Algorithmique Programmation Objet

Python

Andrea G. B. Tettamanzi
Université de Nice Sophia Antipolis
Département Informatique
andrea.tettamanzi@unice.fr

CM - Séance 2

Introduction à l'analyse des algorithmes

Plan

- Complexité des algorithmes
- Notations O, o, Θ et Ω
- Classes de complexité
- Pseudo-langage

Complexité

- Tous les algorithmes ne sont pas équivalents.
- On les différencie selon au moins 2 critères :
  - Temps de calcul : lents vs rapides
  - Mémoire utilisée : peu vs beaucoup
- On parle de complexité
  - en temps (vitesse)
  - en espace (mémoire utilisée)
- Indicateur de l'efficacité d'un algorithme et de la difficulté du problème
- Analyse des algorithmes = étude de leur complexité

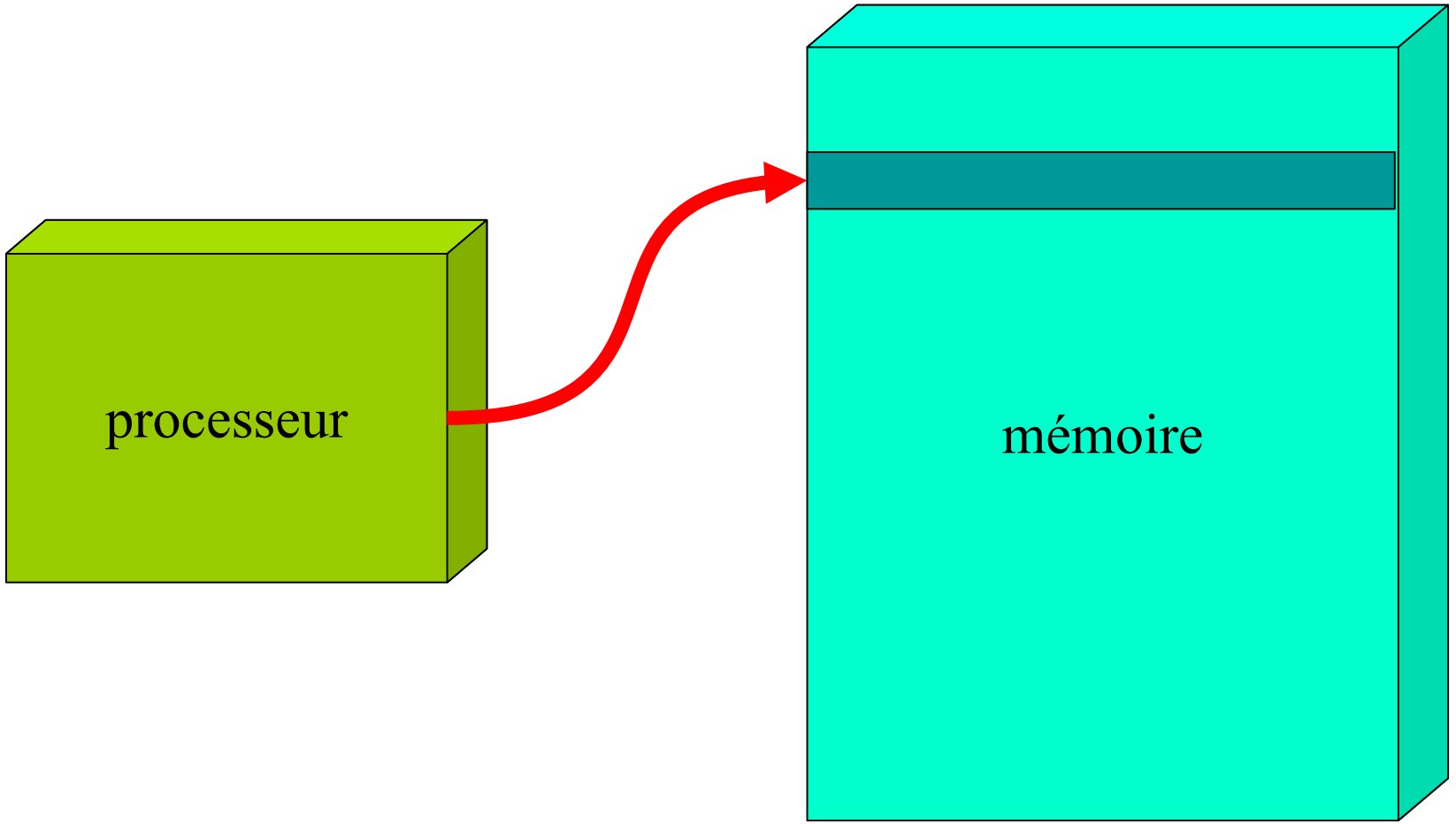
Temps de calcul

- Pour une entrée donnée :
  - Combien de temps prend chaque opération élémentaire ?
  - Combien de fois est exécutée chaque opération élémentaire ?
  - Profilation
- Pour ce faire, il faut disposer d'un modèle du calcul :
  - Modèle de la technologie utilisée pour réaliser l'algorithme
  - Décrit les ressources utilisées et leur coût
  - Doit être suffisamment réalistique
  - Doit faire abstraction des détails spécifiques de tel ou tel processeur

Modèle RAM

- RAM = Random Access Machine (c'est-à-dire, machine à mémoire adressable)
- Modèle théorique d'ordinateur, avec de nombreuses simplifications
- La machine RAM est néanmoins assez proche des ordinateurs actuels sur certains points :
  - Instructions exécutées en séquence
  - Chaque instruction prend un temps constant pour être exécutée
  - Le coût d'accès à n'importe quelle case de mémoire est constant

Mémoire adressable



Mesure des ressources

- Ressources utilisées pour le calcul d'une instance
- Temps :
  - nombre total des opérations élémentaires exécutées
  - mesure indépendante d'une machine particulière
  - simplification : temps égal pour chaque opération
- Espace :
  - quantité maximale d'informations à maintenir
  - inclut les données en entrée et les résultats
- Temps et espace sont corrélés
- espace ≤ k · temps

Analyse d'un algorithme

- Quantité de ressources est fonction des données en entrée
- Taille des données en entrée: *n*
- Meilleur cas: ex., le temps de calcul le plus court pour toutes les entrées de taille *n.*
- Cas moyen: ex., la moyenne des temps de calcul pour toutes les entrées de taille *n.*
- Pire cas: ex., le temps de calcul le plus long pour toutes les entrées de taille *n.*

