Contrôle continu de logique

Tous documents autorisés, durée 2 heures. Prenez soin de justifier vos résultats

Notations (rappel):

- x, y, z : variables
- a, b, c, d : constantes
- p, q, r, s : symboles de prédicat
- f, g : symboles de function
- P, Q, R, S : propositions
- A, τ, Φ : formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Satisfiabilité et validité (6 points)

1. Pour chacune des formules ci-dessous, utilisez la méthode de votre choix (table de vérité, simplification jusqu'à l'obtention d'une formule dont la validité est triviale à déterminer) pour montrer qu'elle est universellement valide, uniquement valide dans certaines interprétations, ou fausse.

   - $\Phi_1 : (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$
   - $\Phi_2 : (P \vee Q) \Rightarrow (Q \wedge P)$
   - $\Phi_3 : \neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow P))$

$\Phi_1 : (P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) \equiv \neg P \vee \neg Q \vee R \equiv (P \wedge Q) \Rightarrow R$. Donc Φ_1 peut s'écrire $A_1 \Rightarrow A_1$ et est universellement valide.

$\Phi_2 \equiv \neg(P \vee Q) \vee (Q \wedge P) \equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P)$: valide dans $I_1 = \{P, Q\text{: Vrais }\}$ et dans $I_2 = \{P, Q\text{: Faux }\}$; Faux dans les autres interprétations.

$\Phi_3 \equiv \neg(\neg P \vee \neg Q \vee P) \equiv P \wedge \neg P \wedge Q$, ce qui est toujours faux.

---

2. Donnez une interprétation où $\Phi_4 = \exists x\, p(g(x), z)$ est valide, une interprétation où Φ_4 est satisfiable et une interprétation où Φ_4 est fausse.

Φ_4 est valide dans $I_{Valide} = \{\mathcal{D} = \{a\},\ g : x \mapsto x$, p: relation d'égalité $=\}$.

Φ_4 est satisfiable dans $I_{satisfiable} = \{\mathcal{D} = \{1, 2\} : \mathbb{N},\ g : x \mapsto x$, p: relation d'ordre stricte $>$ car Φ_4 est vrai pour $z = 1$ et fausse pour $z = 2$.

Φ_4 est fausse dans $I_{Fausse} = \{\mathcal{D} = \{a\},\ g : x \mapsto x$, p: relation d'ordre stricte $>$.

---

2 Forme prénexes et Skolem (4 points)

Mettre les formules suivantes sous forme prénexe et sous forme Skolem

1. $(\forall x\ ((p(x) \land q(x)) \Rightarrow \exists y\ r(x,y)))$

- Forme prénexe
  $(\forall x\ \neg p(x) \lor \neg q(x)\ \lor\ \exists y\ r(x,y))\ \equiv\ \forall x\ \exists y\ \neg p(x)\ \lor\ \neg q(x) \lor\ r(x,y)$
- Forme Skolem
  $\neg p(x)\ \lor\ \neg q(x)\ \lor\ r(x, f(x))$

---

2. $(\forall x \exists y\ (p(x,y)\ \lor\ \exists z_1\ q(z_1)) \Rightarrow \exists z_2\ r(x,y,z_1,z_2))$

- Forme prénexe
  $\forall x \exists y \forall z_1 \exists z_2\ (\neg p(x,y) \land \neg q(z_1))\ \lor\ r(x,y,z_1,z_2)$
- Forme Skolem
  $(\neg p(x, f(x)) \land \neg q(z_1))\ \lor\ r(x, f(x), z_1, g(x,z_1))$

---

3 Formalisation (6 points)

Formalisez en calcul des prédicats du premier ordre les phrases ci-dessous. Vous ne devrez utiliser que les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, les connecteurs $\lor$ et $\land$, la négation $\neg$, l'implication $\Rightarrow$, les variables x, y, z, le symbole de fonction unaire *col(x)* qui retourne la couleur de x, la constante *verte*, et les symboles de prédicat suivants:

· *po(x)* : x est une pomme;

· *ab(x)* : x est une abricot;

· *mu(x)*: x est mure;

· *egal(x,y)*: x est égal à y.

Phrases:

1. Toutes les pommes et tous les abricots sont murs;

2. Il existe des pommes et des abricots qui ont la même couleur;

3. Les abricots de couleur verte ne sont pas murs;

4. Tous les abricots ne sont pas murs;
   Transformer la formule associée à cette dernière phrase et utiliser cette nouvelle formule pour donner une autre formulation en français.

