Contrôle continu de logique

Tous documents autorisés, durée 2 heures. Prenez soin de justifier vos résultats

Notations (rappel):

- x, y, z : variables
- a, b, c, d : constantes
- p, q, r, s : symboles de prédicat
- f, g : symboles de function
- P, Q, R, S : propositions
- A, τ, Φ : formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Satisfiabilité et validité (5 points)

1. Pour chacune des formules ci-dessous, utilisez la méthode de votre choix (table de vérité, simplification jusqu'à l'obtention d'une formule dont la validité est triviale à déterminer) pour montrer qu'elle est universellement valide, uniquement valide dans certaines interprétations, ou fausse.

   - Φ_1 : $(P \wedge Q) \Rightarrow \neg P$
   - Φ_2 : $\forall x \exists y \; r(y, f(x))$
   - Φ_3 : $(\forall x \forall y \; r(x, y) \wedge s(g(y))) \Rightarrow (\exists x \exists y \, r(x, y) \vee s(g(y)))$

$\Phi_1 :\equiv \neg P \vee \neg Q$. Donc Φ_1 est fausse si P et Q sont vrais et Φ_1 valide dans tous les autres cas; donc, non universellement valide

Φ_2 valide dans l'interprétation $I_1 = \{$Domaine $\mathbb{N}$ (entiers positifs ou nuls), r : $<$ (relation d'ordre stricte dans $\mathbb{N}$), $f : x \mapsto x + 1\}$; Φ_2 est fausse dans l'interprétation $I_2 = \{$Domaine $\{1\}$, r : $<$, $f : x \mapsto x\}$; donc, Φ_2 n'est pas universellement valide.

$\Phi_3 \equiv \neg((\forall x \forall y \; r(x, y) \wedge s(g(y)))) \vee (\exists x \exists y \, r(x, y) \vee s(g(y)))$
$\equiv (\exists x \exists y \, \neg r(x, y) \vee \neg s(g(y))) \vee \exists x \exists y \, (r(x, y) \vee s(g(y)))$
$\equiv \exists x \exists y \, (\neg r(x, y) \vee \neg s(g(y))) \vee (r(x, y) \vee s(g(y)))$, ce qui est universellement valide.

---

2. Donnez une interprétation où $\Phi_4 = \forall x \; r(y, f(x))$ est valide, une interprétation où Φ_4 est satisfiable et une interprétation où Φ_4 est fausse.

Φ_4 est satisfiable pour $y = 0$ dans $I_{satisfiable} = \{\mathcal{D} = \mathbb{N}$, r: $\leq$, $f : (x, y) \mapsto x \div (y + 1)\}$, où $\div$ est la division entière.

Φ_4 est valide dans $I_{valide} = \{\mathcal{D} = \mathbb{N}$, , r: $<$, $f : (x, y) \mapsto y + x\}$.

Φ_4 est fausse dans $I_{fausse} = \{\mathcal{D} = \{1, r : <, f : (x, y) \mapsto 2 * y - x\}$.

---

2 Forme prénexes et Skolem (5 points)

Mettre les formules suivantes sous forme prénexe et sous forme Skolem (pour la deuxième formule donnez les deux formes prénexes de Skolem)

1. $\exists y\, p(y) \vee \forall x\, q(x,y) \vee \exists z\, q(x,y,z)$

- Forme prénexe
  $\exists y\, \forall x\, \exists z\, p(y) \vee q(x,y) \vee q(x,y,z)$
- Forme Skolem
  $p(a) \vee q(x,a) \vee q(x,a,f(x))$

---

2. $(\exists x\, p(x) \wedge q(x)) \Rightarrow (\exists y\, r(y))$

- Formes prénexes
  $\forall x\, \exists y\, \neg p(x) \vee \neg q(x) \vee r(y))$
  ou
  $\exists y\, \forall x\, r(y) \vee \neg p(x) \vee \neg q(x)$
- Formes Skolem
  $\neg p(x) \vee \neg q(x) \vee r(f(x)))$
  ou
  $r(a) \vee \neg p(x) \vee \neg q(x)$

---

3 0-Résolution (5 points)

1. En utilisant la 0-résolution montrez que le système d'axiomes τ ci-dessous est inconsistant. $\tau = C_1 \wedge C_2 \wedge C_3 \wedge C_4$, avec $C_1 :\ \neg B \vee C$, $C_2 :\ A \vee C$, $C_3 :\ \neg C \vee A$, $C_4 :\ \neg A$

$C_2,\ C_4 \models \neg C \quad (C_5)$

$C_5,\ C_2 \models A \quad (C_6)$

$C_4,\ C_6 \models \square$

---

2. Quelles déductions peut on faire avec τ avec la résolution ?

On peut tout déduire d'un système inconsistant avec la résolution.

