Algorithmique Programmation Objet

Python

Andrea G. B. Tettamanzi
Université de Nice Sophia Antipolis
Département Informatique
andrea.tettamanzi@unice.fr

CM - Séance 11

Arbres et Graphes

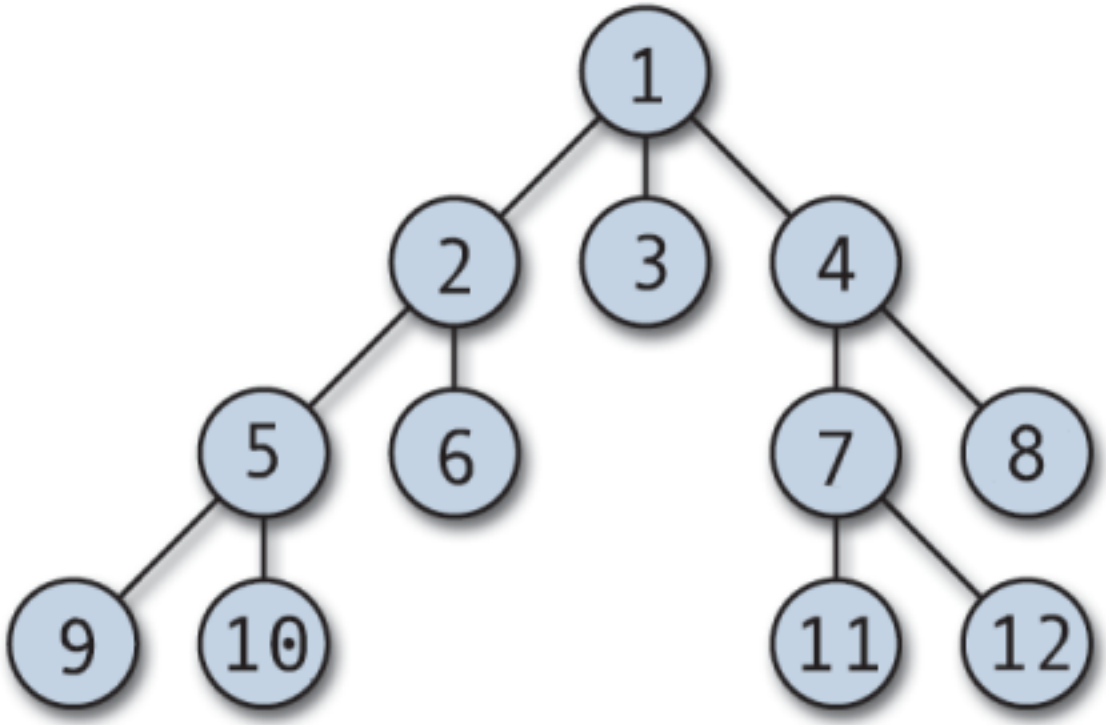
Plan

- Arbres
  - Définitions
  - Parcours
  - Réalisation
- Graphes

Arbre

- Structure de données récursive
- Un arbre est formé par
  - Un nœud (dit « racine »), contenant
    - Des données ou une référence à des données
    - Des références (ou pointeurs) à des (sous-)arbres
  - Zéro ou plus sous-arbres
- Un nœud n'ayant pas des sous-arbres est dit « feuille »
- Les autres nœuds sont dits « nœuds internes »
- Nous avons déjà rencontré ce type de structure quand on a étudié les tas