Analyse pire cas

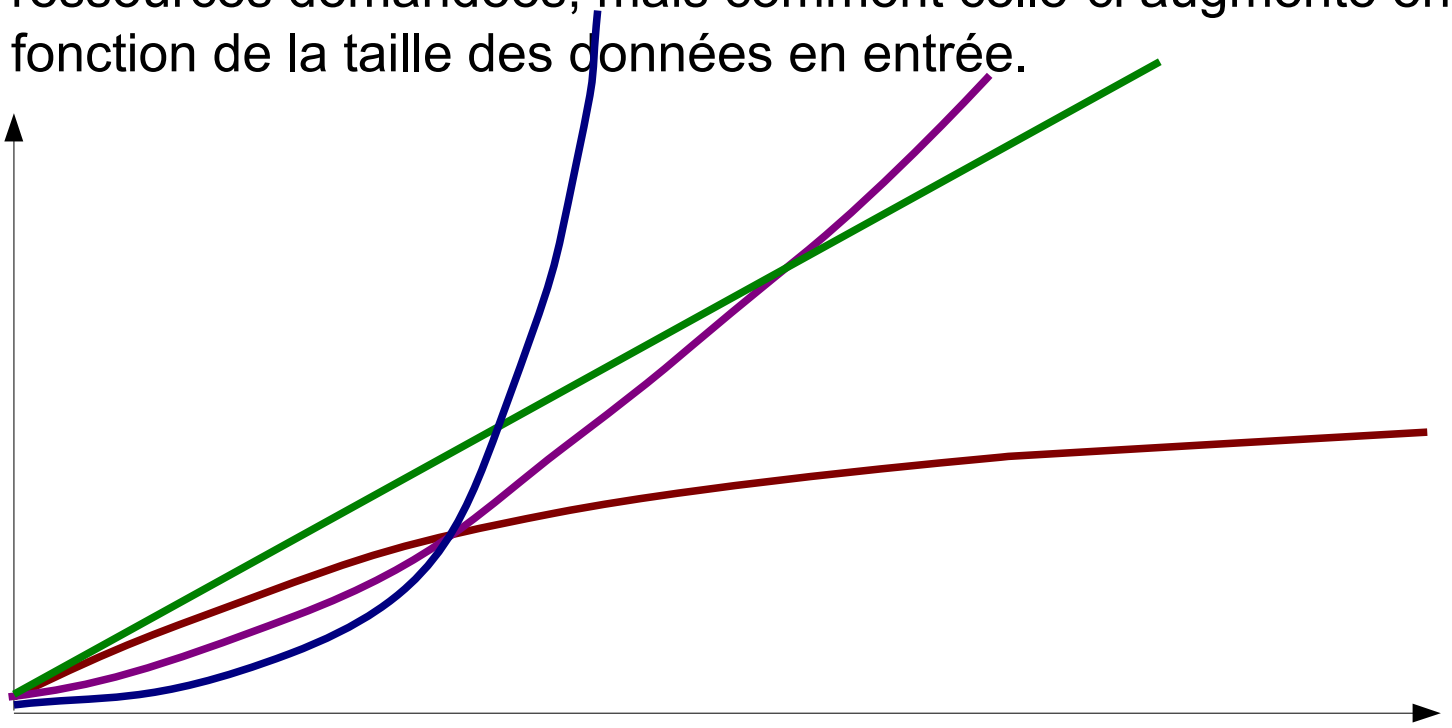
- Limite supérieure aux ressources que l'exécution de l'algorithme pourra jamais demander

- Le pire case s'avère assez souvent (ex. recherche d'une donnée inexistante)

- Dans la plupart des problèmes (et des algorithmes), le cas moyen est à peu près autant mauvais que le pire cas

Ordre

- Ce qui compte vraiment n'est pas la quantité précise des ressources demandées, mais comment celle-ci augmente en fonction de la taille des données en entrée.



Notations O, o, Θ et Ω

- Pour comparer des algorithmes, on fait une comparaison asymptotique de leurs fonctions de croissance du temps de calcul
- Notation “Grand O” introduite en 1894 par Paul Bachmann : $f(n) = O(g(n))$ signifie « il existe une constante C telle que, pour toute n, $|f(n)| \leq C|g(n)|$ »
- En tout, 4 notations asymptotiques sont souvent utilisées
  - $f(n) = O(g(n)) \equiv \exists\ C : \forall\ n, |f(n)| \leq C|g(n)|$
  - $f(n) = \Omega(g(n)) \equiv \exists\ C : \forall\ n, |f(n)| \geq C|g(n)|$
  - $f(n) = \Theta(g(n)) \equiv f(n) = O(g(n))$ et $f(n) = \Omega(g(n))$
  - $f(n) = o(g(n)) \equiv |f(n)|/|g(n)| \rightarrow 0$ pour $n \rightarrow +\infty$

Notations O, o, Θ et Ω

- Moins formellement (en termes d'ordres de croissance) :
  - $f(n) = O(g(n))$: l'ordre de *f* n'est pas plus que celui de *g*
  - $f(n) = \Omega(g(n))$: l'ordre de *f* est au moins celui de *g*
  - $f(n) = \Theta(g(n))$: *f* et *g* ont le même ordre de croissance
  - $f(n) = o(g(n))$: *g* approche l'infini plus vite que *f*
    (*f* est négligeable devant *g*, *g* est prépondérante devant *f*)

