wedge s(y, G) \wedge eg(c(x), c(y))) \Rightarrow \neg adj(x, y))$

   ---

3 Unification (3 points)

Trouvez –s'il existe– le plus grand unificateur des termes suivants:

1. $p(x, x, a)$ et $p(b, y, y)$

2. $p(f(y), g(a))$ et $p(x, x)$

3. $p(f(g(x, y)), y, x)$ et $p(z, a, b)$

1. Non unifiable: a et b sont des constantes non-unifiables.

2. Non unifiable: $f(y)$ et $g(a)$ sont des termes fonctionnels non-unifiables.

3. PGU= $\{x|b, y|a, z|f(g(x, y))\}$

---

4 Résolution (8 points)

1. Utilisez la 0-résolution, pour montrer que R est conséquence logique de τ_1, c'est à dire que $\tau_1 \models R$ avec $\tau_1 = \{P \lor Q \lor R, \neg P \lor Q \lor R, \neg Q \lor R, \neg R\}$.

$\neg Q \lor R, \neg R \models \neg Q$

$P \lor Q \lor R, \neg P \lor Q \lor R \models Q \lor R$

$Q \lor R, \neg Q \models R$

$R, \neg R \models \perp$

Remarque:
Que $\neg R$ soit ou ne soit pas dans τ_1 ne change rien à la preuve vu qu'il faut montrer que $\tau_1 \land \neg R$ permet de dériver la clause vide. Pour cela, il faut soit que τ_1 soit inconsistant au départ (ce qui est le cas si $\neg R \in \tau_1$), soit qu'il le devienne après l'ajout de $\neg R$

---

2. Utiliser la résolution pour montrer que $\tau_2 \models \Phi$ avec $\tau_2 \equiv \{A_1 \land A_2 \land A_3\}$ et $\Phi = \exists y\, \forall z\, \exists x\, (p(g(y, y)) \lor q(x, z))$. On mettra d'abord l'ensemble du système sous forme prénexe, puis sous forme de skolem et enfin sous forme clausale. Pour éviter les problèmes de capture de variable, on vous suggère d'indicer dans chaque clause les variables avec le numéro de clause; e.g., dans la clause C_2, la variable x sera renommée x_2, la variable y sera renommée y_2, ...

$A_1 : \forall y\, (\exists z\, \neg q(z, y) \Rightarrow \forall x\, (r(x, y) \lor p(g(x, y))))$

$A_2 : \forall x\, \forall y\, ((p(y) \land \exists z\, r(x, z)) \Rightarrow q(y, x))$

$A_3 : \forall x\, ((\exists y\, r(y, x)) \Rightarrow \forall z\, p(g(z, x)))$

- Forme prénexe:

  $A_1 : \forall y\, \forall x\, \forall z\, (q(z, y) \lor r(x, y) \lor p(g(x, y)))$
  $A_2 : \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\neg p(y) \lor \neg r(x, z) \lor q(y, x))$
  $A_3 : \forall x\, \forall y\, \forall z\, (\neg r(y, x) \lor p(g(z, x)))$
  $\neg\Phi : \forall y\, \exists z\, \forall x\, (\neg p(g(y, y)) \land \neg q(x, z))$

  Attention: c'est les formes prénexe et de Skolem de $\neg\Phi$ qu'il faut défínr

- Forme de Skolem:

  $A_1 : q(z, y) \lor r(x, y) \lor p(g(x, y))$
  $A_2 : \neg p(y) \lor \neg r(x, z) \lor q(y, x)$
  $A_3 : \neg r(y, x) \lor p(g(z, x))$
  $\neg\Phi : \neg p(g(y, y)) \land \neg q(x, \mathbf{f}(\mathbf{y}))$

- Forme Clausale

  $C_1 : q(z, y) \lor r(x, y) \lor p(g(x, y))$
  $C_2 : \neg p(y) \lor \neg r(x, z) \lor q(y, x)$
  $C_3 : \neg r(y, x) \lor p(g(z, x))$
  $C_4 : \neg p(g(y, y))$
  $C_5 : \neg q(x, f(y))$

- Forme Clausale (avec renomage des variables):

  $C_1 :\ q(z_1, y_1)\ \vee\ r(x_1, y_1)\ \vee\ p(g(x_1, y_1))$
  $C_2 :\ \neg p(y_2)\ \vee\ \neg r(x_2, z_2)\ \vee\ q(y_2, x_2)$
  $C_3 :\ \neg r(y_3, x_3)\ \vee\ p(g(z_3, x_3))$
  $C_4 :\ \neg p(g(y_4, y_4))$
  $C_5 :\ \neg q(x_5, f(y_5))$

- Résolution

  $C_1, C_2 \models C_6$ avec les unifications $\{x_1|y_4,\ y_1|y_4\}$ et $C_6 \equiv q(z_1, y_4)\ \vee\ r(x_4, y_4)$
  $C_2, C_3 \models C_7$ avec les unifications $\{y_2|g(z_3, x_3)\}$ et $C_7 \equiv \neg r(x_2, z_2)\ \vee\ q(g(z_3, x_3), x_2)\ \vee\ \neg r(y_3, x_3)$
  $C_6, C_7 \models C_8$ avec les unifications $\{x_3|y_4,\ y_3|x_4,\ x_2|x_4\}$ et $C_8 \equiv q(g(z_3, y_4), x_4)\ \vee\ q(z_1, y_4)$
  $C_8, C_5 \models \perp$ avec les unifications $\{z_1|g(z_3, y_4),\ y_4|f(y_5),\ x_5|g(z_3, y_4),\ x_4|f(y_5)\}$