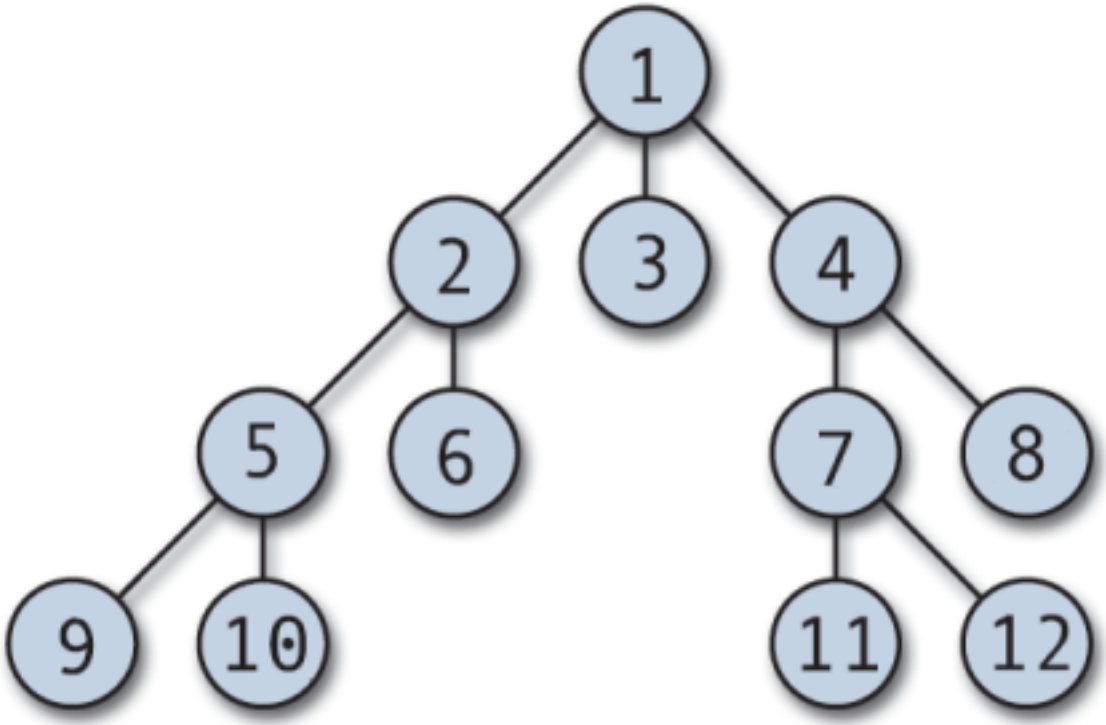
Arbre



Arbre

- La racine r de l'arbre est l'unique nœud ne possédant pas de parent
- Tout nœud x qui n'est pas la racine a
  - un unique parent, noté x.parent ou parent(x) (appelé « père » parfois)
  - 0 ou plusieurs fils ; x.fils ou fils(x) désigne l'ensemble des fils de x
- Si x et y sont des nœuds tels que x soit sur le chemin de r à y,
  - x est un ancêtre de y
  - y est un descendant de x
- Les feuilles n'ont pas de fils

Arbre



1 est la racine
9,10,6,3,11,12,8 sont les feuilles
11 est un descendant de 4, mais pas de 2
2 est un ancêtre de 10

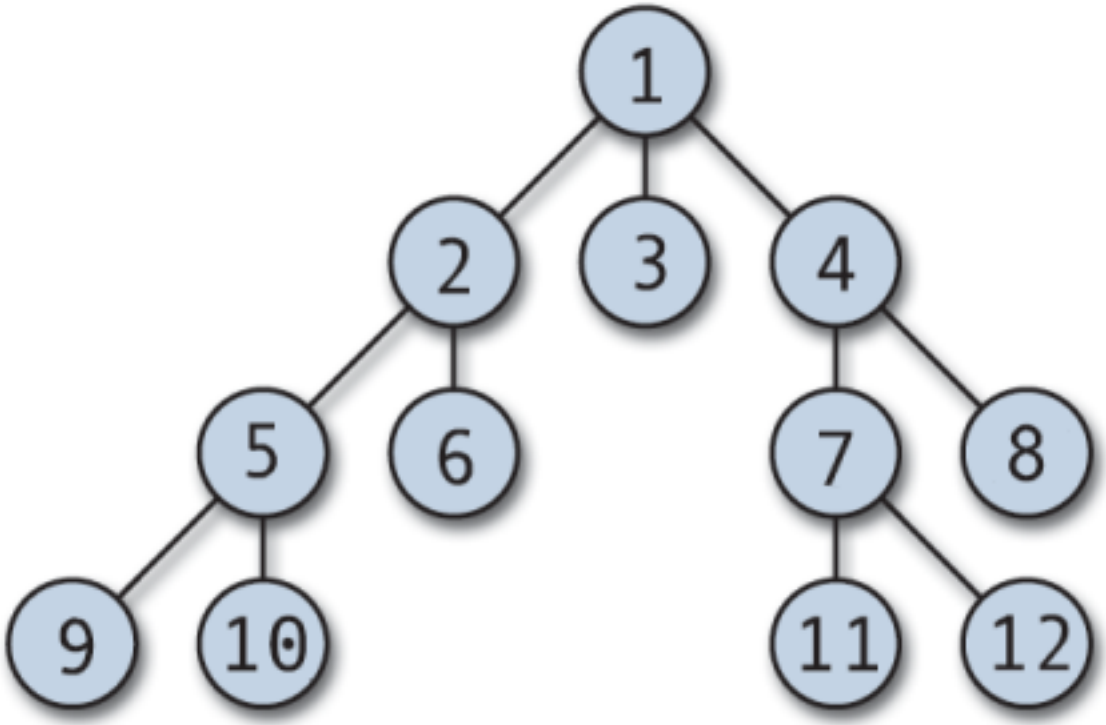
Arbre

- Quand il n'y a pas d'ambiguïté, on regarde les arêtes d'un arbre comme étant orienté de la racine vers les feuilles

- La profondeur d'un nœud (*depth*) est définie récursivement par
  - prof(v) = 0, si v est la racine
  - prof(v) = prof(parent(v)) + 1

- La hauteur d'un nœud (*height*) est la plus grande profondeur d'une feuille du sous-arbre dont il est la racine

Arbre



1 est la racine
2,3,4 sont à la profondeur 1
5,6,7,8 à la profondeur 2
La hauteur de 2 est 2, celle de 9 est 0, celle de 3 est 0, celle de 1 est 3

Arbre : Utilisation

- Les arbres sont un peu partout en Informatique

- Représenter la structure syntaxique d'expressions (*parsing*)
  - Mathématiques ou logiques
  - De langages de programmations
  - Du langage naturel
- Gérer des bases de données
- Indexation de fichiers.
- Tri par tas

- Ils permettent des recherches rapides et efficaces.