Rêgles de manipulation de O

$$m \leqslant m' \rightarrow n^m = O\left(n^{m'}\right),$$
$$O\left(f\left(n\right)\right) + O\left(g\left(n\right)\right) = O\left(\left|f\left(n\right)\right| + \left|g\left(n\right)\right|\right),$$
$$f\left(n\right) = O\left(f\left(n\right)\right),$$
$$c \cdot O\left(f\left(n\right)\right) = O\left(f\left(n\right)\right),$$
$$O\left(O\left(f\left(n\right)\right)\right) = O\left(f\left(n\right)\right),$$
$$O\left(f\left(n\right)\right) O\left(g\left(n\right)\right) = O\left(f\left(n\right) g\left(n\right)\right),$$
$$O\left(f\left(n\right) g\left(n\right)\right) = f\left(n\right) O\left(g\left(n\right)\right).$$

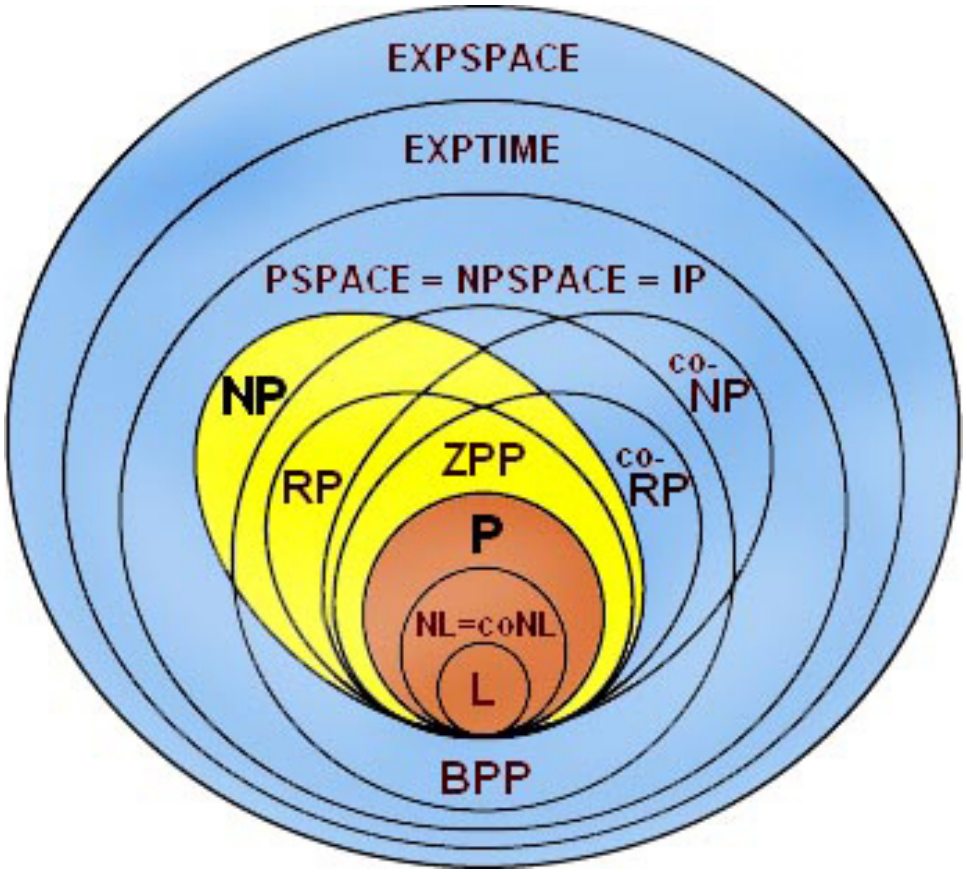
Classes de complexité

- $O(1)$ constante
- $O(\log n)$ logarithmique
- $O(\sqrt{n})$ racinaire
- $O(n)$ linéaire
- $O(n \log n)$ linéarithmique ou quasi-linéaire
- $O(n^2)$ quadratique
- $O(n^3)$ cubique
- $O(n^d)$ polynomiale de dégré d
- $O(c^n)$ exponentielle
- $O(n!)$ factorielle
- $O(2^{2^n})$ doublement exponentielle

