Algorithmique – Programmation Objet – Python
TD n°5

Licence Informatique 2ème année
Université de Nice-Sophia Antipolis

L'élimination de Gauss-Jordan, aussi appelée méthode du pivot de Gauss, est un algorithme de l'algèbre linéaire pour déterminer les solutions d'un système de n équations linéaires en n variables inconnues. Pour ce faire, on construit une matrice contenant, pour chaque ligne, les coefficients des n variables, outre au terme connu, de l'équation correspondante. La méthode consiste à produir la forme échelonnée réduite de cette matrice à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes. Trois types d'opérations élémentaires sont utilisées:

- Échange de deux lignes ;
- Multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ;
- Ajout du multiple d'une ligne à une autre ligne.

1 Une classe "système d'équations"

Concevoir une classe SystèmeEquations pour représenter un système d'équations linéaires. La classe devra contenir, comme attribut, une matrice $n \times (n+1)$ des cofficients du système d'équations, que nous appelerons A.

2 Préparations

1. Écrire la méthode Échange(i, j) qui échange la ligne a_i avec la ligne a_j.
2. Écrire la méthode ProdScalaire(i, x) qui multiplie la ligne a_i par le scalaire $x \neq 0$.
3. Écrire la méthode CombLin(i, j, x), qui ajoute un multiple de la ligne a_i à la ligne a_j, utilisant x comme facteur de multiplication.

3 Résolution du système

Un système de n équations linéaires en n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a la forme générale

$$\left\{ \begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array} \right. , \tag{1}$$

où a_{ij} est le coefficient de x_j dans l'$i$ème équation et les b_i sont les termes connus.

On va maintenant écrire une version simplifiée de l'élimination de Gauss-Jordan. Si on multiplie les deux membres d'une équations par la même constante, ses solutions ne changent pas ; en outre, additioner ou soustraire membre par membre une équation du système à une autre laisse les solutions du système invariées. L'objectif de ces manipulations est de transformer le système de l'Équation 1 en un système équivalent de la forme

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} x_1 & & & & = & \bar{b}_1 \\ & x_2 & & & = & \bar{b}_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & x_n & = & \bar{b}_n \end{array} \right. , \tag{2}$$

dans lequel il est facile de lire la solution pour chaque variable.

Écrire la méthode RÉSOUDRE() qui transforme la matrice A des coefficients en sa forme échélonnée réduite correspondant au système de l'Équation 2, en utilisant les méthodes PRODSCALAIRE et COMBLIN développées dans l'exercice précédent.

4 Élimination de Gauss-Jordan

Pour améliorer la stabilité numérique de l'algorithme, il est conseillé d'échanger à chaque étape de transformation la ligne à manipuler avec la ligne ayant la valeur absolue de pivot (a_{ii}) la plus grande. Modifier l'algorithme de l'exercice précédent pour suivre ce conseil.