Arbre : Parcours

- Parcours (*tree traversal*) :
  - on traverse l'ensemble des nœuds de l'arbre

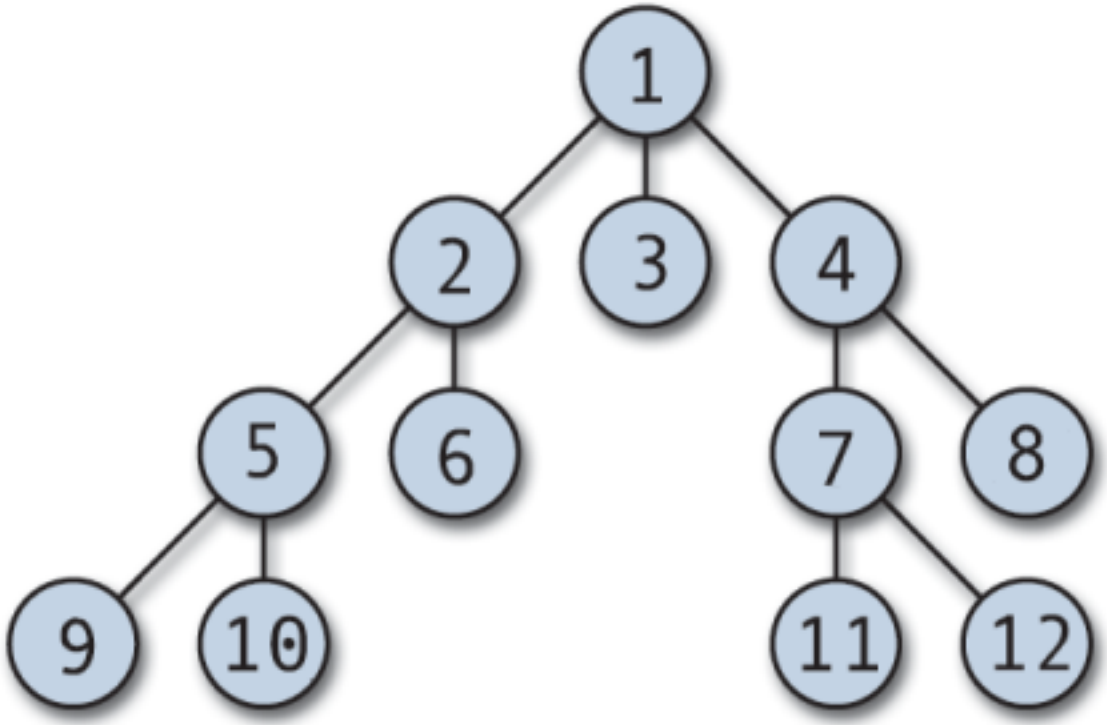
- Parcours en largeur d'abord (*breadth first*)
- Parcours en profondeur d'abord (*depth first*)
  - Préfixé
  - Infixé
  - Postfixé

Parcours en largeur d'abord

- On visite la racine
- Puis on répète le processus suivant jusqu'à avoir visité tous les sommets :
  - visiter un fils non visité du sommet le moins récemment visité qui a au moins un fils non visité

- On visite tous les sommets à la profondeur 1,
- puis tous ceux à la profondeur 2,
- puis tous ceux à la profondeur 3
- etc…

Parcours en largeur d'abord



Largeur d’abord: ordre de visite
1, 2 ,3 ,4 ,5, 6 , 7, 8, 9 , 10 ,11 ,12

Parcours en largeur d'abord

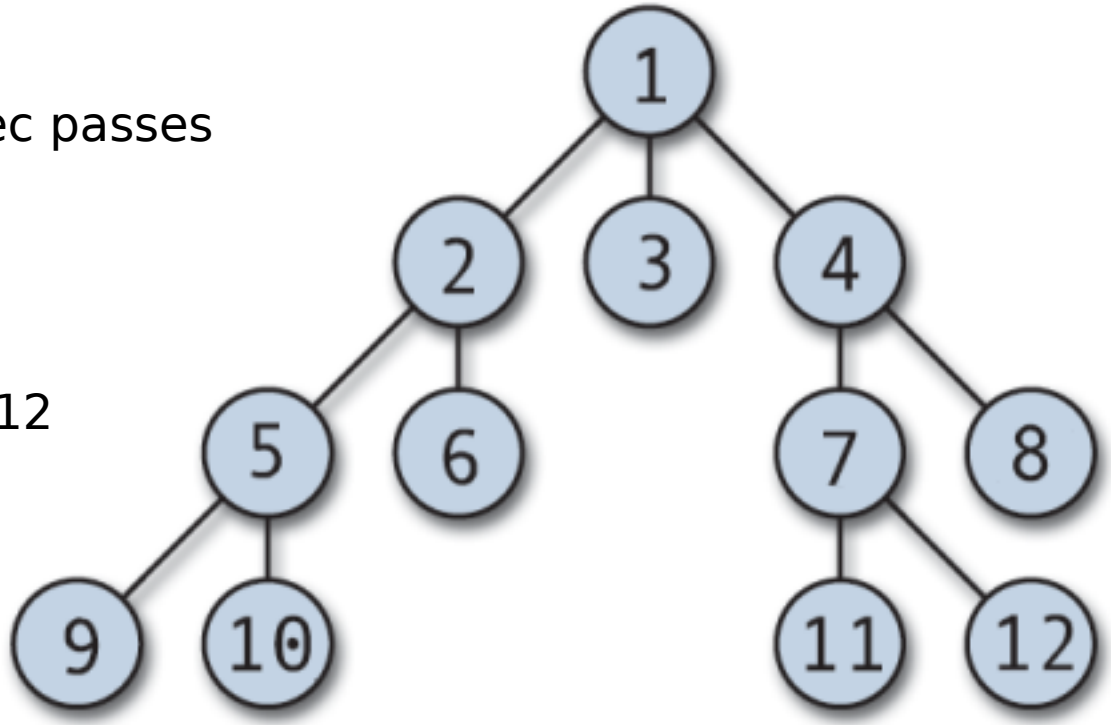
```
Liste ParcoursEnLargeur()
    F ← File()
    F.enfiler(racine())
    L ←  Liste()
    tant que non F.estVide()
          x ←  F.premier() ; F.défiler()
      L.ajouter(x)
      pour chaque fils y de x
          F.enfiler(y)
    renvoyer L
```