Classes de complexité

- En fait, il y a quatre familles de classes de complexité
  - **TIME(t(n))**, la classe des problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps de l'ordre de grandeur de t(n) sur une machine déterministe.
  - **NTIME(t(n))**, la classe des problèmes de décision qui peuvent être résolus en temps de l'ordre de grandeur de t(n) sur une machine non déterministe.
  - **SPACE(s(n))**, la classe des problèmes de décision qui requièrent pour être résolus un espace de l'ordre de grandeur de s(n) sur une machine déterministe.
  - **NSPACE(s(n))**, la classe des problèmes de décision qui requièrent pour être résolus un espace de l'ordre de grandeur de s(n) sur une machine non déterministe.

Classes de complexité



Notion de pseudo-langage

- On a besoin d'un langage formel minimum pour décrire un algorithme
- Un langage de programmation (Python, Java, C, Pascal, etc.) est trop contraignant
- Dans la littérature, les algorithmes sont décrits dans un pseudo langage qui ressemble à un langage de programmation (le pseudo langage utilisé dépend donc de l'auteur et peut être spécifié par celui-ci en début d'ouvrage)

Pseudo-langage

- Tous les pseudo langages recouvrent les mêmes concepts
  - Variables, affectation
  - Structures de contrôle : séquence, conditionnelle, itération
  - Découpage de l'algorithme en sous-programmes (fonctions, procédures).
  - Structures de données simples ou élaborées (tableaux, listes, dictionnaires, etc.)

Pseudo-langage : variables, affectations

- Les variables sont indiquées avec leur type : booléen b, entier n, réel x, caractère c, chaîne s, etc.
- On est souple du moment qu'il n'y a pas d'ambiguïté
- Le signe de l'affectation n'est pas « = » comme en Python, ni « := » (comme en Pascal) mais « ← » qui illustre bien la réalité de l'affectation (« mettre dedans »)

Pseudo-langage : structures de données

- Les tableaux sont utilisés. Si A est un tableau, A[i] est le ième élément du tableau
- Les structures sont utilisées. Si P est une structure modélisant un point et x un champ de cette structure représentant l'abscisse du point, P.x est l'abscisse de P

  Remarque : une structure est une classe sans les méthodes

Pseudo-langage : le séquencement des instructions

- Les instructions simples sont séquencés par « ; » (si besoin)
- Les blocs d'instructions sont entourés par
  - { … }, comme en C, C++ et Java
  - début … fin, comme en Pascal
- Ou simplement distingués par la mise en forme (même niveau d'indentation), comme en Python

Pseudo-langage : la conditionnelle

La conditionnelle est exprimée par :

si condition
    instruction1
sinon
    instruction2

Pseudo-langage : les itérations

tant que condition
    instruction

faire
    instruction
tant que condition

répéter
    Instruction
jusqu'à condition

pour i **de** min **à** max
    instruction

Pseudo-langage : les fonctions

- maFonction(↓ int i, ↑ int j, ↕ int k);
  - ↓ = en entrée : la fonction lit la valeur du paramètre, ici i. Les modifications qu'elle fera avec i ne seront pas transmises au programme appelant
  - ↑ = en sortie : la fonction ne lit pas la valeur du paramètre, ici j. Elle écrit dans j et le programme appelant récupère cette valeur, donc j peut être modifié par la fonction
  - ↕ = en entrée/sortie : la fonction lit la valeur du paramètre k, et passe au programme appelant les modifications faites pour k
- Par défaut, on considérera que le paramètre est passé en entrée.
- Le passage en entrée/sortie est souvent appelé passage par référence ou par variable

Merci de votre attention