Examen de logique

Tous documents autorisés, durée 2 heures. Prenez soin de justifier vos résultats

Notations (rappel):

- x, y, z : variables
- a, b, c, d : constantes
- p, q, r, s : symboles de prédicat
- f, g : symboles de function
- P, Q, R, S : propositions
- A, τ, Φ : formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Satisfiabilité et validité (6 points)

1. Pour chacune des formules ci-dessous, utilisez la méthode de votre choix pour montrer qu'elle est universellement valide, uniquement valide dans certaines interprétations, ou fausse.
   - $\Phi_1 : \neg((P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow P))$
   - $\Phi_2 : Q \vee P$
   - $\Phi_3 : (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
2. Donnez une interprétation où $\Phi_4 = \forall x\ \forall y\ \forall z\ (p(f(x, y), z) \Rightarrow p(y, g(z, x))$ est valide et une interprétation où Φ_4 est fausse.
3. Que peut on dire en terme de validité pour la formule $\Phi_5 = \forall x\ \ \exists y\ \ (p(f(x), y) \Rightarrow q(y, z))$

2 Formalisation (6 points)

1. Formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\vee$ et $\wedge$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *c(x)* qui retourne la couleur de x, la constante mm, et les symboles de prédicat suivants:
   · *sb(x)* : x est une souris blanche;
   · *com(x)*: x est commestible;
   · *mp(x)*: x mange des pommes;
   · *dv(x)*: x a des dents vertes.

   Phrases:

   (a) Toutes les souris blanches ne sont pas comestibles.

   (b) Toutes les souris blanches qui ont des dents vertes mangent des pommes.

   (c) Magic Mouse est une souris blanche qui ne mange pas de pommes.

   (d) Certaines souris blanches n'ont pas de dents vertes.

2. Une solution d'un problème de coloriage de graphe est une affectation de couleurs à tous les sommets, tel que deux sommets adjacents n'aient pas la même couleur. Si les couleurs sont définies par l'ensemble $E = \{a, b, c, d\}$, formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\vee$ et $\wedge$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *c(x)* qui retourne la couleur de x, et les symboles de prédicat suivants:

   - *s(x,G)* : x est un sommet du graphe G;
   - *adj(x,y,G)* x et y sont deux sommets adjacents du graphe G;
   - *elt(x,y)*: x est un élément de l'ensemble y;
   - *eg(x,y)* : x et y sont égaux.

   Phrases:

   (a) Chaque sommet du graphe G est colorié par une des couleurs a, b, c ou d

   (b) Deux sommets adjacents ont des couleurs différentes

3 Unification (3 points)

Trouvez –s'il existe– le plus grand unificateur des termes suivants:

1. $p(x, x, a)$ et $p(b, y, y)$

2. $p(f(y), g(a))$ et $p(x, x)$

3. $p(f(g(x, y)), y, x)$ et $p(z, a, b)$

4 Résolution (8 points)

1. Utilisez la 0-résolution, pour montrer que R est conséquence logique de τ_1, c'est à dire que $\tau_1 \models R$ avec $\tau_1 = \{P \vee Q \vee R, \neg P \vee Q \vee R, \neg Q \vee R, \neg R\}$.

2. Utiliser la résolution pour montrer que $\tau_2 \models \Phi$ avec $\tau_2 \equiv \{A_1 \wedge A_2 \wedge A_3\}$ et $\Phi = \exists y\, \forall z\, \exists x\, (p(g(y, y)) \vee q(x, z))$. On mettra d'abord l'ensemble du système sous forme prénexe, puis sous forme de skolem et enfin sous forme clausale. Pour éviter les problèmes de capture de variable, on vous suggère d'indicer dans chaque clause les variables avec le numéro de clause; e.g., dans la clause C_2, la variable x sera renommée x_2, la variable y sera renommée y_2, ...

   $A_1 :\ \forall y\, (\exists z\, \neg q(z, y) \Rightarrow \forall x\, (r(x, y) \vee p(g(x, y))))$
   $A_2 :\ \forall x\, \forall y\, ((p(y) \wedge \exists z\, r(x, z)) \Rightarrow q(y, x))$
   $A_3 :\ \forall x\, ((\exists y\, r(y, x)) \Rightarrow \forall z\, p(g(z, x)))$