Parcours en largeur d'abord avec passes

```
Liste ParcoursEnLargeurAvecPasses()
    F1 ← File() ; F2 ← File()
    F1.enfiler(racine())
    L ←  Liste()
    répéter :
        tant que non F1.estVide()
            x ←  F1.premier() ; F1.défiler()
        L.ajouter(x)
        pour chaque fils y de x
            F2.enfiler(y)
        échanger(F1, F2)        # Fin d'une passe, début de la suivante
    tant que non F1.estVide()
    renvoyer L
```

Parcours en largeur d'abord avec passes

Largeur d’abord avec passes
Ordre de visite :
Passe 1 : 1
Passe 2 : 2 ,3 ,4
Passe 3 : 5, 6 , 7, 8
Passe 4 : 9, 10 ,11 ,12



Parcours en profondeur d'abord

- Défini de façon récursive

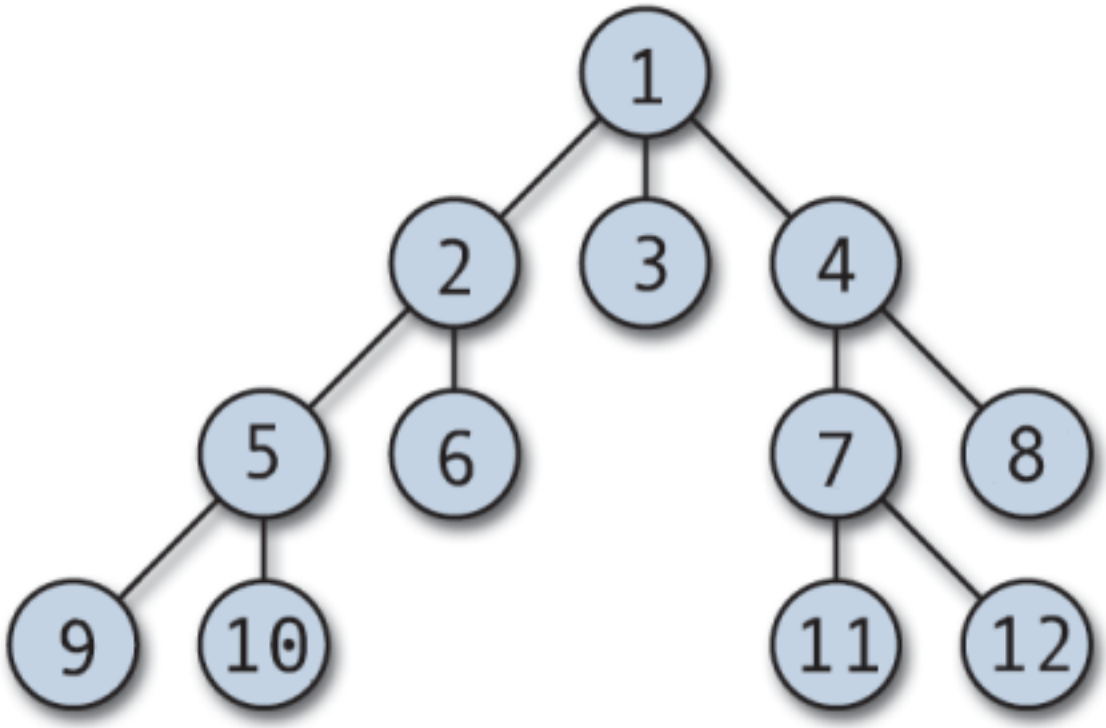
- visit(noeud x)
  previsit(x)
  pour chaque fils y de x
      visit(y)
  postvisit(x)

- Premier appel : visit(T.racine())