---

4 Unification (3 points)

Donnez un plus grand unificateur (s'il existe) pour (A_1 et B_1), (A_2 et B_2) et (A_3 et B_3), avec :

$$\begin{array}{ll} A1 = p(f(a), z, z) & B1 = p(f(x), x, f(b)) \\ A2 = p(f(g(x, y)), z, g(a, b)) & B2 = p(f(z), g(a, y), g(x, b)) \\ A3 = p(f(y), x) & B3 = p(x, x) \end{array}$$

Unificateur de A_1 et B_1 : non unifiable (a et $f(b)$)

Unificateur de A_2 et B_2 : $\Phi = \{x|a, z|g(x, y)\}$

Unificateur de A_3 et B_3 : unifiable $\{x|f(y)\}$

---

5 Formalisation et résolution(14 points)

Soit l'énoncé:
Tous les chasseurs tirent sur des canards. Tout canard qui dit JeSuisCharlie est libre. Aucun chasseur n'attrape un canard libre. N'importe quel chasseur qui tire sur un canard et qui ne l'attrape pas est perdu à jamais.
Conclusion : "Si tous les canards disent JeSuisCharlie alors tous les chasseurs sont perdus à jamais."

1. Modéliser en logique du premier ordre[1] l'énoncé et la conclusion ci-dessus en utilisant les prédicats suivants (5 points) :

`ch(x)`: x est un chasseur	`ca(x)`: x est un canard
`li(x)`: x est libre	`jsc(x)`: x dit JeSuisCharlie
`pe(x)`: x est perdu à jamais	`tr(x,y)`: x tire sur y
`at(x,y)`: x attrape y	

   A_1 : $\forall x\ (ch(x) \Rightarrow\ \exists y\ ca(y) \wedge tr(x, y))$

   A_2 : $\forall x\ ((ca(x)\ \wedge\ jcs(x)) \Rightarrow\ li(x))$

   A_3 : $\forall x\, \forall y\ ((ch(x)\ \wedge\ ca(y)\ \wedge\ li(y))\ \Rightarrow \neg at(x, y))$

   A_4 : $\forall x\, \forall y\ ((ch(x)\ \wedge\ ca(y)\ \wedge\ tr(x, y)\ \wedge\ \neg at(x, y))\ \Rightarrow\ pe(x))$

   Φ : $(\forall x(\ ca(x)\ \Rightarrow\ jsc(x)))\ \Rightarrow\ (\forall y\, (ch(y)\ \Rightarrow\ pe(y)))$

   ---

2. Mettre les axiomes et $\neg\Phi$, sous forme prénexe, skolem et clausale (5 points).

   (a) Mise sous forme prénexe:

   $A_1 : \forall x\ \exists y\ \neg ch(x)\ \vee\ (ca(y) \wedge tr(x, y))$
   $A_2 : \forall x\ \neg ca(x)\ \vee \neg jcs(x) \vee\ li(x)$
   $A_3 : \forall x\ \forall y\ \neg ch(x)\ \vee\ \neg ca(y)\ \vee\ \neg li(y)\ \vee\ \neg at(x, y)$
   $A_4 : \forall x \forall y\ \neg ch(x)\ \vee\ \neg ca(y)\ \vee\ \neg tr(x, y)\ \vee\ at(x, y)\ \vee\ pe(x))$
   $\neg\Phi : \forall x\ \exists y(\ \neg ca(x)\ \vee\ jsc(x))\ \wedge\ ch(y)\ \wedge\ \neg pe(y)$

   (b) Mise sous forme skolem:

   A_1 : $\neg ch(x)\ \vee\ (ca(f(x)) \wedge tr(x, f(x)))$
   A_2 : $\neg ca(x)\ \vee \neg jcs(x) \vee\ li(x)$

[1] C'est à dire écrire les axiomes correspondants à l'énoncé et Φ qui correspond à la conclusion.

$A_3: \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg li(y) \vee \neg at(x,y)$
$A_4: \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg tr(x,y) \vee at(x,y) \vee pe(x)$
$\neg\Phi: (\neg ca(x) \vee jsc(x)) \wedge ch(g(x)) \wedge \neg pe(g(x))$

(c) Mise sous forme clausale:

$C_{1a}: \neg ch(x) \vee ca(f(x))$
$C_{1b}: \neg ch(x) \vee tr(x, f(x))$
$C_2: \neg ca(x) \vee \neg jcs(x) \vee li(x)$
$C_3: \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg li(y) \vee \neg at(x,y)$
$C_4: \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg tr(x,y) \vee at(x,y) \vee pe(x)$
$C_{Phi_1}: \neg ca(x) \vee jsc(x)$
$C_{Phi_2}: ch(g(x))$
$C_{Phi_3}: \neg pe(g(x)$

---

3. Prouvez à l'aide de la méthode de résolution que la conclusion est une conséquence logique de l'énoncé précédent, c'est à dire que $\neg\Phi$ et les axiomes permettent de dériver la clause vide (4 points).

$C_2, C_{Phi_1} \models \neg ca(x) \vee li(x) \quad (C_5)$
$C_6, C_3 \models \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg at(x,y) \quad (C_7)$
$C_7, C_4 \models \neg ch(x) \vee \neg ca(y) \vee \neg tr(x,y) \vee pe(x) \quad (C_8)$
$C_9, C_{1a} \models \neg ch(x) \vee \neg ca(f(x)) \vee pe(x) \quad (C_9)$
$C_9, C_{1b} \models \neg ch(x) \vee pe(x) \quad (C_{10})$
$C_{10}, C_{Phi_2} \models pe(g(x)) \quad (C_{11})$
$(C_{11}), C_{Phi_3} \models \Box$
