Université Nice Sophia Antipolis – Polytech Sophia –SI3

Contrôle continu de logique – Mardi 13 Novembre 2018 – Durée : 55 minutes

Barème:

1	4 pts	4	2 pts
2	4 pts	5	4 pts
3	2 pts	6	4 pts

Notations (rappel)

- x,y,z : symboles de variables
- a,b,c,d: symboles de constantes
- p,q,r,s : symboles de prédicats
- P,Q,R,S : symboles de propositions
- f,g,h : symboles de fonctions
- A,τ,Φ : symboles de formules

Tous ces symboles peuvent éventuellement être indicés.

1 Preuve *sémantique* – Calcul des propositions

Pour chacune des formules suivantes dire si elle est universellement valide, valide ou fausse. On utilisera pour cela une méthode de preuve sémantique.

1. Si *il pleut*, alors *il a du vent*
2. Si *il fait beau à Paris* et *Paris est en France*, alors *il ne pleut pas à Paris*.

En notant les propositions
- *il pleut* : Pe
- *il y a du vent* : Ve
- *il fait beau à Paris* : BP
- *Paris est en France* : PF
- *il pleut à Paris* :PP

On obtient :
1. Pour la première phrase, on obtient la formule $Pe \Rightarrow Ve$
   La table de décision :

Pe	Ve	$Pe \Rightarrow Ve$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

   montre que cette formule n'est pas un théorème, mais que c'est une formule valide.
2. Pour la deuxième phrase, on obtient la formule $BP \wedge PF \Rightarrow PP$
   La table de décision :

BP	PF	BP	$BP \wedge PF \Rightarrow \neg PP$
0	0	0	1
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	0

montre que cette formule n'est pas un théorème, mais que c'est une formule valide (la première et la dernière ligne du tableau sont suffisantes pour arriver à cette conclusion.

---

2 0-résolution

Utilisez la méthode de 0-résolution pour prouver prouver que la formule ci-dessous est un un théorème.

$$(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

Il faut nier l'affirmation , mettre sous forme clausale et tenter de dériver la clause vide

$$\neg((\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A))$$
$$\equiv$$
$$\neg(\neg(\neg A \Rightarrow \neg B) \vee (B \Rightarrow A))$$
$$\equiv$$
$$(A \vee \neg B) \wedge \neg(\neg B \vee A))$$
$$\equiv$$
$$(A \vee \neg B) \wedge B \wedge \neg A)$$

On obtient donc le système de clauses

- $C_1 : (A \vee \neg B)$
- $C_2 : B$
- $C_3 : \neg A$

De C_1 et C_2 on obtient $C_3 : A$.
De C_2 et C_3 on obtient la clause vide, l'affirmation est donc prouvée.

---

3 Formes Prenexe et de Skolem

3.1 Formes Prenexe

Donner une forme prenexe des formules :

1. $\forall x(\ p(x) \Rightarrow \exists y\ q(x,y)\ )$

2. $\forall x(\ (\exists z\ p(x,z) \wedge p(y,z)) \Rightarrow \forall y \exists u\ q(x,y,u)\ )$

Mise sous forme prenexe

1. $\forall x\ \exists y\ \neg p(x)\ \vee\ q(x,y)$

2. $\forall x(\ \neg(\exists z\ p(x,z) \wedge p(y,z))\ \vee \forall y \exists u\ q(x,y,u)\ )$
   $\forall x(\ (\forall z\ \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z))\ \vee \forall y \exists u\ q(x,y,u)\ )$
   $\forall x \forall z \forall y \exists u\ \neg p(x,z) \vee \neg p(y,z)\ \vee\ q(x,y,u)\ )$

3.2 Formes de Skolem

Mettre sous forme Skolem les formules suivantes :

1. $\exists z\ \forall x\ \exists y\ p(x)\ \vee\ \neg q(x,y,z)$

2. $\forall x\ \exists u\ \forall z\ \forall y\ \exists w\ \ p(x,z,w)\ \vee\ \neg r(y,z)\ \vee\ \neg q(x,y,u)\ )$

---

1. $p(x)\ \vee\ \neg q(x,y,f(x),a)$

2. $p(x,z,f(x,z,y))\ \vee\ \neg r(y,z)\ \vee\ \neg q(x,y,g(x))\ )$

---

4 Unification

Calculez s'il existe un plus grand unificateur des paires d'atomes suivants. En cas d'échec précisez pourquoi les atomes ne sont pas unifiables

- $A_1 = p(f(y,y),g(z)))$ et $A_2 = p(z,w))$
- $A'_1 = q(f(g(x),x),g(x))$ et $A'_2 = q(g(z,y),y)$

- Unifier A_1 et A_2 revient à unifier d'une part z et $f(y,y)$, d'autre part w et $g(f(y,y))$. Donc la composition de substitution $((w|g(f(y,y)) \circ (z|f(y,y)))$ est un plus grand unificateur de A_1 et A_2
- Unifier A'_1 et A'_2 nécessite d'unifier $f(g(x),x)$ et $g(z,y)$ or les fonctions $f/2$ et $g/2$ ne sont pas unifiables car leurs noms de fonctions sont différents.

---

5 1-résolution

Soit les axiomes :

A_1 : $\forall x\ (\mathrm{C}(x) \Rightarrow \neg \mathrm{M}(x))$
A_2 : $\exists x\ (\mathrm{M}(x)\ \wedge P(x)\ \wedge\ \mathrm{C}(x))$
Utiliser la résolution pour montrer Φ : $\exists x(P(x) \wedge \neg \mathrm{M}(x))$

Axiomes :

A_1 : $\forall x\ (\mathrm{C}(x) \Rightarrow \neg \mathrm{M}(x))$
A_2 : $\exists x\ (\mathrm{M}(x) \wedge P(x)\ \wedge\ \mathrm{C}(x))$
Φ : $\exists x(P(x) \wedge \neg \mathrm{M}(x))$

Mise sous *prenexe*, de *Skolem*, et de *clauses* de $\{A_1,\ A_2$ et $\ \neg\Phi\}$ donne:

- $c_1 : \neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{M}(x))$
- $c_2 : \mathrm{M}(b)$
- $c_3 : P(b)$

- c_4 : $\mathrm{C}(b)$
- $\neg\Phi$: $\neg P(x) \vee \mathrm{M}(x)$

$$\frac{\neg\Phi : \neg \mathrm{P}(x) \vee \mathrm{M}(x) \qquad c_3 : P(b)}{c_4 : \mathrm{M}(b)}$$

(Pas de renommage à faire, le plus grand unificateur entre $\mathrm{P}(x)$ et $\mathrm{P}(b)$ est $(x|b)$)

$$\frac{c_4 : \mathrm{M}(b) \qquad c_1 : \neg \mathrm{C}(x) \vee \neg \mathrm{M}(x)}{c_5 : \neg \mathrm{C}(b)}$$

(Pas de renommage à faire, le plus grand unificateur entre $\neg\mathrm{M}(x)$ et $\mathrm{M}(b)$ est $(x|b)$)

$$\frac{c_5 : \neg \mathrm{C}(b) \qquad c_4 : \mathrm{C}(b)}{\square}$$

Le résultat est prouvé.