Parcours en profondeur d'abord

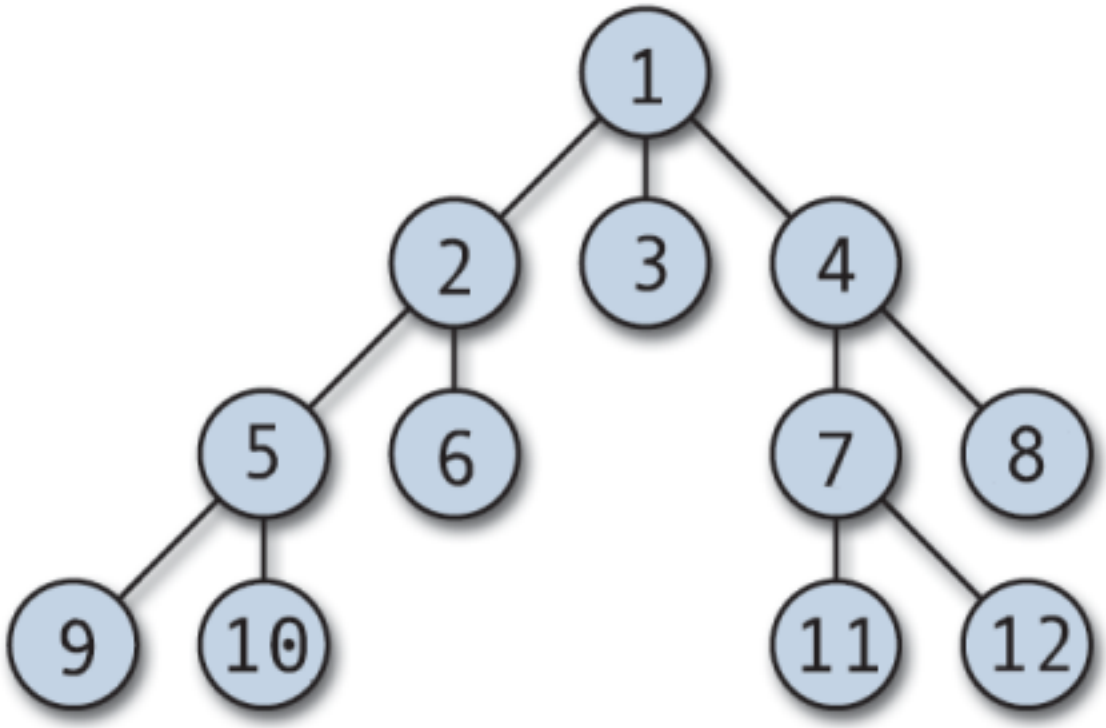
- Ordre préfixé ou postfixé dépend des fonctions previsit et postvisit
- Si previsit(x) : met x dans liste
  - alors liste contient l'ordre préfixé
- Si c'est postvisit qui le fait
  - alors liste contiendra l'ordre postfixé

Parcours en profondeur d'abord



Ordre de visite préfixé
On marque quand on atteint le noeud
1 ,2 ,5, 9, 10, 6, 3, 4, 7, 11, 12, 8

Parcours en profondeur d'abord



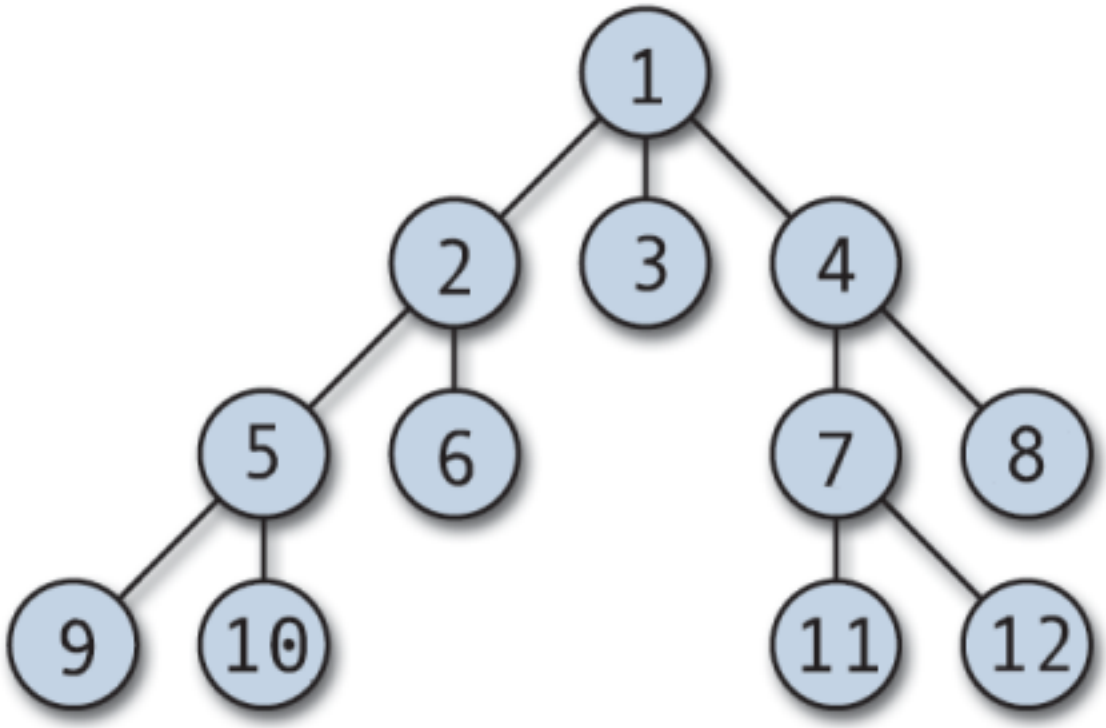
Ordre de visite postfixé
On marque quand on quitte le noeud
9, 10, 5, 6, 2, 3, 11, 12, 7, 8, 4, 1