5. S'il n'existe pas d'abricots murs, alors il existe des pommes mures.

a: $\forall x\ (po(x) \vee\ ab(x)) \Rightarrow mu(x)$

b: $\exists x \exists y\ ab(x)\ \wedge\ po(y)\ \wedge\ egal(col(x), col(y))$

c: $\forall x\ (ab(x)\ \wedge\ egal(col(x), verte)) \Rightarrow \neg mu(x))$

d: $\neg(\forall x\ ab(x)\ \Rightarrow mu(x))$
$\equiv \exists x\ ab(x)\ \wedge\ \neg mu(x)$
C'est à dire: *Il existe au moins un abricot qui n'est pas mur.*

e: $\neg(\exists x\ ab(x)\ \wedge\ mu(x))\ \Rightarrow\ \exists y\ po(y)\ \wedge\ mu(y))$
$\equiv (\exists x\ ab(x)\ \wedge\ mu(x))\ \vee\ (\exists y\ po(y)\ \wedge\ mu(y))$

---

4 Unification (3 points)

Donnez un plus grand unificateur (s'il existe) pour (A_1 et B_1), (A_2 et B_2) et (A_3 et B_3), avec :

$$\begin{array}{ll} A1 = p(f(g(a)), z, z) & B1 = p(f(z), x, f(b)) \\ A2 = p(f(g(x, y)), g(a, b), z) & B2 = p(f(z), g(x, y), g(x, b)) \\ A3 = p(f(y), x) & B3 = p(x, y) \end{array}$$

Unificateur de A_1 et B_1 : non unifiable ($g(a)$ et $f(b)$)

Unificateur de A_2 et B_2 : $\Phi = \{y|b, x|a, z|g(x, y)\}$

Unificateur de A_3 et B_3 : non unifiable (y et $f(y)$)

---

5 Résolution (5 points)

1. En utilisant la 0-résolution montrez que $\Phi = C \wedge \neg B$ est une conséquence logique de $\tau =\ C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$, avec $C_1 :\ \neg B \vee C,\ \ C_2 :\ A \vee C,\ C_3 :\ \neg C \vee A,\ C_4 :\ \neg A$

$\neg\Phi : \neg C \vee B,\ \ C_2 :\ A \vee C\ \models\ \ B \vee A \quad (C_5)$

$C_5 :\ B \vee A,\ \ C_1 :\ \neg B \vee C\ \models\ \ A \vee C \quad (C_6)$

$C_6 :\ A \vee C,\ \ C_3 :\ \neg C \vee A\ \models\ \ A \quad (C_7)$

$C_4 :\ \neg A,\ \ C_7 :\ A\ \models\ \ \square$

Remarque : τ est inconsistant donc tout peut être déduit de τ !

---

2. Utilisez la résolution pour montrez que Φ : $\exists x \exists y\ \neg p(y)\ \ \wedge\ \ \neg r(x)$ est une conséquence logique des axiomes:

$A_1 :\ (\forall y\ (r(y) \Rightarrow\ \exists z\ q(y, z)))$

$A_2 :\ \ \exists x\ \forall z\ \neg q(x, z)$

$A_3 :\ \exists z\ \neg p(z)$

Vous mettrez d'abord les axiomes et $\neg\Phi$ sous forme prénexe, puis sous forme de Skolem et enfin sous forme clausale. Lors de la résolution on effectuera les renommages de variable nécessaires et on explicitera les unifications.

- Forme prénexe:

  $A_1 : \forall y\, \exists z\ \ \neg r(y) \ \vee \ q(y,z)$
  $A_2 : \exists x\, \forall z\, \neg q(x,z)$
  $A_3 : \exists z\, \neg p(z)$
  $\neg\Phi : \neg(\exists x \exists y\, \neg p(y) \ \wedge \ \neg r(x)) \ \equiv \ \forall x \forall y\, p(y) \vee r(x)$

  Attention: c'est les formes prénexe et de Skolem de $\neg\Phi$ qu'il faut défінr

- Forme de Skolem (et Forme Clausale):

  $C_1 : \neg r(y) \ \vee \ q(y, f(y))$
  $C_2 : \neg q(a,z)$
  $C_3 : \neg p(b)$
  $\neg\Phi : p(y) \vee r(x)$

- Résolution (les renomages sont indiqués par des ')

  $\neg\Phi : \ p(y) \vee r(x), \ \ C_1 : \ \neg r(y') \ \vee \ q(y', f(y')) \models \ \ p(y) \vee q(x, f(x)) \ \ (C_4)$, avec l'unification $\{y'|x\}$
  $C_4 : \ \ p(y) \vee q(x, f(x)), \ C_3 : \ \neg p(b) \ \models \ \ q(x, f(x)) \ \ (C_6)$, avec l'unification $\{y|b\}$
  $C_6 : \ q(x, f(x)), \ C_2 : \ \neg q(a,z) \ \models \square$ avec les unifications $\{x|a, z|f(a)\}$