Parcours infixé

- Valable uniquement pour les arbre binaires (2 fils au plus)
- visit(sommet x)
  previsit(x)
  si fils gauche y existe alors visit(y)
  invisit(x)
  si fils droit y existe alors visit(y)
  postvisit(x)

- Premier appel : visit(T.racine())
- invisit(x) place x dans la liste

Parcours en profondeur d'abord



Ordre de visite infixé (on ignore 3)
On marque entre les deux fils
9, 5, 10, 2, 6, 1, 11, 7,12, 4, 8

Profondeur d'abord itérative

- On peut éviter d'utiliser un algorithme récursif pour représenter un parcours en profondeur d'abord
- Il faut utiliser une pile
  - Visiter un fils revient à empiler le père
  - Et visiter le fils (qui va être empilé par ces fils et ainsi de suite)
  - Remonter (terminer l'appel récursif) revient à dépiler
  - Quand il n'y a plus de fils, on reprend le sommet de la pile, on dépile et on passe au fils suivant

Arbre : réalisation

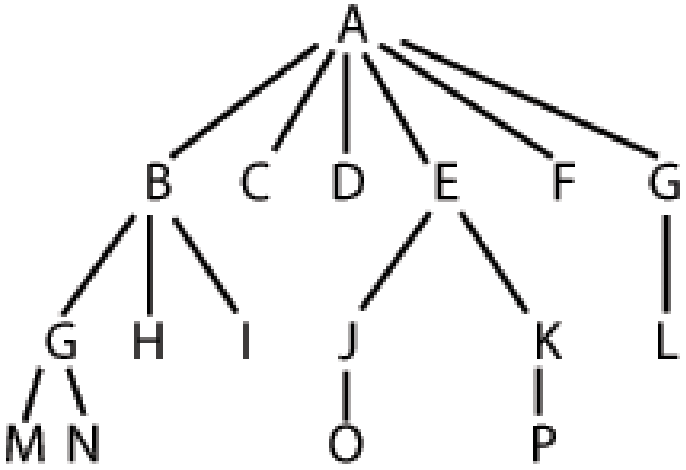
- Représentation des fils
  - Par une liste :
    - Le parent possède un premier fils
    - Chaque sommet possède un pointeur vers son frère suivant (liste chaînée des fils)
- Par un tableau si le nombre de fils est connu à l'avance (arbre k-aire)
- Dans le cas binaire, le parent possède le fils gauche et le fils droit

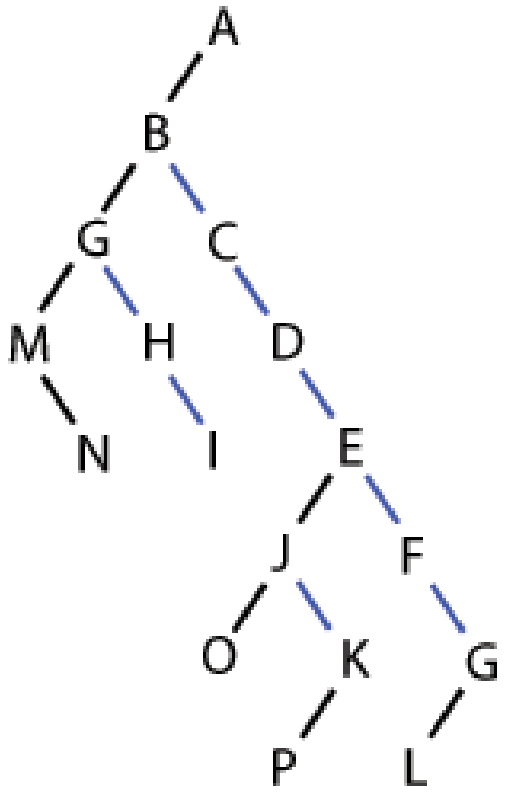
Arbre : réalisation

- Arbre binaire complet :
  - on peut utiliser un tableau pour représenter tout l'arbre
  - voir exemple du tas

Arbre non binaire

- Tout arbre non binaire peut être représenté par un arbre binaire

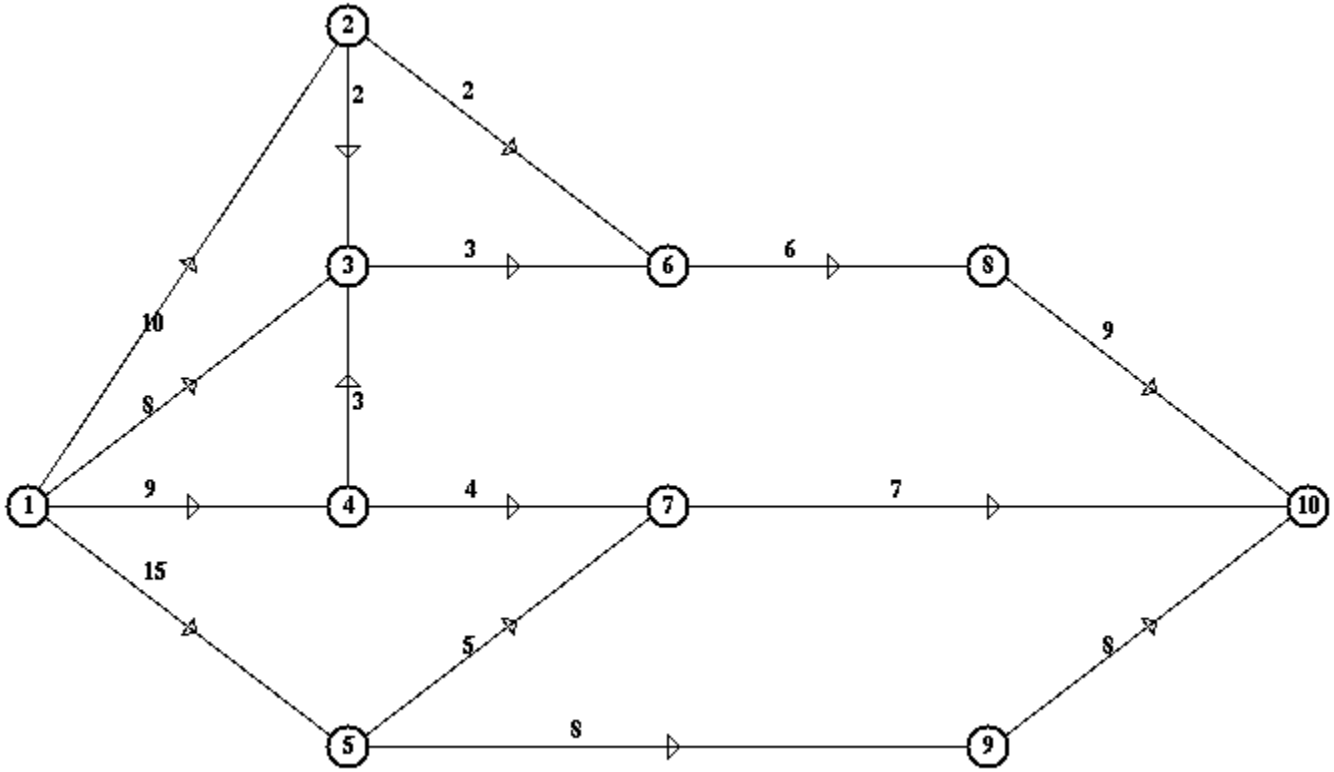




Graphe orienté

- Un Graphe Orienté $G = (X, U)$ est déterminé par la donnée :
  - d'un ensemble de sommets ou nœuds X
  - d'un ensemble ordonné U de couples de sommets appelés arcs.
- Si u = (i, j) est un arc de G, alors
  - i est l'extrémité initiale de u
  - j est l'extrémité terminale de u.
- Les arcs ont un sens (« orientés »).
  - L'arc u = (i, j) va de i vers j.
- Ils peuvent être munis d'un coût, d'une capacité etc. (arcs étiquetés)

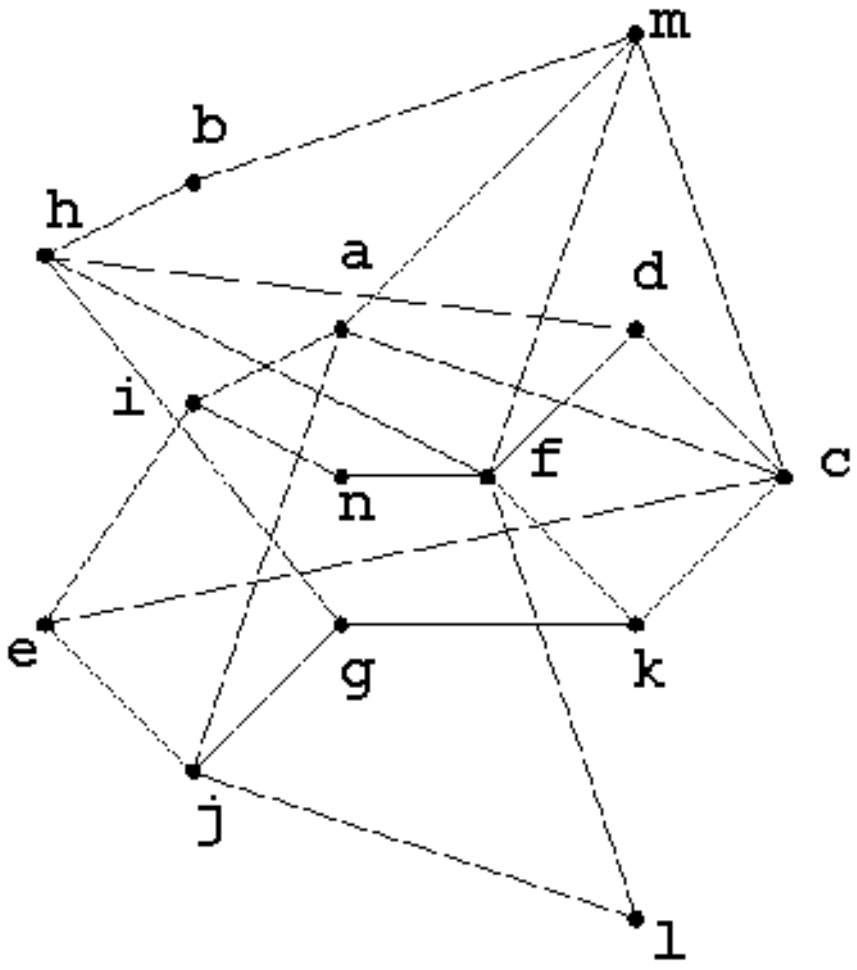
Graphe



Graphe non orienté

- Un Graphe Orienté $G = (X, U)$ est déterminé par la donnée :
  - d'un ensemble de sommets ou nœuds X
  - d'un ensemble de paires de sommets appelées « arêtes ».
- Les arêtes ne sont pas orientées

Graphe non orienté



Chemins et circuits

- Chemin de longueur q : séquence de q arcs $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ telle que
  - $u_1 = (i_0, i_1)$
  - $u_2 = (i_1, i_2)$
  - $u_q = (i_{q-1}, i_q)$

- Chemin : tous les arcs orientés dans le même sens
- Circuit : chemin dont les extrémités coïncident

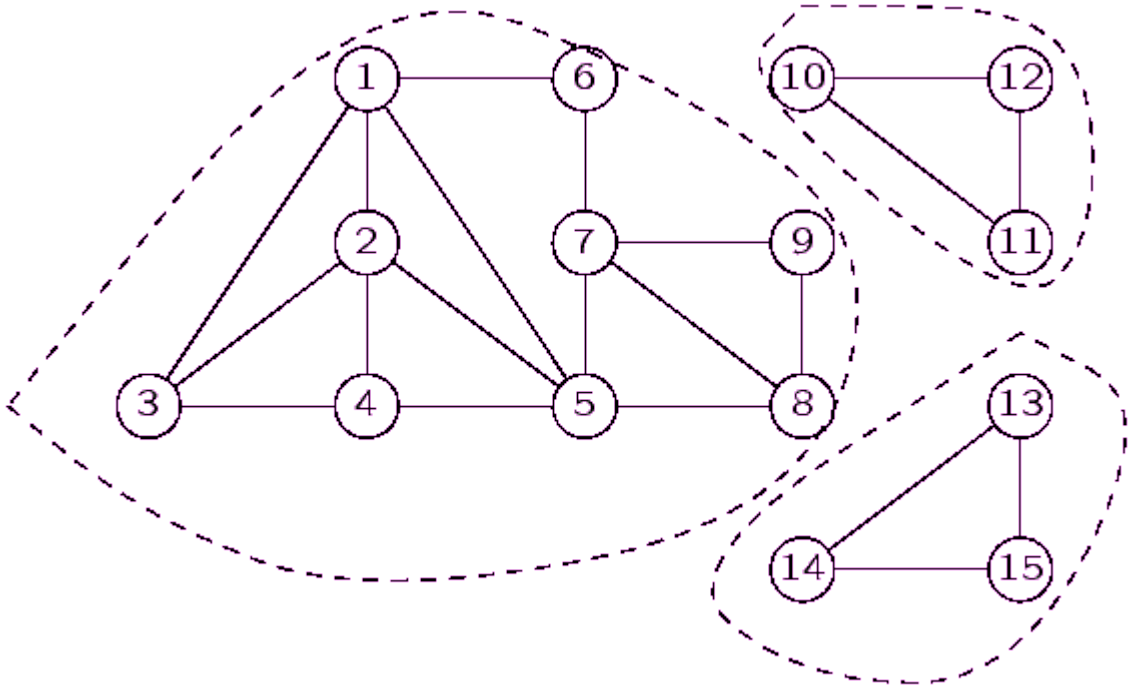
Chaînes et cycles

- Chaîne de longueur q : séquence de q arêtes $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ telle que
  - $u_1 = (i_0, i_1)$
  - $u_2 = (i_1, i_2)$
  - $u_q = (i_{q-1}, i_q)$

- Cycle : chaîne dont les extrémités coïncident

Connexité

- Connexité : un graphe non orienté est connexe s'il existe une chaîne entre tout paire de sommets



Arbres comme graphes

- Un arbre est un graphe non orienté connexe et sans cycle

- Un graphe non orienté G ayant n sommets est un arbre si et seulement si il vérifie l'une des deux propriétés
  - G est connexe et possède n – 1 arêtes
  - G n'a pas de cycle et a n – 1 arêtes

Merci de votre attention